



参考答案及解析

理数(一)

一、选择题

1. A 【解析】 $A = \{x | 3x^2 - 2x - 1 > 0\} = \left\{x | x < -\frac{1}{3} \text{ 或 } x > 1\right\}$, 所以 $A \cap B = \left(-\infty, -\frac{1}{3}\right) \cup (1, 2020)$. 故选 A.

2. B 【解析】 $z = \frac{3-4i}{1+2i} = \frac{(3-4i)(1-2i)}{5} = -1-2i$,
 $\therefore z^2 = (1+2i)^2 = -3+4i, |z|^2 = (-1)^2 + (-2)^2 = 5$,
 $\therefore z^2 - |z|^2 = -3+4i-5 = -8+4i$. 故选 B.

3. B 【解析】 $a = 2^{\frac{1}{5}} > 2^0 = 1, b = \ln \frac{1}{2} < \ln 1 = 0, 0 < c = \tan \frac{\pi}{5} < \tan \frac{\pi}{4} = 1$, 所以 $a > c > b$. 故选 B.

4. C 【解析】 $\because a \cdot (a-3b) = 0, \therefore a^2 = 3a \cdot b = 36$,
 $\therefore a \cdot b = 12. \therefore$ 向量 b 在向量 a 上的投影为 $\frac{a \cdot b}{|a|} = 2$.
 故选 C.

5. D 【解析】由题意得 $f(x) = g\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = |x| \cos 2\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = |x| \sin 2x, f(-x) = |-x| \sin(-2x) = -|x| \sin 2x = -f(x)$, 即 $f(x)$ 是奇函数, 其图象关于原点对称, 排除 A、C, $f(\pi) = \pi \sin 2\pi = 0$, 排除 B. 故选 D.

6. C 【解析】对“八雅”进行全排列, 方法总数为 A_8^8 种, 满足“琴”“棋”“书”“画”互不相邻的方法数为 $A_4^4 A_5^5$ 种, 则所求概率 $P = \frac{A_4^4 A_5^5}{A_8^8} = \frac{4! \cdot 5!}{8!} = \frac{3}{42} = \frac{1}{14}$. 故选 C.

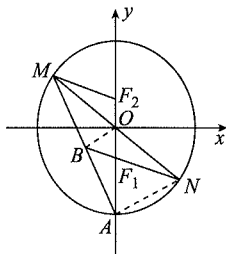
7. D 【解析】当 $x = -3$, 满足条件, 输出 $y = 3, x = -2$;

满足条件, 输出 $y = 0, x = -1$; 满足条件, 输出 $y = -1, x = 0$; 满足条件, 输出 $y = 0, x = 1$; 满足条件, 输出 $y = 3, x = 2$; 满足条件, 输出 $y = 8, x = 3$; 满足条件, 输出 $y = 15, x = 4$; 不满足条件, 结束. 可知填入 $x \leq 3, x < 4, y \leq 8$ 均符合题意, 若填入 $y \leq 2$, 则输出的最终的 y 的值为 3, 不合题意. 故选 D.

8. A 【解析】等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 $-1, a_3 = a_1 - 2, a_5 = a_1 - 4, a_7 = a_1 - 6$ 为某三角形的三边长, 且该三角形有一个内角为 120° , 可得 $a_3^2 = a_5^2 + a_7^2 + a_5 a_7$, 得 $(a_1 - 4)(a_1 - 9) = 0$, 所以 $a_1 = 4$ (舍) 或 $a_1 = 9, S_5 = 9 \times 5 + \frac{5 \times 4}{2} \times (-1) = 35$. 故选 A.

9. B 【解析】若正整数 m 按照上述规则经过 6 次运算后得到 1, 则第 5 次运算后得到的一定是 2; 则经过 4 次运算后得到的一定是 4; 经过 3 次运算后得到的为 8 或 1 (不合题意); 经过 2 次运算后得到的是 16; 经过 1 次运算后得到的是 5 或 32; 所以开始时的数为 10 或 64. 所以正整数 m 的值为 10 或 64. 故选 B.

10. A 【解析】如图, 连接 OB, AN , 则 OB 是 $\triangle AMN$ 的中位线, 所以 $\frac{OB}{AN} = \frac{OF_1}{F_1 A} = \frac{1}{2}$, 即 $\frac{c}{a-c} = \frac{1}{2}$, 所以 $a = 3c$, 又其长轴与焦距之和为 8, 即 $2a + 2c = 8$, 解得 $a = 3, c = 1$, 所以 $b = 2\sqrt{2}$. 故选 A.



$$= \frac{2ab}{c^2 - 2a^2}, \text{解得 } 4a^2 = c^2, \text{故 } e = \frac{c}{a} = 2.$$

三、解答题

$$17. \text{解: (1)} \because \sqrt{3} \sin^2 B + \sqrt{3} \sin^2 C = 2 \sin A \sin B \sin C + \sqrt{3} \sin^2 A,$$

$$\therefore \text{由正弦定理得 } \sqrt{3} b^2 + \sqrt{3} c^2 = 2 \sin A bc + \sqrt{3} a^2,$$

$$\text{即 } \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{1}{\sqrt{3}} \sin A.$$

$$\text{由余弦定理得 } \cos A = \frac{1}{\sqrt{3}} \sin A,$$

$$\therefore \tan A = \sqrt{3}.$$

$$\text{又 } 0 < A < \pi, \therefore A = \frac{\pi}{3}. \quad (6 \text{ 分})$$

$$(2) \because S_{\triangle ABC} = 2\sqrt{3} = \frac{1}{2} bc \sin A, \therefore bc = 8,$$

$$\text{又 } \because \frac{1}{b} - \frac{1}{c} = \frac{c-b}{bc} = \frac{1}{4}, \therefore c-b=2,$$

$$\text{由余弦定理得 } a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A = (b-c)^2 + bc = 4 + 8 = 12,$$

$$\therefore a = 2\sqrt{3}. \quad (12 \text{ 分})$$

$$18. \text{解: (1) 当点 } H \text{ 为 } DE \text{ 的中点时, } AH \parallel \text{平面 } EFG.$$

证明如下:

在矩形 BCC_1B_1 中,

$\because D, E$ 分别是 BC, B_1C_1 的中点,

$\therefore DE \parallel BB_1$.

$\because$ 点 H 是 DE 的中点,

$\therefore HE \parallel BB_1, HE = \frac{1}{2} BB_1$.

$\because$ 点 F 是 AA_1 的中点,

$\therefore AF \parallel BB_1, AF = \frac{1}{2} BB_1$.

$\therefore HE \parallel AF, HE = AF. \quad (3 \text{ 分})$

$\therefore$ 四边形 $AHEF$ 是平行四边形.

$$\therefore AH \parallel EF. \quad (4 \text{ 分})$$

又 $\because AH \not\subset \text{平面 } EFG, EF \subset \text{平面 } EFG,$

$$\therefore AH \parallel \text{平面 } EFG. \quad (5 \text{ 分})$$

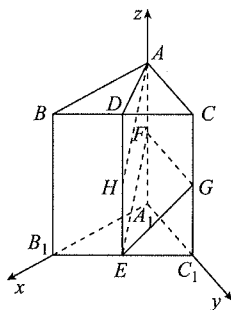
$$(2) \because AB = AC = 2\sqrt{2}, BC = 4, \therefore AB \perp AC.$$

$\because ABC-A_1B_1C_1$ 为直三棱柱,

$\therefore AA_1 \perp \text{平面 } A_1B_1C_1,$

$\therefore AA_1 \perp A_1B_1, AA_1 \perp A_1C_1$.

如图,以点 A_1 为原点,直线 A_1B_1, A_1C_1, AA_1 分别为 x, y, z 轴,建立空间直角坐标系 A_1xyz .



$$\text{则 } F(0, 0, 2), E(\sqrt{2}, \sqrt{2}, 0), G(0, 2\sqrt{2}, 2),$$

$$\therefore \overrightarrow{EF} = (-\sqrt{2}, -\sqrt{2}, 2), \overrightarrow{FG} = (0, 2\sqrt{2}, 0).$$

设平面 EFG 的一个法向量为 $\mathbf{n} = (x, y, z),$

$$\text{由 } \begin{cases} \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{EF} = 0, \\ \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{FG} = 0, \end{cases} \text{ 得 } \begin{cases} -\sqrt{2}x - \sqrt{2}y + 2z = 0, \\ 2\sqrt{2}y = 0, \end{cases}$$

$$\text{令 } z = 1, \text{ 得 } \mathbf{n} = (\sqrt{2}, 0, 1).$$

在等腰直角三角形 $A_1B_1C_1$ 中,点 E 是斜边 B_1C_1 的中点,

$$\therefore A_1E \perp B_1C_1.$$

又平面 $BCC_1B_1 \perp$ 平面 $A_1B_1C_1$, 平面 $BCC_1B_1 \cap$ 平面 $A_1B_1C_1 = B_1C_1,$

$$\therefore A_1E \perp \text{平面 } BCC_1B_1.$$

即 $\overrightarrow{A_1E} = (\sqrt{2}, \sqrt{2}, 0)$ 是平面 BCC_1B_1 的一个法向量.

设平面 EFG 与平面 BCC_1B_1 所成的锐二面角为 $\theta,$

$$\begin{aligned}\cos \theta &= |\cos \langle \vec{n}, \vec{A_1E} \rangle| = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{A_1E}|}{|\vec{n}| |\vec{A_1E}|} \\ &= \frac{|\sqrt{2} \times \sqrt{2} + 0 \times \sqrt{2} + 1 \times 0|}{\sqrt{2+0+1} \cdot \sqrt{2+2+0}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.\end{aligned}$$

即平面 EFG 与平面 BCC_1B_1 所成的锐二面角的余弦值为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$. (12 分)

19. 解: 设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), l: x = my + b$,

与抛物线方程联立消去 x , 得 $y^2 - 4my - 4b = 0$, (2 分)

$$\therefore y_1 y_2 = -4b, y_1 + y_2 = 4m.$$

$$\Delta = 16m^2 + 16b. \quad (3 \text{ 分})$$

$$(1) \therefore \frac{y_1 + y_2}{2} = 2m = 1, \text{ 即 } m = \frac{1}{2}. \quad (4 \text{ 分})$$

$$\begin{aligned}\frac{x_1 + x_2}{2} &= \frac{\frac{y_1^2}{4} + \frac{y_2^2}{4}}{2} = \frac{(y_1 + y_2)^2 - 2y_1 y_2}{8} = 2m^2 + b \\ &= 1,\end{aligned}$$

$$\therefore b = 1 - 2m^2 = \frac{1}{2}. \text{ 经验证满足 } \Delta > 0. \quad (5 \text{ 分})$$

即直线 l 的方程为 $2x - y - 1 = 0$. (6 分)

(2) 若向量 $\frac{\vec{PA}}{|\vec{PA}|} + \frac{\vec{PB}}{|\vec{PB}|}$ 与向量 $\vec{OF}$ 平行,

则 $\angle APB$ 的平分线与直线 OF 重合,

$$\begin{aligned}\text{即 } \angle APO &= \angle BPO, \text{ 于是得 } k_{PA} = -k_{PB}, \text{ 即 } \frac{y_1}{x_1 + 1} = \\ &= -\frac{y_2}{x_2 + 1}.\end{aligned} \quad (8 \text{ 分})$$

整理得 $y_1 x_2 + y_1 + x_1 y_2 + y_2 = 0$,

$$\text{即 } y_1(m y_2 + b) + y_1 + (m y_1 + b)y_2 + y_2 = 0,$$

$$\text{整理得 } 2m y_1 y_2 + (b+1)(y_1 + y_2) = 0,$$

$$\text{即 } -8bm + 4(b+1)m = 0, \text{ 即 } b = 1. \quad (11 \text{ 分})$$

故直线 l 的方程为 $x = my + 1$, 且过焦点 $F(1, 0)$.

(12 分)

20. 解: (1) $\because f'(x) = \sin x + x \cos x$,

$$\therefore f'(0) = \sin 0 + 0 \times \cos 0 = 0.$$

当 $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ 时, $\sin x > 0, x \cos x > 0$,

$\therefore f'(x) > 0, f(x)$ 单调递增;

当 $x \in (-\frac{\pi}{2}, 0)$ 时, $\sin x < 0, x \cos x < 0$,

$\therefore f'(x) < 0, f(x)$ 单调递减;

$\therefore x = 0$ 是 $f(x)$ 的一个极小值点, 且 $f'(x) = 0$ 在区间 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 上仅有 0 这一个零点.

$\therefore f(x)$ 在区间 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 内存在唯一极小值点.

(5 分)

(2) 由 (1) 知, $f'(x) = \sin x + x \cos x$.

① 当 $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ 时, $f'(x) \geq 0$,

$\therefore$ 函数 $f(x)$ 在 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 上单调递增.

$$\therefore f(0)f\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{3}{2} \times \frac{\pi-3}{2} < 0,$$

$\therefore$ 函数 $f(x)$ 在 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 上有唯一零点. (7 分)

② 当 $x \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$ 时, 令 $h(x) = \sin x + x \cos x$,

$$\therefore h'(x) = 2\cos x - x \sin x < 0,$$

$\therefore h(x) = f'(x)$ 在 $[\frac{\pi}{2}, \pi]$ 上单调递减

$$\text{又 } f'(\pi) \cdot f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\pi < 0,$$

$\therefore$ 存在唯一 $x_0 \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$, 使 $f'(x_0) = 0$, (9 分)

$\therefore$ 当 $x \in [\frac{\pi}{2}, x_0)$ 时, $f'(x) > 0$;

当 $x \in (x_0, \pi)$ 时, $f'(x) < 0$,

$\therefore f(x)$ 在 $[\frac{\pi}{2}, x_0)$ 上单调递增, 在 (x_0, π) 上单调

递减,

$$\therefore f\left(\frac{\pi}{2}\right) > 0,$$

$$\therefore f(x_0) > 0,$$

$$\text{又} \because f(\pi) < 0,$$

$\therefore$ 函数 $f(x)$ 在 $\left[\frac{\pi}{2}, x_0\right)$ 上没有零点, 在 $[x_0, \pi)$ 上有

唯一零点,

由①②得函数 $f(x)$ 在区间 $[0, \pi)$ 上恰有 2 个零点.

(11 分)

又 $f(x)$ 为偶函数, 且 $f(0) \neq 0$,

$\therefore$ 函数 $f(x)$ 在区间 $(-\pi, 0)$ 上恰有 2 个零点.

综上所述, 函数 $f(x)$ 在区间 $(-\pi, \pi)$ 上恰有 4 个零

点.

(12 分)

21. 解: (1) 由题意可知 $X_2 = 3, 4, 5$.

当 $X_2 = 3$ 时, 即两次摸球均摸到红球,

$$\text{其概率为 } P(X_2 = 3) = \frac{C_3^1}{C_7^1} \times \frac{C_3^1}{C_7^1} = \frac{9}{49};$$

当 $X_2 = 4$ 时, 即两次摸球恰好摸到一红球, 一白球,

$$\text{其概率为 } P(X_2 = 4) = \frac{C_3^1 C_4^1}{C_7^1 C_7^1} + \frac{C_4^1 C_3^1}{C_7^1 C_7^1} = \frac{28}{49};$$

当 $X_2 = 5$ 时, 即两次摸球均摸到白球,

$$\text{其概率为 } P(X_2 = 5) = \frac{C_4^1 C_3^1}{C_7^1 C_7^1} = \frac{12}{49};$$

所以随机变量 X_2 的分布列如下表:

X_2	3	4	5
P	$\frac{9}{49}$	$\frac{28}{49}$	$\frac{12}{49}$

(3 分)

$$\text{数学期望 } E(X_2) = 3 \times \frac{9}{49} + 4 \times \frac{28}{49} + 5 \times \frac{12}{49} = \frac{199}{49}.$$

(4 分)

$$(2) \text{① 设 } P(X_n = 3+k) = p_k, k=0, 1, 2, 3, 4,$$

$$\text{则 } p_0 + p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 1,$$

$$E(X_n) = 3p_0 + 4p_1 + 5p_2 + 6p_3 + 7p_4.$$

$$P(X_{n+1} = 3) = \frac{3}{7}p_0,$$

$$P(X_{n+1} = 4) = \frac{4}{7}p_0 + \frac{4}{7}p_1,$$

$$P(X_{n+1} = 5) = \frac{3}{7}p_1 + \frac{5}{7}p_2,$$

$$P(X_{n+1} = 6) = \frac{2}{7}p_2 + \frac{6}{7}p_3,$$

$$P(X_{n+1} = 7) = \frac{1}{7}p_3 + \frac{7}{7}p_4.$$

$$\text{所以 } E(X_{n+1}) = 3 \times \frac{3}{7}p_0 + 4 \times \left(\frac{4}{7}p_0 + \frac{4}{7}p_1\right) + 5$$

$$\times \left(\frac{3}{7}p_1 + \frac{5}{7}p_2\right) + 6 \times \left(\frac{2}{7}p_2 + \frac{6}{7}p_3\right) + 7$$

$$\times \left(\frac{1}{7}p_3 + \frac{7}{7}p_4\right)$$

$$= \frac{25}{7}p_0 + \frac{31}{7}p_1 + \frac{37}{7}p_2 + \frac{43}{7}p_3 + \frac{49}{7}p_4$$

$$= \frac{6}{7}(3p_0 + 4p_1 + 5p_2 + 6p_3 + 7p_4) + p_0 + p_1 + p_2 +$$

$$p_3 + p_4$$

$$= \frac{6}{7}E(X_n) + 1.$$

(8 分)

$$\text{由此可知, } E(X_{n+1}) - 7 = \frac{6}{7}[E(X_n) - 7].$$

$$\text{又 } E(X_1) = 3 \times \frac{3}{7} + 4 \times \frac{4}{7} = \frac{25}{7},$$

$$\text{所以 } E(X_1) - 7 = -\frac{24}{7}.$$

$$\text{所以 } \{E(X_n) - 7\} \text{ 是以 } -\frac{24}{7} \text{ 为首项, } \frac{6}{7} \text{ 为公比的等}$$

比数列.

(10 分)

$$\text{② 由①知, } E(X_n) - 7 = -\frac{24}{7} \times \left(\frac{6}{7}\right)^{n-1},$$

$$\text{所以 } E(X_n) = -\frac{24}{7} \times \left(\frac{6}{7}\right)^{n-1} + 7.$$

(12 分)

$$22. \text{解: (1)} y = \frac{2\sqrt{3}\tan\theta}{1+\tan^2\theta} = \frac{\frac{2\sqrt{3}\sin\theta}{\cos\theta}}{1+\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}} = \frac{2\sqrt{3}\sin\theta\cos\theta}{1} =$$

$$\sqrt{3}\sin 2\theta,$$

$$\therefore x^2 + \frac{y^2}{3} = \cos^2 2\theta + \sin^2 2\theta = 1.$$

$$\text{由 } \theta \neq k\pi + \frac{\pi}{2} (k \in \mathbf{Z}), \text{ 得 } 2\theta \neq 2k\pi + \pi (k \in \mathbf{Z}),$$

$$\therefore x \neq -1,$$

$$\therefore \text{椭圆 } C \text{ 的普通方程为 } x^2 + \frac{y^2}{3} = 1 (x \neq -1).$$

$$\text{由 } \sqrt{2}\rho\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) = 1,$$

$$\text{得 } \rho\cos\alpha - \rho\sin\alpha - 1 = 0,$$

$$\text{直线 } l \text{ 的直角坐标方程为 } x - y - 1 = 0. \quad (5 \text{ 分})$$

$$(2) \text{ 设 } P(\cos 2\theta, \sqrt{3}\sin 2\theta),$$

$$\text{则点 } P \text{ 到直线 } l \text{ 的距离 } d = \frac{|\cos 2\theta - \sqrt{3}\sin 2\theta - 1|}{\sqrt{2}}$$

$$= \frac{\left|2\cos\left(2\theta + \frac{\pi}{3}\right) - 1\right|}{\sqrt{2}} \leq \frac{3}{\sqrt{2}},$$

$$\text{当且仅当 } \cos\left(2\theta + \frac{\pi}{3}\right) = -1 \text{ 时取等号.}$$

$$\text{由 } l: x - y - 1 = 0, \text{ 得 } A(1, 0), B(0, -1),$$

$$\therefore |AB| = \sqrt{2},$$

$$\therefore \triangle PAB \text{ 的面积的最大值为 } S = \frac{1}{2} \times \sqrt{2} \times \frac{3}{\sqrt{2}} =$$

$$\frac{3}{2}. \quad (10 \text{ 分})$$

$$23. \text{解: (1)} \because a + b + c = 1,$$

$$\therefore \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{a+b+c}{a} + \frac{a+b+c}{b} + \frac{a+b+c}{c}$$

$$= 3 + \frac{b}{a} + \frac{c}{a} + \frac{a}{b} + \frac{c}{b} + \frac{a}{c} + \frac{b}{c}$$

$$= 3 + \left(\frac{b}{a} + \frac{a}{b}\right) + \left(\frac{c}{a} + \frac{a}{c}\right) + \left(\frac{c}{b} + \frac{b}{c}\right)$$

$$\geq 3 + 2\sqrt{\frac{b}{a} \cdot \frac{a}{b}} + 2\sqrt{\frac{c}{a} \cdot \frac{a}{c}} + 2\sqrt{\frac{b}{c} \cdot \frac{c}{b}} = 9.$$

当且仅当 $a = b = c$ 时取等号.

$$\text{即 } \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq 9. \quad (5 \text{ 分})$$

$$(2) \text{ 由 (1) 得 } \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq 9,$$

$$\text{两边都乘 } abc, \text{ 得 } bc + ca + ab \geq 9abc. \quad ①$$

$$2a^2 + 2b^2 + 2c^2 = (a^2 + b^2) + (b^2 + c^2) + (a^2 + c^2) \geq$$

$$2ab + 2bc + 2ca, \text{ 当且仅当 } a = b = c \text{ 时取等号.}$$

$$\text{即 } a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca. \quad ②$$

$$\text{由 } ①②, \text{ 得 } a^2 + b^2 + c^2 \geq 9abc. \quad (10 \text{ 分})$$