



参考答案及解析

理数(二)

一、选择题

1. B 【解析】 $z = \frac{i}{1-i} = \frac{i(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{-1+i}{2}$, 复数 z

在复平面内对应的点 $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ 位于第二象限. 故

选 B.

2. C 【解析】 $A = \{x | 1 < 2^x < 16\} = \{x | 0 < x < 4\}$, $A \cup$

$B = B$, 则 $\begin{cases} a \leq 0, \\ a+6 \geq 4, \end{cases}$ 解得 $-2 \leq a \leq 0$, 符合条件的 a 的

取值集合为 $\{a | -2 \leq a \leq 0\}$. 故选 C.

3. A 【解析】 $x=0$ 或 $x=1$ 时, 甲组数据中位数为 81;
 $x \geq 2$ 时, 甲组数据中位数为 82; 当 $y=0$ 时, 乙组数据
 中位数为 81, $y=1$ 时, 乙组数据中位数为 81.5; $y=2$
 时, 乙组数据中位数为 82; $y \geq 3$ 时, 乙组数据中位数
 大于 82, 不合题意. 所以 $x=0, y=0$ 时, $x+y$ 有最小
 值为 0. 故选 A.

4. D 【解析】 设 $P(x, y), A(-a, 0), B(a, 0)$, 由已知,

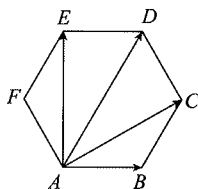
$$\text{得 } \frac{y}{x-a} \cdot \frac{y}{x+a} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{y^2}{x^2-a^2} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{b^2(\frac{x^2}{a^2}-1)}{x^2-a^2} =$$

$$\frac{1}{3} \Rightarrow \frac{b^2}{a^2} = \frac{1}{3}. \text{ 顶点 } B(a, 0) \text{ 到直线 } bx-ay=0 \text{ 的距离}$$

$$d = \frac{|ab|}{\sqrt{a^2+b^2}} = \sqrt{\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}} = \frac{\sqrt{3}b}{2}. \text{ 故选 D.}$$

5. A 【解析】 $p = \frac{\pi \times (10^2 - 5^2)}{\pi \times 15^2} = \frac{1}{3}$. 故选 A.

6. C 【解析】 $\vec{AE} = \vec{AD} + \vec{DE} = 2\vec{BC} + \vec{DE} = 2(b-a) -$
 $a = 2b - 3a$. 故选 C.



7. A 【解析】 $S = f(\frac{1}{2020}) + f(\frac{2}{2020}) + \dots +$

$f(\frac{2019}{2020})$, 因为 $f(\frac{1}{2020}) + f(\frac{2019}{2020}) = 1, f(\frac{2}{2020})$

$+ f(\frac{2018}{2020}) = 1, \dots, f(\frac{2019}{2020}) + f(\frac{1}{2020}) = 1$, 所以 S

$= \frac{2019}{2}$. 故选 A.

8. C 【解析】 ① 设 $f(x) = x - \sin x, f'(x) = 1 - \cos x \geq$

$0. f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调递增, $f(0) = 0, x \in (0,$

$+\infty)$ 时, $f(x) > 0$, 即 $x > \sin x$. 命题 p 为真命题. ②

角 B 为钝角时, $\sin A > \cos B, \triangle ABC$ 不是锐角三角

形; 若 $\triangle ABC$ 为锐角三角形, $A+B > \frac{\pi}{2} \Rightarrow A > \frac{\pi}{2} - B$

$\Rightarrow \sin A > \cos B$, 所以 $\sin A > \cos B$ 是 $\triangle ABC$ 为锐角

三角形的必要不充分条件, 命题 q 为真命题. 因为命

题 p 为真命题, 命题 q 为真命题, 所以 $\neg p, \neg q$ 为假

命题. $(\neg p) \vee (\neg q)$ 为假命题, A 错; $(\neg p) \vee q$ 为真

命题, B 错; $p \vee (\neg q)$ 为真命题, D 错; $p \wedge q$ 为真命

题, C 对. 故选 C.

9. C 【解析】 由图象及已知得 $A=1, \frac{1}{4} \cdot \frac{2\pi}{\omega} = \frac{11\pi}{12} -$

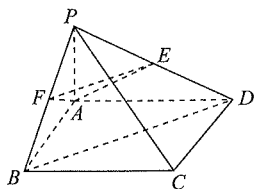
$\frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \omega = 2, 2 \times \frac{2\pi}{3} + \varphi = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$, 即 $\varphi =$

$\frac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}. \because |\varphi| < \frac{\pi}{2}, \therefore \varphi = \frac{\pi}{6}, \therefore f(x) =$

$$\sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right), x \in \left[-\pi, -\frac{2\pi}{3}\right] \text{ 时, } 2x + \frac{\pi}{6} \in$$

$$\left[-\frac{11\pi}{6}, -\frac{7\pi}{6}\right], \therefore f(x)_{\max} = 1. \text{ 故选 C.}$$

10. D 【解析】取 PB 中点为 F , 连接 AF, EF ,



$\because E$ 为 PD 的中点, $\therefore FE \parallel BD, \therefore \angle AEF$ (或补角) 为异面直线 AE 与 BD 所成的角. 由已知, 得 $AE =$

$$\frac{1}{2}PD = \sqrt{5}, AF = \frac{1}{2}PB = \frac{\sqrt{13}}{2}, EF = \frac{1}{2}BD = \frac{5}{2},$$

$$\cos \angle AEF = \frac{AE^2 + EF^2 - AF^2}{2AE \cdot EF} = \frac{8\sqrt{5}}{25}. \text{ 即 } AE \text{ 与 } BD$$

所成角的余弦值为 $\frac{8\sqrt{5}}{25}$. 故选 D.

11. A 【解析】 $\overrightarrow{OM}$ 在 $\overrightarrow{OF}$ 方向上的投影为 1, 所以 $|\overrightarrow{OM}|$

$$\cos \langle \overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OF} \rangle = 1, |2\overrightarrow{OF} + \overrightarrow{MO}| = |\overrightarrow{OM}| \Rightarrow |2\overrightarrow{OF} - \overrightarrow{OM}| = |\overrightarrow{OM}| \Rightarrow 4\overrightarrow{OF}^2 - 4\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{OF} = 0 \Rightarrow \overrightarrow{OF}^2 =$$

$$|\overrightarrow{OM}| |\overrightarrow{OF}| \cdot \cos \langle \overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OF} \rangle = |\overrightarrow{OF}| \Rightarrow |\overrightarrow{OF}| = 1, \text{ 所以 } p = 2, \text{ 抛物线 } T: y^2 = 4x. \text{ 过点 } (2, 0) \text{ 的直线交抛}$$

物线 T 于 A, B 两点, 当斜率不存在时, 直线为 $x =$

$$2. x = 2 \text{ 时, } y = \pm 2\sqrt{2}. \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = (2, 2\sqrt{2}) \cdot (2,$$

$$-2\sqrt{2}) = -4. \text{ 当斜率存在时, 设直线为 } y = k(x -$$

$$2), A(x_1, y_1), B(x_2, y_2). \text{ 联立 } \begin{cases} y = k(x - 2), \\ y^2 = 4x, \end{cases} \text{ 得}$$

$$k^2 x^2 - (4k^2 + 4)x + 4k^2 = 0. \text{ 所以 } x_1 + x_2 = \frac{4k^2 + 4}{k^2},$$

$$x_1 x_2 = 4. y_1^2 \cdot y_2^2 = 16x_1 x_2 = 64, \text{ 所以 } y_1 y_2 = -8, \text{ 所}$$

$$\text{以 } \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = x_1 x_2 + y_1 y_2 = -4. \text{ 综上, } \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} =$$

$$-4. \text{ 故选 A.}$$

12. D 【解析】由题意 $f(x) = -f(x+3) = f(x+6)$,

所以周期为 6, 当 $x \in [-4.5, -1.5]$ 时, $f(x) =$

$$-f(x+3) = x+3, \text{ 所以 } x \in [-4.5+6k, -1.5+6k], k \in \mathbb{Z}, f(x) \text{ 单调递增, } x \in [-1.5+6k, 1.5+6k], k \in \mathbb{Z}, f(x) \text{ 单调递减. } k=3, x \in (16.5, 19.5)$$

时, $f(x)$ 单调递减, 即 A 错; $k=4, x \in (19.5, 22.5)$

时, $f(x)$ 单调递减, 即 B 错; $x \in (4.5, 7.5)$ 时, $x-6$

$\in (-1.5, 1.5), f(x) = -(x-6) = -x+6$, 即 C

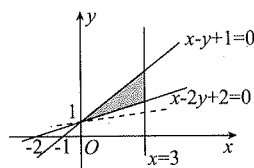
错; $x \in (7.5, 10.5)$ 时, $x-9 \in (-1.5, 1.5), f(x-9) = -(x-9), f(x) = f(x-12) = -f(x-12+3)$

$$= -f(x-9), \text{ 所以 } f(x) = x-9. \text{ 即 D 正确. 故选 D.}$$

二、填空题

13. 3 【解析】不等式组 $\begin{cases} y-x \leq 1, \\ 2y-x \geq 2, \\ x \leq 3 \end{cases}$ 表示的平面区域如

图所示:



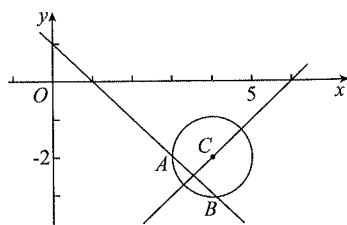
由 $z = 3y - x$, 得 $y = \frac{1}{3}x + \frac{1}{3} \cdot z$, 当点 (x, y) 位于

$(0, 1)$ 时, 函数 $z = 3y - x$ 有最小值 3.

14. $\sqrt{2}$ 【解析】直线 $y = x - 6$ 过圆 C 的圆心 $(4, -2)$,

由题意, 直线 l 斜率为 -1 , 直线 l 为 $x + y - 1 = 0$.

$$|AB| = 2\sqrt{1 - \frac{|4-2-1|^2}{2}} = \sqrt{2}.$$



- 15.432 【解析】(1)甲乙乘坐②号车厢,丙丁乘坐③号车厢,有 $A_2^2 A_1^2 A_3^3 = 144$ 种乘坐方式;(2)同理,丙丁乘坐②号车厢,甲乙乘坐③号车厢,有 144 种乘坐方式;(3)甲乙丙丁都乘坐③号车厢,有 $A_3^4 A_3^3 = 144$ 种乘坐方式. 所以不同的乘坐方式共有 432 种.

16. $\left[-\frac{3\sqrt{3}}{4}, 0\right) \cup \left(0, \frac{3\sqrt{3}}{4}\right]$ 【解析】 $f(x) = \frac{\sin x + 1}{\sin x \cdot \tan x + \cos x}$, 化简得 $f(x) = \sin x \cos x + \cos x \left(x \neq \frac{\pi}{2}\right)$. $f'(x) = \cos^2 x - \sin^2 x - \sin x = 1 - 2\sin^2 x - \sin x = -2\left(\sin x + \frac{1}{2}\right)\left(\sin x - \frac{1}{2}\right)$, $x \in \left[0, \frac{\pi}{6}\right)$ 及 $\left(\frac{5\pi}{6}, \pi\right]$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增; $x \in \left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right)$ 及 $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}\right)$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调递减. 所以 $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ 时, $f(x)$ 极大值 = $f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{4}$, $f(x)$ 极小值 = $f\left(\frac{5\pi}{6}\right) = -\frac{3\sqrt{3}}{4}$, 又 $f(0) = 1$, $f(\pi) = -1$, 所以 $f(x)$ 的值域为 $\left[-\frac{3\sqrt{3}}{4}, 0\right) \cup \left(0, \frac{3\sqrt{3}}{4}\right]$.

三、解答题

17. 解: (1) ①若 $q=1$, $S_4 + S_7 = 11a_1$, $2S_{10} = 20a_1$, $S_4 + S_7 \neq 2S_{10}$, 所以 $q=1$ 不合题意;

$$\textcircled{2} q \neq 1 \text{ 时, } S_4 + S_7 = 2S_{10} \Rightarrow \frac{a_1(1-q^4)}{1-q} + \frac{a_1(1-q^7)}{1-q} = \frac{2a_1(1-q^{10})}{1-q}$$

$$\Rightarrow q^4 + q^7 = 2q^{10} \Rightarrow 1 + q^3 = 2q^6,$$

$$\text{所以 } a_5 + a_2 - 2a_8 = a_2(q^3 + 1 - 2q^6) = 0,$$

即 a_5, a_8, a_2 成等差数列.

(5 分)

$$(2) \text{ 由 (1) 知 } 1 + q^3 = 2q^6, \text{ 解得 } q = \left(-\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}},$$

$$a_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^{\frac{n-1}{3}},$$

$$|a_{3n-2}| = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1},$$

$$\text{所以 } b_n = n-1,$$

(8 分)

$$\frac{1}{(b_n+1)(b_n+2)} = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1},$$

$$T_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} =$$

$$1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}.$$

(12 分)

18. 解: (1) 连接 AC , 由题意, $EC \perp EB$, $EC \perp EA$,

所以 $\angle BEA$ 为二面角 $A-EC-B$ 的平面角,

$$\text{所以 } \angle BEA = \frac{\pi}{4},$$

$$\text{又 } AE = CD = 2, BE = 2\sqrt{2},$$

$$\text{可得 } AB = 2, \text{ 所以 } AB \perp AE.$$

(2 分)

$$\text{又 } EC \perp EB, EC \perp EA,$$

$$\text{所以 } EC \perp \text{平面 } EAB,$$

$$\text{所以 } EC \perp AB,$$

$$\text{所以 } AB \perp \text{平面 } AECD, \text{ 所以 } AB \perp EM. \quad \textcircled{1}$$

$$\vec{EM} \cdot \vec{AC} = (\vec{EA} + \vec{AM}) \cdot (\vec{AE} + \vec{EC}) = -4 + 4 = 0,$$

$$\text{所以 } EM \perp AC. \quad \textcircled{2}$$

$$\text{由 } \textcircled{1}\textcircled{2} \text{ 可知, } EM \perp \text{平面 } BAC,$$

$$\text{又因为 } BC \subset \text{平面 } BAC,$$

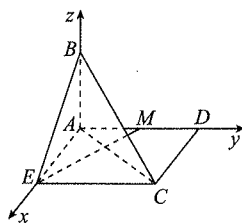
$$\text{所以 } EM \perp BC.$$

(6 分)

$$(2) \text{ 由 (1) 及已知, 得 } AB, AD, AE \text{ 两两垂直,}$$

以 A 为原点建立如图所示的空间直角坐标系

$Axyz$.



$$E(2,0,0), B(0,0,2), C(2,2\sqrt{2},0), M(0,\sqrt{2},0),$$

$$\text{所以 } \overrightarrow{EM} = (-2, \sqrt{2}, 0), \overrightarrow{EB} = (-2, 0, 2), \overrightarrow{EC} = (0, 2\sqrt{2}, 0),$$

设 $m = (x, y, z)$ 为平面 BCE 的一个法向量,

$$\begin{cases} m \cdot \overrightarrow{EB} = -2x + 2z = 0, \\ m \cdot \overrightarrow{EC} = 2\sqrt{2}y = 0, \end{cases}$$

$$\text{取 } x=1, \text{ 得 } m = (1, 0, 1). \quad (10 \text{ 分})$$

$$|\cos \langle m, \overrightarrow{EM} \rangle| = \frac{|m \cdot \overrightarrow{EM}|}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{6}} = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

所以 ME 与平面 BCE 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

(12 分)

$$19. \text{ 解: (1) 在 } \triangle ADC \text{ 中, } |\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{AD}| = 4$$

$$\Rightarrow \angle C = \angle D,$$

$$\overrightarrow{DB} = \lambda \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AE} = \lambda \overrightarrow{EC}, \lambda \neq 0,$$

则 $BE \parallel AD$,

$$\therefore \angle EBC = \angle D = \angle C,$$

$$\therefore |EB| = |EC|,$$

$$\therefore |EA| + |EB| = |EA| + |EC| = 4 (\text{定值}) > 2,$$

(4 分)

$\therefore$ 点 E 在以 A, B 为焦点, 4 为长轴长的椭圆上.

$$\text{故轨迹 } T \text{ 的方程为 } \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1. \quad (6 \text{ 分})$$

$$(2) \text{ 设 } M(x_1, y_1), N(x_2, y_2).$$

$$\text{由 } \begin{cases} y = k(x-1), \\ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1, \end{cases}$$

$$\text{得 } (4k^2 + 3)x^2 - 8k^2x + 4k^2 - 12 = 0.$$

$$\Delta > 0 \Rightarrow k \in \mathbf{R}, \text{ 且 } k \neq 0,$$

$$\text{则 } x_1 + x_2 = \frac{8k^2}{4k^2 + 3}, x_1x_2 = \frac{4k^2 - 12}{4k^2 + 3}. \quad (8 \text{ 分})$$

$$\text{所以 } |MN| = \sqrt{1+k^2} |x_1 - x_2| = \frac{12(k^2+1)}{4k^2+3}.$$

$$\text{将 } k \text{ 用 } -\frac{1}{k} \text{ 代换, 得 } |PQ| = \frac{12(k^2+1)}{3k^2+4},$$

$$\text{故 } \frac{1}{|MN|} + \frac{1}{|PQ|} = \frac{4k^2+3}{12(k^2+1)} + \frac{3k^2+4}{12(k^2+1)} = \frac{7}{12} (\text{定值}). \quad (12 \text{ 分})$$

$$20. \text{ 解: (1) 定义域为 } \{x | x > 0\}, f'(x) = ax + 2 - a - \frac{2}{x}$$

$$= \frac{a\left(x + \frac{2}{a}\right)(x-1)}{x}.$$

$$\because a < 0, \therefore f'(x) = 0 \Rightarrow x = 1 \text{ 或 } x = -\frac{2}{a}. \quad (2 \text{ 分})$$

$$\textcircled{1} a = -2 \text{ 时, } f'(x) = \frac{-2(x-1)^2}{x} \leq 0, f(x) \text{ 在 } (0, +\infty) \text{ 上单调递减;}$$

$$\textcircled{2} a < -2 \text{ 时, } 0 < -\frac{2}{a} < 1,$$

$$\text{当 } x \in \left(-\frac{2}{a}, 1\right) \text{ 时, } f'(x) > 0, f(x) \text{ 单调递增;}$$

$$\textcircled{3} -2 < a < 0 \text{ 时, } -\frac{2}{a} > 1,$$

$$\text{当 } x \in \left(1, -\frac{2}{a}\right) \text{ 时, } f'(x) > 0, f(x) \text{ 单调递增.}$$

综上, 当 $a = -2$ 时, 无单调递增区间;

$$\text{当 } a < -2 \text{ 时, 单调递增区间是 } \left(-\frac{2}{a}, 1\right),$$

$$\text{当 } -2 < a < 0 \text{ 时, 单调递增区间是 } \left(1, -\frac{2}{a}\right). \quad (6 \text{ 分})$$

$$(2) x \in [1, +\infty) \text{ 时, } h(x) \geq 2f(x) \text{ 恒成立} \Leftrightarrow ax^2 + 4x - 2\ln x - ax - 4 \leq 0 (x \geq 1).$$

$$\text{令 } g(x) = ax^2 + 4x - 2\ln x - ax - 4, \text{ 其中 } g(1) = a + 4 - a - 4 = 0,$$

$$g'(x) = 2ax + (4-a) - \frac{2}{x} = \frac{2ax^2 + (4-a)x - 2}{x}$$

$$= \frac{(2x-1)(ax+2)}{x}. \quad (8 \text{ 分})$$

① $a \leq -2$ 时, 因为 $x \geq 1, 2x-1 > 0$,

所以 $ax+2 \leq 0, g'(x) \leq 0, g(x)$ 单调递减.

又 $g(1)=0$,

所以 $g(x) \leq 0$. 即 $h(x) \geq 2f(x)$ 恒成立, $a \leq -2$ 符合题意.

② $-2 < a < 0$ 时,

可得 $g(x)$ 在 $\left[1, -\frac{2}{a}\right)$ 上单调递增, 在 $\left(-\frac{2}{a}, +\infty\right)$ 上单调递减,

所以 $g\left(-\frac{2}{a}\right) > g(1)=0$, 不等式不恒成立, 不满足条件.

③ $a \geq 0$ 时, $g'(x) > 0$ 在 $[1, +\infty)$ 上恒成立,

此时 $g(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 上单调递增, $g(x) \geq g(1)=0$,

不合题意.

综上所述, 可得 a 的取值范围是 $(-\infty, -2]$.

(12 分)

21. 解: (1) 列联表如下:

	“樱桃种植能手”	非“樱桃种植能手”	合计
男果农	8	42	50
女果农	2	48	50
合计	10	90	100

(2 分)

$$k = \frac{100 \times (2 \times 42 - 8 \times 48)^2}{50 \times 50 \times 10 \times 90} = 4 > 3.841,$$

所以有 95% 的把握认为“樱桃种植能手”与性别有关, 所以就挑选出的“一等品”来看, 男果农有优势.

(5 分)

(2) 当果农每 100 斤樱桃中, 能挑选出“一等品”的数量为 12 斤时, 每亩收益

$$= \frac{2000}{100} \times 12 \times 25 + \left(2000 - \frac{2000}{100} \times 12\right) \times 12.5 = 28000,$$

$$\frac{2000}{100} \times 12 \times 25 + \left(2000 - \frac{2000}{100} \times 12\right) \times 12.5 = 28000,$$

则每亩收益大于 28000 元的人数, 就是每 100 斤樱桃中, 能挑选出“一等品”的重量大于 12 斤的人数,

(7 分)

女果农每 100 斤樱桃中, 能挑选出“一等品”的重量大于 12 斤的概率为 $\frac{20}{50} = \frac{2}{5}$,

$$\frac{20}{50} = \frac{2}{5},$$

男果农每 100 斤樱桃中, 能挑选出“一等品”的重量大于 12 斤的概率为 $\frac{25}{50} = \frac{1}{2}$,

$$\frac{25}{50} = \frac{1}{2},$$

设 1 名女果农每 100 斤樱桃中, 能挑选出“一等品”的重量大于 12 斤的人数为 Y , 2 名男果农每 100 斤樱桃中, 能挑选出“一等品”的重量大于 12 斤的人数为 Z ,

$$Y \sim B\left(1, \frac{2}{5}\right), Z \sim B\left(2, \frac{1}{2}\right), \quad (9 \text{ 分})$$

X 的所有可能取值为 0, 1, 2, 3,

$$P(X=0) = P(Y=0, Z=0) = \left(1 - \frac{2}{5}\right) \times \left(1 - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{20},$$

$$P(X=1) = P(Y=1, Z=0) + P(Y=0, Z=1)$$

$$= \frac{2}{5} \times \left(1 - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{5} \times \frac{1}{2} \times \left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{2}{5},$$

$$P(X=2) = P(Y=1, Z=1) + P(Y=0, Z=2)$$

$$= \frac{2}{5} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{3}{5} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{7}{20},$$

$$P(X=3) = P(Y=1, Z=2) = \frac{2}{5} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{10}.$$

所以 X 的分布列为:

X	0	1	2	3
P	$\frac{3}{20}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{7}{20}$	$\frac{1}{10}$

$$E(X) = 0 \times \frac{3}{20} + 1 \times \frac{2}{5} + 2 \times \frac{7}{20} + 3 \times \frac{1}{10} = \frac{7}{5}.$$

(12分)

22. 解: (1) 由直线 l 的参数方程
$$\begin{cases} x = -2 + \frac{\sqrt{3}}{2}t, \\ y = \frac{1}{2}t \end{cases}$$
 消去 t ,

得直线 l 的普通方程为 $x - \sqrt{3}y + 2 = 0$.

将 $\rho^2 = x^2 + y^2$, $\rho \cos \theta = x$ 代入曲线 C 的极坐标方程

$$\rho^2 - 2\rho \cos \theta - 2 = 0 \text{ 中,}$$

得曲线 C 的直角坐标方程为 $(x-1)^2 + y^2 = 3$.

(5分)

(2) 将
$$\begin{cases} x = -2 + \frac{\sqrt{3}}{2}t, \\ y = \frac{1}{2}t \end{cases}$$
 代入 $(x-1)^2 + y^2 = 3$,

$$\text{得 } t^2 - 3\sqrt{3}t + 6 = 0, \Delta > 0.$$

设点 A, B 对应的参数分别为 t_1, t_2 ,

$$\text{则 } t_1 + t_2 = 3\sqrt{3}, t_1 t_2 = 6,$$

$$\text{所以 } |AB| + |MA| \cdot |MB| = |t_1 - t_2| + t_1 t_2$$

$$= \sqrt{(t_1 + t_2)^2 - 4t_1 t_2} + t_1 t_2 = \sqrt{(3\sqrt{3})^2 - 4 \times 6} + 6$$

$$= 6 + \sqrt{3}.$$

(10分)

23. 解: (1) 由 $f(x) < 5$, 得 $2|x-3| + |x-4| < 5$,

$$\text{则 } \begin{cases} x \geq 4, \\ 2x-6+x-4 < 5 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} 3 < x < 4, \\ 2x-6-x+4 < 5 \end{cases}$$

$$\text{或 } \begin{cases} x \leq 3, \\ -2x+6-x+4 < 5, \end{cases}$$

$$\text{解得 } 4 \leq x < 5 \text{ 或 } 3 < x < 4 \text{ 或 } \frac{5}{3} < x \leq 3.$$

$$\text{所以原不等式的解集为 } \left\{ x \mid \frac{5}{3} < x < 5 \right\}. \quad (5 \text{ 分})$$

$$(2) \text{ 由 } f(x) = 2|x-3| + |x-4| =$$

$$\begin{cases} 3x-10, & x \geq 4, \\ x-2, & 3 < x < 4, \text{ 易得 } f(x) \geq 1. \\ 10-3x, & x \leq 3, \end{cases}$$

若对于任意的 x , 不等式 $f(x) \geq a^2 - a - 1$ 恒成立,

$$\text{则 } f(x)_{\min} = 1 \geq a^2 - a - 1,$$

$$\text{解得 } -1 \leq a \leq 2.$$

$$\text{所以实数 } a \text{ 的取值范围为 } [-1, 2]. \quad (10 \text{ 分})$$