



参考答案及解析

文数(一)

一、选择题

1. D 【解析】由题得, $z = \frac{3+4i}{1-2i} = \frac{(3+4i)(1+2i)}{5} = -1 + 2i$, $\therefore |z|^2 = (-1)^2 + 2^2 = 5$. 故选 D.
2. C 【解析】由题得, $A = \{0, 1, 2\}$, $\therefore \complement_U A = \{-1, 3, 4, 5, 6\}$, $\therefore (\complement_U A) \cap B = \{3, 6\}$. 故选 C.
3. A 【解析】由题得, $a = 2^{\frac{1}{5}} > 2^0 = 1$, $b = \ln \frac{1}{2} < \ln 1 = 0$, $0 < c = \tan \frac{\pi}{5} < \tan \frac{\pi}{4} = 1$, 所以 $a > c > b$. 故选 A.
4. B 【解析】根据系统抽样, 得样本间隔为 $1000 \div 50 = 20$, 已知被抽取到的号码有 15, 则其他被抽取到的号码为 $15 + 20(n-1) = 20n - 5$, $n \in \mathbf{N}^*$ 且 $n \leq 50$, 当 $n = 5$ 时, 号码为 95; 当 $n = 6$ 时, 号码为 115; 当 $n = 7$ 时, 号码为 135; 令 $20n - 5 = 105$, 解得 $n = 5.5$, 不合题意. 故选 B.
5. B 【解析】根据题意, 可得函数 $f(x)$ 满足 $f(-x) = -f(x)$, 则 $f(x) = \frac{\log_2 |x|}{x} + x$ 为奇函数, 其图象关于原点对称, 所以排除 A; 因为 $f(1) = \frac{\log_2 1}{1} + 1 = 1 > 0$, 所以排除 C; $f(2) = \frac{\log_2 2}{2} + 2 = \frac{5}{2} > 0$, 所以排除 D. 故选 B.
6. A 【解析】由 $\sin(\theta - \frac{\pi}{3}) = 2\cos(\frac{7\pi}{2} + \theta)$, 得 $\frac{1}{2}\sin\theta - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta = 2\sin\theta$, $\therefore \tan\theta = -\frac{\sqrt{3}}{3}$, $\therefore \sin 2\theta = \frac{2\sin\theta\cos\theta}{\sin^2\theta + \cos^2\theta} = \frac{2\tan\theta}{\tan^2\theta + 1} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$. 故选 A.
7. A 【解析】由题得, $a - b = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{DB}$, $a - 2b = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB}$, 所以向量 $a - b$ 在 $a - 2b$ 方向上的投影为 $\frac{\overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{CB}}{|\overrightarrow{CB}|} = \frac{|\overrightarrow{DB}| \cdot |\overrightarrow{CB}| \cos 30^\circ}{|\overrightarrow{CB}|} = \frac{\sqrt{3} \times 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{3}{2}$. 故选 A.
8. C 【解析】第 1 次循环: $S = 0 + \frac{1}{1 \times 3} = \frac{1}{2} \times (1 - \frac{1}{3}) = \frac{1}{3}$, $i = 1 + 1 = 2$; 第 2 次循环: $S = \frac{1}{2} \times (1 - \frac{1}{3}) + \frac{1}{3 \times 5} = \frac{1}{2} \times (1 - \frac{1}{5}) = \frac{2}{5}$, $i = 2 + 1 = 3$; 第 3 次循环: $S = \frac{1}{2} \times (1 - \frac{1}{5}) + \frac{1}{5 \times 7} = \frac{1}{2} \times (1 - \frac{1}{7}) = \frac{3}{7}$, $i = 3 + 1 = 4$; 第 4 次循环: $S = \frac{1}{2} \times (1 - \frac{1}{7}) + \frac{1}{7 \times 9} = \frac{1}{2} \times (1 - \frac{1}{9}) = \frac{4}{9} > \frac{3}{7}$, $i = 4 + 1 = 5$. 故要使输出 S 的值超过 $\frac{3}{7}$, 则 i 的值要超过 4. 结合选项, 可知 C 正确. 故选 C.
9. C 【解析】设 $F(c, 0)$, 则点 F 到双曲线 C 的渐近线 $bx \pm ay = 0$ 的距离为 $d = \frac{|bc|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = b > a$, $\therefore \frac{b}{a} > 1$, $\therefore e^2 = 1 + \frac{b^2}{a^2} > 2$, $\therefore e > \sqrt{2}$. 故选 C.
10. D 【解析】 $\because \frac{\sin^2 B + \sin^2 C - \sin^2 A}{2\sin B \sin C} = \frac{\sqrt{3}}{3} \sin A$, $\therefore$ 由正弦定理, 得 $\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{\sqrt{3}}{3} \sin A$, 再由余弦定理, 得 $\cos A = \frac{\sqrt{3}}{3} \sin A$, $\therefore \tan A = \sqrt{3}$, 又 $0 < A < \pi$, $\therefore A = \frac{\pi}{3}$. $\because \triangle ABC$ 外接圆的半径为 $\sqrt{3}$, $\therefore a = 2\sqrt{3} \sin A = 2\sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 3$. 由余弦定理, 得 $a^2 = b^2 + c^2 - 2bccos A = (b+c)^2 - 3bc \geq (b+c)^2 - \frac{3}{4}(b+c)^2 = \frac{1}{4}(b+c)^2$, 当且仅当 $b=c$ 时取等号. 即 $(b+c)^2 \leq 4a^2 = 36$, $\therefore 3 < b+c \leq 6$. 故选 D.
11. B 【解析】若正整数 m 按照上述规则经过 6 次运算后得到 1, 则第 5 次运算后得到的是 2; 第 4 次运算后得到的是 4; 第 3 次运算后得到的是 8 或 1 (不合题意); 第 2 次运算后得到的是 16; 第 1 次运算后得到的是 5 或 32, 所以开始时的数为 10 或 64. 故正整数 m 的值为 10 或 64. 故选 B.
12. A 【解析】由点 $A(0, 1)$ 在椭圆 C 上, 得 $b=1$, 即椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + y^2 = 1$. 由题意得, $\overrightarrow{F_1 A} = \pm 5 \overrightarrow{F_2 B}$, 当 $\overrightarrow{F_1 A} = 5 \overrightarrow{F_2 B}$ 时, 设 $B(x_0, y_0)$, 而 $F_1(-c, 0)$, $F_2(c, 0)$, $\therefore \overrightarrow{F_1 A} = (c, 1)$, $\overrightarrow{F_2 B} = (x_0 - c, y_0)$, 由 $\overrightarrow{F_1 A} = 5 \overrightarrow{F_2 B}$,

得 $c=5(x_0-c)$, $1=5y_0$, 即 $x_0=\frac{6c}{5}$, $y_0=\frac{1}{5}$, 又点 B

在椭圆 C 上, 得 $\frac{36c^2}{25} + \frac{1}{25} = 1$, 即 $3c^2 = 2a^2$, 又 $a^2 - c^2 = b^2 = 1$, 解得 $a^2 = 3$. 当 $\overrightarrow{F_1A} = -5\overrightarrow{F_2B}$ 时, 同理求得 $2c^2 = 3a^2$, $c > a$ 不符合题意, 故舍去, 故 C 的方程为 $\frac{x^2}{3} + y^2 = 1$. 故选 A.

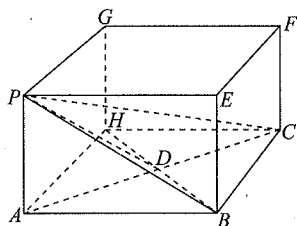
二、填空题

13. $2x - y - 2 = 0$ 【解析】由 $f(x)$ 为奇函数, 得 $f(0) = 1 - a = 0$, $\therefore a = 1$, $\therefore$ 当 $x \geq 0$ 时, $f(x) = x^3 - x$, $\therefore f(1) = 0$, $f'(x) = 3x^2 - 1$, $\therefore f'(1) = 2$. 由点斜式, 得曲线 $f(x)$ 在点 $(1, 0)$ 处的切线方程为 $y = 2(x - 1)$, 即 $2x - y - 2 = 0$.

14. 1 或 64 【解析】设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q , 当 $q = 1$ 时, 满足 $a_1 = 1$, $S_3 = 3$, $\therefore a_2 a_3 a_4 = 1$; 当 $q \neq 1$ 时, $S_3 = \frac{a_1(1-q^3)}{1-q} = \frac{(1-q)(1+q+q^2)}{1-q} = 3$, 解得 $q = -2$, 则 $a_2 a_3 a_4 = a_3^3 = (a_1 q^2)^3 = 4^3 = 64$. 综上, $a_2 a_3 a_4 = 1$ 或 64.

15. $[-\frac{3}{4}, \frac{3}{2}]$ 【解析】由题得, $f(x) = \sin^2 x + \sin x - \frac{1}{2}$, 设 $t = \sin x$, 则 $y = t^2 + t - \frac{1}{2} = (t + \frac{1}{2})^2 - \frac{3}{4}$. $\because x \in [-\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}]$, $\therefore t \in [-\frac{\sqrt{3}}{2}, 1]$, $\therefore$ 当 $t = -\frac{1}{2}$ 时, $y_{\min} = -\frac{3}{4}$; 当 $t = 1$ 时, $y_{\max} = \frac{3}{2}$. 故函数 $f(x)$ 的值域为 $[-\frac{3}{4}, \frac{3}{2}]$.

16. 9π 【解析】由 $AB = BC$, D 为 AC 的中点, 得 $BD \perp AC$, 又 $\angle PDB = 90^\circ$, $\therefore BD \perp PD$, 又 $AC \cap PD = D$, $\therefore BD \perp$ 平面 APC , $\therefore BD \perp AP$. 由 $PA = 1$, $AC = 2\sqrt{2}$, $PC = 3$, 得 $AP^2 + AC^2 = PC^2$, $\therefore PA \perp AC$, 又 $AC \cap BD = D$, $\therefore PA \perp$ 底面 ABC . 如图, 将此三棱锥补成长方体 $ABCH - PEF G$,



则三棱锥 $P-ABC$ 的外接球即为长方体 $ABCH - PEF G$ 的外接球, 且 PC 为三棱锥 $P-ABC$ 外接球的一条直径, $\therefore$ 三棱锥 $P-ABC$ 外接球的半径 $R =$

$\frac{3}{2}$, $\therefore$ 三棱锥 $P-ABC$ 外接球的表面积为 $S = 4\pi R^2 = 4\pi \times \frac{9}{4} = 9\pi$.

三、解答题

17. 解: (1) 由题中数据可知, A 大学男大学生喜欢短视频的概率 $P = \frac{120}{200} = \frac{3}{5}$, (3分)

女大学生喜欢短视频的概率 $P = \frac{160}{200} = \frac{4}{5}$. (6分)

(2) 由题意可知, $K^2 = \frac{400 \times (120 \times 40 - 160 \times 80)^2}{200 \times 200 \times 280 \times 120} = \frac{400}{21} \approx 19.048 > 10.828$, (10分)

故有 99.9% 的把握认为 A 大学的大学生中喜欢短视频与学生性别有关. (12分)

18. 解: (1) 由 $S_n = na_n + n^2 - n$, 得 $S_{n+1} = (n+1)a_{n+1} + (n+1)^2 - (n+1)$, 所以 $S_{n+1} - S_n = (n+1)a_{n+1} - na_n + 2n$, 又 $S_{n+1} - S_n = a_{n+1}$, 所以 $na_n = na_{n+1} + 2n$, 所以 $a_{n+1} - a_n = -2$, 所以 $\{a_n\}$ 是首项为 13, 公差为 -2 的等差数列, (5分)

所以 $a_n = 13 + (n-1)(-2) = 15 - 2n$. (6分)

(2) 由题得, $b_n = |a_n| = |15 - 2n| = \begin{cases} 2n - 15 (n \geq 8) \\ 15 - 2n (n < 8) \end{cases}$. (7分)

当 $n < 8$ 时, $T_n = \frac{n[13 + (15 - 2n)]}{2} = 14n - n^2$; (9分)

当 $n \geq 8$ 时, $T_n = T_7 + (1 + 3 + \dots + 2n - 15) = 49 + \frac{(1 + 2n - 15)(n - 7)}{2} = n^2 - 14n + 98$. (11分)

所以 $T_n = \begin{cases} 14n - n^2 (n < 8) \\ n^2 - 14n + 98 (n \geq 8) \end{cases}$. (12分)

19. 解: (1) H 为 DE 的中点.

证明如下: $\because$ 在矩形 BCC_1B_1 中, D 、 E 分别是 BC 、 B_1C_1 的中点,

$\therefore DE \parallel BB_1$.

$\because H$ 是 DE 的中点,

$\therefore HE \parallel BB_1$, $HE = \frac{1}{2}BB_1$.

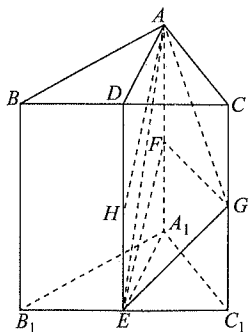
$\because F$ 是 AA_1 的中点,

$\therefore AF \parallel BB_1$, $AF = \frac{1}{2}BB_1$,

$\therefore HE \parallel AF$, $HE = AF$, (3分)

$\therefore$ 四边形 $AHEF$ 是平行四边形,

$\therefore AH \parallel EF$, (4分)
 又 $\because AH \not\subset$ 平面 EFG , $EF \subset$ 平面 EFG ,
 $\therefore AH \parallel$ 平面 EFG . (5分)



(2) 连接 AE, AG, A_1E .
 $\because AH \parallel$ 平面 EFG ,
 $\therefore$ 点 H 到平面 EFG 的距离即为点 A 到平面 EFG 的距离, 设为 d .

$$\because EG = \sqrt{EC_1^2 + C_1G^2} = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2},$$

$$EF = \sqrt{A_1F^2 + \frac{1}{4}B_1C_1^2} = 2\sqrt{2}, FG = AC = 2\sqrt{2},$$

$$\therefore EG = EF = FG, \quad (7分)$$

$$\therefore S_{\triangle EFG} = \frac{1}{2}FG^2 \sin 60^\circ = 2\sqrt{3}. \quad (8分)$$

$$\text{又 } S_{\triangle AFG} = \frac{1}{2}AF \times FG = \frac{1}{2} \times 2 \times 2\sqrt{2} = 2\sqrt{2}, \quad (9分)$$

$$\therefore \text{由 } V_{A-EFG} = V_{E-AFG},$$

$$\text{得 } \frac{1}{3} \times S_{\triangle EFG} \times d = \frac{1}{3} \times S_{\triangle AFG} \times \frac{1}{2}A_1B_1,$$

$$\therefore d = \frac{S_{\triangle AFG} \cdot A_1B_1}{2S_{\triangle EFG}} = \frac{2\sqrt{2} \times 2\sqrt{2}}{2 \times 2\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

即点 H 到平面 EFG 的距离为 $\frac{2\sqrt{3}}{3}$. (12分)

20. 解: (1) 由题得, $f'(x) = \sin x + x \cos x$,
 $\therefore$ 当 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 时, $f'(x) \geq 0$, 函数 $f(x)$ 在区间 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 上单调递增,
 又 $\because f(0) = -1 < 0, f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi-2}{2} > 0$,
 $\therefore f(0)f\left(\frac{\pi}{2}\right) < 0$,
 $\therefore$ 函数 $f(x)$ 在区间 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 内存在唯一的零点. (5分)

(2) $\because$ 对任意的 $x_1 \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], x_2 \in (1, +\infty)$, 恒有 k
 $-f(x_1) < g(x_2)$,
 $\therefore k - f(x_1)_{\min} < g(x_2)_{\min}$. (6分)

由(1)知, 函数 $f(x)$ 在区间 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 上单调递增,
 $\therefore f(x)_{\min} = f(0) = -1$. (7分)

$$\text{由 } g(x) = \frac{x+x \ln x}{x-1} (x > 1),$$

$$\text{得 } g'(x) = \frac{(2+\ln x)(x-1) - (x+x \ln x)}{(x-1)^2}$$

$$= \frac{x-2-\ln x}{(x-1)^2}.$$

令 $h(x) = x-2-\ln x (x > 1)$, 则 $h'(x) = 1 - \frac{1}{x} > 0$,

$\therefore$ 函数 $h(x)$ 在区间 $(1, +\infty)$ 上单调递增,
 又 $h(3) < 0, h(4) > 0$,

$\therefore \exists x_0 \in (3, 4)$, 使 $h(x_0) = 0$,
 即 $x_0 - 2 = \ln x_0$,

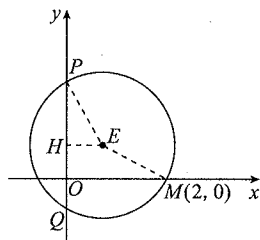
$\therefore$ 函数 $g(x)$ 在区间 $(1, x_0)$ 上单调递减, 在 $(x_0, +\infty)$ 上单调递增,

$$\therefore \text{函数 } g(x) \text{ 的最小值为 } g(x_0) = \frac{x_0 + x_0 \ln x_0}{x_0 - 1}$$

$$= \frac{x_0 + x_0(x_0 - 2)}{x_0 - 1} = x_0 \in (3, 4), \quad (11分)$$

$\therefore k+1 \leq 3$, 即 $k \leq 2$.
 即 k 的最大值为 2. (12分)

21. 解: (1) 设圆心 E 的坐标为 (x, y) ,
 如图, 过圆心 E 作 $EH \perp y$ 轴于点 H , 连接 EP, EM ,



则 H 为 PQ 的中点,
 在 $Rt\triangle PEH$ 中, $|EP|^2 = |PH|^2 + |EH|^2$,
 又 $\because |PH| = 2, |EP| = |EM|$,
 $\therefore (x-2)^2 + y^2 = x^2 + 4$, 化简得 $y^2 = 4x$.
 即圆心 E 的轨迹 C 的方程为 $y^2 = 4x$. (5分)

(2) 设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2) (m \neq 0)$, 直线 $l: x = my + b (m \neq 0)$,

$$\text{联立 } \begin{cases} x = my + b, \\ y^2 = 4x \end{cases} \text{ 消去 } x, \text{ 得 } y^2 - 4my - 4b = 0,$$

$$\therefore \Delta = 16m^2 + 16b > 0, y_1 y_2 = -4b, y_1 + y_2 = 4m.$$
 (6分)

若向量 $\frac{\overrightarrow{DA}}{|\overrightarrow{DA}|} + \frac{\overrightarrow{DB}}{|\overrightarrow{DB}|}$ 与向量 $\overrightarrow{OM}$ 平行,

则 $\angle ADB$ 的平分线与直线 OM 平行,
 即 $\angle ADO = \angle BDO$, 于是得 $k_{DA} = -k_{DB}$,

$$\text{即 } \frac{y_1}{x_1+1} = -\frac{y_2}{x_2+1}, \quad (8 \text{ 分})$$

$$\text{整理得 } y_1 x_2 + y_1 + x_1 y_2 + y_2 = 0,$$

$$\text{即 } y_1(m y_2 + b) + y_1 + (m y_1 + b) y_2 + y_2 = 0,$$

$$\text{整理得 } 2m y_1 y_2 + (b+1)(y_1 + y_2) = 0,$$

$$\text{将 } y_1 y_2 = -4b, y_1 + y_2 = 4m \text{ 代入上式,}$$

$$\text{得 } -8bm + 4(b+1)m = 0, \text{ 即 } b=1. \quad (11 \text{ 分})$$

$$\text{故直线 } l \text{ 的方程为 } x = my + 1, \text{ 恒过焦点 } F(1, 0).$$

(12 分)

$$22. \text{ 解: (1) } \because y = \frac{2\sqrt{3} \tan \varphi}{1 + \tan^2 \varphi} = \frac{\frac{2\sqrt{3} \sin \varphi}{\cos \varphi}}{1 + \frac{\sin^2 \varphi}{\cos^2 \varphi}} = \frac{2\sqrt{3} \sin \varphi \cos \varphi}{1 + \frac{\sin^2 \varphi}{\cos^2 \varphi}}$$

$$= \sqrt{3} \sin 2\varphi,$$

$$\therefore x^2 + \frac{y^2}{3} = \cos^2 2\varphi + \sin^2 2\varphi = 1. \quad (2 \text{ 分})$$

$$\therefore \text{椭圆 } C \text{ 的普通方程为 } x^2 + \frac{y^2}{3} = 1 (x \neq -1).$$

(3 分)

$$\text{由 } \sqrt{2} \rho \cos \left(\theta + \frac{\pi}{4} \right) = 1, \text{ 得 } \rho \cos \theta - \rho \sin \theta - 1 = 0,$$

$$\text{将 } y = \rho \sin \theta, x = \rho \cos \theta \text{ 代入上式,}$$

$$\text{得直线 } l \text{ 的直角坐标方程为 } x - y - 1 = 0. \quad (5 \text{ 分})$$

$$(2) \text{ 设 } P(\cos 2\varphi, \sqrt{3} \sin 2\varphi),$$

$$\text{则点 } P \text{ 到直线 } l \text{ 的距离 } d = \frac{|\cos 2\varphi - \sqrt{3} \sin 2\varphi - 1|}{\sqrt{2}}$$

$$= \frac{\left| 2\cos \left(2\varphi + \frac{\pi}{3} \right) - 1 \right|}{\sqrt{2}} \leq \frac{3}{\sqrt{2}}, \quad (7 \text{ 分})$$

$$\text{当且仅当 } \cos \left(2\varphi + \frac{\pi}{3} \right) = -1 \text{ 时取等号.}$$

$$\text{由直线 } l: x - y - 1 = 0, \text{ 得 } A(1, 0), B(0, -1),$$

$$\therefore |AB| = \sqrt{2},$$

$$\therefore \triangle PAB \text{ 面积的最大值为 } S = \frac{1}{2} \times \sqrt{2} \times \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3}{2}. \quad (10 \text{ 分})$$

$$23. \text{ 解: (1) } \because a + b + c = 1,$$

$$\therefore \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{a+b+c}{a} + \frac{a+b+c}{b} + \frac{a+b+c}{c}$$

$$= 3 + \frac{b}{a} + \frac{c}{a} + \frac{a}{b} + \frac{c}{b} + \frac{a}{c} + \frac{b}{c}$$

$$= 3 + \left(\frac{b}{a} + \frac{a}{b} \right) + \left(\frac{c}{a} + \frac{a}{c} \right) + \left(\frac{c}{b} + \frac{b}{c} \right) \geq$$

$$3 + 2\sqrt{\frac{b}{a} \cdot \frac{a}{b}} + 2\sqrt{\frac{c}{a} \cdot \frac{a}{c}} + 2\sqrt{\frac{b}{c} \cdot \frac{c}{b}} = 9,$$

$$\text{当且仅当 } a = b = c \text{ 时取等号.}$$

$$\text{即 } \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq 9. \quad (5 \text{ 分})$$

$$(2) \text{ 由 (1) 得, } \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq 9,$$

$$\text{两边都乘以 } abc, \text{ 得 } bc + ca + ab \geq 9abc. \text{ ①}$$

$$\text{又 } 2a^2 + 2b^2 + 2c^2 = (a^2 + b^2) + (b^2 + c^2) + (a^2 + c^2) \geq 2ab + 2bc + 2ca, \text{ 当且仅当 } a = b = c \text{ 时取等号,}$$

$$\text{即 } a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca. \text{ ②}$$

$$\text{由 ①②, 得 } a^2 + b^2 + c^2 \geq 9abc. \quad (10 \text{ 分})$$