



参考答案及解析

文数(二)

一、选择题

1. A 【解析】由题得, $\bar{z}=2-i$, 所以 $\frac{\bar{z}}{z}=\frac{2-i}{2+i}=\frac{(2-i)^2}{(2+i)(2-i)}=\frac{3-4i}{5}=\frac{3}{5}-\frac{4}{5}i$. 故选 A.

2. B 【解析】由题得, $B=(-1, +\infty)$, 所以 $A \cap B=(-1, 1]$. 故选 B.

3. C 【解析】由图可知, 该日采用手机支付的青年人的
人数约为 $55\% \times 1250 = 687.5 \approx 688$. 故选 C.

4. D 【解析】设 $P(x_0, y_0)$, 由 $\triangle MPF$ 的面积为 10, 得
 $x_0 = \pm 4$, 由 $|PF|=5$, 得 $y_0 = 5 - \frac{p}{2}$, 故 $16 =$
 $2p(5 - \frac{p}{2})$, 解得 $p=2$ 或 $p=8$. 故选 D.

5. A 【解析】设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d , $\because a_2 + a_8 =$
 $2a_5 = 4a_4$, $\therefore 1 + 4d = 2(1 + 3d)$, 解得 $d = -\frac{1}{2}$, $\therefore S_8$
 $= 8 \times 1 + \frac{8 \times 7}{2} \times (-\frac{1}{2}) = -6$. 故选 A.

6. D 【解析】从“富强”、“和谐”、“平等”、“法治”、“诚
信”这 5 个词语中任选 3 个的所有情况有: (富强, 和
谐, 平等), (富强, 和谐, 法治), (富强, 和谐, 诚信),
(富强, 平等, 法治), (富强, 平等, 诚信), (富强, 法治,
诚信), (和谐, 平等, 法治), (和谐, 平等, 诚信), (和
谐, 法治, 诚信), (平等, 法治, 诚信), 共 10 种, 其中不
包含“平等”、“法治”的有: (富强, 和谐, 诚信), 共 1
种, 故所求概率为 $P = 1 - \frac{1}{10} = \frac{9}{10}$. 故选 D.

7. C 【解析】由程序框图, 得 $S = 0 + \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} +$
 $\frac{1}{3 \times 4} + \frac{1}{4 \times 5} + \dots + \frac{1}{19 \times 20} = (1 - \frac{1}{2}) + (\frac{1}{2} - \frac{1}{3})$
 $+ \dots + (\frac{1}{19} - \frac{1}{20}) = 1 - \frac{1}{20} = \frac{19}{20}$. 故选 C.

8. D 【解析】 $\because 0 \leq |\cos x| \leq 1$, $\therefore \lg |\cos x_0| \leq 0$, $\therefore$ 命
题 p 为假命题; $\because$ 幂函数 $y = x^{\frac{1}{3}}$ 是 $\mathbf{R}$ 上的增函数,
 $\therefore$ 命题 q 为真命题, $\therefore p \wedge q$ 为假命题, $p \vee (\neg q)$ 为假
命题, $(\neg p) \wedge (\neg q)$ 为假命题, $p \vee q$ 真命题. 故选 D.

9. B 【解析】将 $f(x) = \tan(\omega x - \frac{\pi}{6})$ ($0 < \omega < 5$) 的图
象向左平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位后得到 $y = \tan(\omega x + \frac{\omega\pi}{3} - \frac{\pi}{6})$,

所以 $\omega x + \frac{\omega\pi}{3} - \frac{\pi}{6} = \omega x - \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$, 解得 $\omega = 3k$,

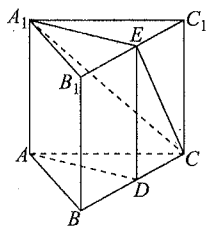
$k \in \mathbf{Z}$, 又 $0 < \omega < 5$, 所以 $\omega = 3$. 故选 B.

10. B 【解析】取 B_1C_1 的中点 E , 连接 A_1E, DE, CE ,
 $\therefore A_1E \parallel AD$, $\therefore$ 异面直线 AD 与 A_1C 所成的角是
 $\angle EA_1C$ (或其补角). 易得 $A_1E \perp$ 平面 BCC_1B_1 ,

$\therefore A_1E \perp EC$. 在 $\text{Rt}\triangle A_1EC$ 中, $A_1E = \frac{1}{2}B_1C_1 = \frac{1}{2}$

$\times 2 = 1, CE = \sqrt{3}, \tan \angle EA_1C = \frac{CE}{A_1E} = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$,

$\therefore \angle EA_1C = \frac{\pi}{3}$. 故选 B.

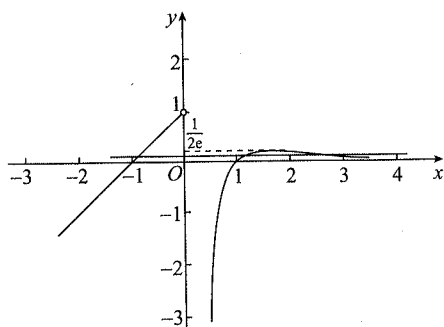


11. C 【解析】设 $|AB| = 4x$, 又 $\overrightarrow{AF_2} = 3\overrightarrow{F_2B}$, 则 $|BF_2|$
 $= x, |AF_2| = 3x, \therefore |AF_1| = 5x. \because |AF_1| - |AF_2|$
 $= 2a$, 又 $|AF_1| - |AF_2| = \frac{1}{2}|AB|, \therefore x = a, \therefore |AB|$
 $= 4a, |BF_1| = 3a, \therefore$ 满足 $|BF_1|^2 + |AB|^2 = |AF_1|^2$,
则 $\angle F_1BA = 90^\circ$, 则 $|BF_1|^2 + |BF_2|^2 = |F_1F_2|^2$, 即
 $9a^2 + a^2 = 4c^2$, 即 $10a^2 = 4c^2$, 得 $e = \sqrt{\frac{c^2}{a^2}} = \frac{\sqrt{10}}{2}$. 故
选 C.

12. B 【解析】①当 $x=0$ 时, $g(0) = f(0) - 0 = 0, \therefore x$
 $= 0$ 为 $g(x)$ 的 1 个零点; ②当 $x \neq 0$ 时, 由题得, $a =$
 $\begin{cases} x+1, & x < 0, \\ \frac{\ln x}{x^2}, & x > 0, \end{cases}$ 即 $y=a$ 与 $y = \begin{cases} x+1, & x < 0, \\ \frac{\ln x}{x^2}, & x > 0 \end{cases}$ 的图象有
3 个交点且交点的横坐标都不为 0. 可设 $h(x) =$
 $\frac{\ln x}{x^2}, x > 0$, 则 $h'(x) = \frac{1-2\ln x}{x^3}$, 令 $h'(x) =$

$\frac{1-2\ln x}{x^3}=0$, 解得 $x=e^{\frac{1}{2}}$, 则函数 $h(x)$ 在 $(0, e^{\frac{1}{2}})$ 上单调递增, 在 $(e^{\frac{1}{2}}, +\infty)$ 上单调递减, 且 $x>1$ 时,

$h(x)>0$. $\therefore y=\begin{cases} x+1, & x<0, \\ \frac{\ln x}{x^2}, & x>0 \end{cases}$ 的大致图象如图所示:



$\therefore h(e^{\frac{1}{2}}) = \frac{1}{2e}$, 又 $y=a$ 与 $y=\begin{cases} x+1, & x<0, \\ \frac{\ln x}{x^2}, & x>0 \end{cases}$ 的图象有

3 个交点且交点的横坐标不为 0, 则必有 $0 < a < \frac{1}{2e}$.

故选 B.

二、填空题

13. -7 【解析】由题得, a 在 b 方向上的投影为 $\frac{a \cdot b}{|b|} =$

$$\frac{1 \times 1 + x \times 1}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = -3\sqrt{2}, \text{ 解得 } x = -7.$$

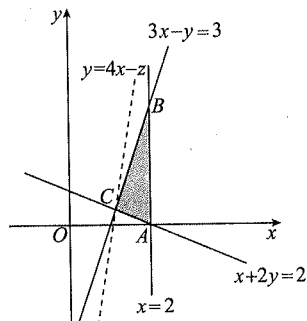
14. $\frac{29}{7}$ 【解析】不等式组 $\begin{cases} 3x-y \geq 3, \\ x+2y \geq 2, \\ x \leq 2 \end{cases}$ 表示的平面区域

如图所示的阴影部分, 是一个以 $A(2,0), B(2,3),$

$C(\frac{8}{7}, \frac{3}{7})$ 为顶点的三角形, 当直线 $y=4x-z$ 经过

点 $C(\frac{8}{7}, \frac{3}{7})$ 时, 直线 $y=4x-z$ 在 y 轴上截距最大,

则目标函数 z 取得最小值 $z_{\min} = 4 \times \frac{8}{7} - \frac{3}{7} = \frac{29}{7}$.



15. $[\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3})$ 【解析】由题得, $f(x) = \sqrt{3} \sin x \cos x -$

$$\cos^2 x + \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 2x - \frac{1+\cos 2x}{2} + \frac{1}{2} = \sin(2x -$$

$$\frac{\pi}{6}). \therefore x \in (\frac{\pi}{6}, \frac{2\pi}{3}), \therefore 2x - \frac{\pi}{6} \in (\frac{\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}), \therefore \text{当}$$

$$2x - \frac{\pi}{6} \in [\frac{\pi}{2}, \frac{7\pi}{6}) \text{ 时, 即 } x \in [\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}) \text{ 时, } f(x) \text{ 单}$$

$$\text{调递减, } \therefore f(x) \text{ 的单调递减区间为 } [\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}).$$

注: 写成 $(\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3})$ 也给分.

16. 5 【解析】 $\because 2a_{n+1} = a_n + 1, \therefore a_{n+1} - 1 = \frac{1}{2}(a_n -$

$1)$, 又 $a_1 - 1 = 1, \therefore$ 数列 $\{a_n - 1\}$ 是首项为 1, 公比为

$\frac{1}{2}$ 的等比数列. $\therefore a_n - 1 = (\frac{1}{2})^{n-1}, \therefore a_n = 1 +$

$$(\frac{1}{2})^{n-1}, \therefore S_n = \frac{1 - \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}} + n = n - 2^{1-n} + 2, \therefore n -$$

$$2^{1-n} + 2 \geq n + \frac{31}{16}, \text{ 解得 } n \geq 5, \text{ 故 } n \text{ 的最小值为 } 5.$$

三、解答题

17. 解: (1) 由所给数据计算, 得 $\bar{x} = \frac{1}{4} \times (1+2+4+5) =$

$$3, \bar{y} = \frac{1}{4} \times (5+15+25+35) = 20,$$

$$\sum_{i=1}^4 (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = (1-3) \times (5-20) + (2-3) \times (15-20) + (4-3) \times (25-20) + (5-3) \times (35-20) = 70,$$

$$\sum_{i=1}^4 (x_i - \bar{x})^2 = (1-3)^2 + (2-3)^2 + (4-3)^2 + (5-3)^2 = 10,$$

$$\text{所以 } \hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^4 (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^4 (x_i - \bar{x})^2} = \frac{70}{10} = 7, \hat{a} = \bar{y} - \hat{b}\bar{x}$$

$$= -1,$$

故 y 关于 x 的线性回归方程是 $\hat{y} = 7x - 1$. (8 分)

(2) 令 $x=10$, 得 $\hat{y} = 7 \times 10 - 1 = 69$,

故预测该同学坚持 10 周后能完成 69 个“俯卧撑”.

(12 分)

18. 解: (1) 由 $a \sin 2B \sin C = c \sin A \cos B$ 及正弦定理, 可得 $2 \sin B \cos B = \cos B$.

$\because b < a, \therefore B$ 为锐角,

$$\therefore \sin B = \frac{1}{2}, \therefore B = \frac{\pi}{6}. \quad (6 \text{ 分})$$

(2) $\because \triangle ABC$ 的面积为 $2\sqrt{3}$,

$$\therefore \frac{1}{2}ac \sin B = 2\sqrt{3},$$

$$\therefore ac = 8\sqrt{3}.$$

由余弦定理, 得 $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$,

$$\text{即 } 4 = a^2 + c^2 - 2ac \times \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\therefore 4 = (a+c)^2 - 24 - 16\sqrt{3},$$

$$\therefore (a+c)^2 = 28 + 16\sqrt{3} = (4+2\sqrt{3})^2,$$

$$\therefore a+c = 4+2\sqrt{3}. \quad (12 \text{ 分})$$

19. 解: (1) $\because$ 在图 1 中, B, C 分别是 PA, PD 的中点,

$\therefore BC \parallel AD$,

又 $\because \angle PAD = 90^\circ, \therefore AD \perp AP$,

$\therefore$ 在图 2 中, $BC \perp BA, BC \perp BP$,

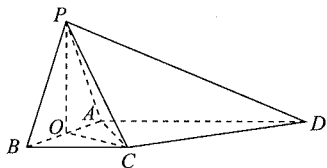
又 $BA \cap BP = B$,

$\therefore BC \perp$ 平面 PAB ,

$\therefore AD \perp$ 平面 PAB ,

又 $PAC \subset$ 平面 PAB ,

$\therefore PA \perp AD$. (6 分)



(2) 在图 2 中, 取 AB 的中点 O , 连接 PO ,

又 $PB = AB = 1, \angle PBA = 60^\circ$,

$$\therefore PA = 1, PO = \frac{\sqrt{3}}{2}, PO \perp AB.$$

由(1)知, $BC \perp$ 平面 PAB ,

又 $BCC \subset$ 平面 $ABCD$,

$\therefore$ 平面 $PAB \perp$ 平面 $ABCD$,

又平面 $PAB \cap$ 平面 $ABCD = AB$,

$\therefore PO \perp$ 平面 $ABCD$.

连接 OC .

$\because OC \subset$ 平面 $ABCD$,

$\therefore PO \perp OC$,

$$\therefore PC = \sqrt{PO^2 + OC^2} = \sqrt{PO^2 + OB^2 + BC^2}$$

$$= \sqrt{\frac{3}{4} + \frac{1}{4} + 1} = \sqrt{2},$$

$$\text{又 } AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{2},$$

$$\therefore S_{\triangle PAC} = \frac{1}{2} \times 1 \times \sqrt{(\sqrt{2})^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{7}}{4}.$$

设点 D 到平面 PAC 的距离为 d ,

由等体积法, 得 $V_{D-PAC} = V_{P-ACD}$,

$$\therefore \frac{1}{3} \times S_{\triangle PAC} \times d = \frac{1}{3} \times S_{\triangle ACD} \times PO,$$

$$\text{即 } \frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{7}}{4} \times d = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 2 \times 1 \times \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\text{解得 } d = \frac{2\sqrt{21}}{7},$$

$$\text{即点 } D \text{ 到平面 } PAC \text{ 的距离为 } \frac{2\sqrt{21}}{7}. \quad (12 \text{ 分})$$

20. 解: (1) 由题得, $f'(x) = x^2 - (a+2)x + 1$. (2 分)

设 $P(x, y)$, 因为 $a=0$,

$$\text{所以 } k = x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2 \geq 0,$$

所以 k 的最小值为 0. (4 分)

$$(2) \text{ 因为 } g(x) = e - \frac{e^x}{x},$$

$$\text{所以 } g'(x) = \frac{e^x(1-x)}{x^2},$$

易知 $g(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递增, 在 $(1, +\infty)$ 上单调递减,

$$\text{所以 } g(x) \leq g(1) = 0. \quad (8 \text{ 分})$$

由条件知, $f'(1) \geq g(1)$, 可得 $a \leq 0$.

$$\text{当 } a \leq 0 \text{ 时, } f'(x) = x^2 - (a+2)x + 1 = (x-1)^2 - ax \geq (x-1)^2 \geq 0,$$

所以对 $\forall x > 0, f'(x) \geq g(x)$ 恒成立.

所以实数 a 的取值范围为 $(-\infty, 0]$. (12 分)

21. 解: (1) 设椭圆 C 的半焦距为 c ,

$$\text{则由题得, } \begin{cases} a+c=3, \\ \frac{2b^2}{a}=3, \\ a^2=b^2+c^2, \end{cases}$$

$$\text{解得 } a=2, b=\sqrt{3}, c=1,$$

$$\text{所以椭圆 } C \text{ 的方程为 } \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1. \quad (4 \text{ 分})$$

(2) 易知直线 MN 的斜率必存在, 设其直线方程为 $y = k(x+4), M(x_1, y_1), N(x_2, y_2)$.

$$\text{联立方程 } \begin{cases} \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1, \\ y = k(x+4) \end{cases} \text{ 消去 } y,$$

$$\text{得 } (3+4k^2)x^2 + 32k^2x + 64k^2 - 12 = 0,$$

$$\text{则 } \Delta = 144(1-4k^2) > 0, x_1 + x_2 = \frac{-32k^2}{3+4k^2}, x_1 x_2 =$$

$$\frac{64k^2-12}{3+4k^2}.$$

(7分)

由 $\overrightarrow{MQ} = \lambda \overrightarrow{QN}$, 得 $-4 - x_1 = \lambda(x_2 + 4)$,

$$\text{所以 } \lambda = -\frac{x_1+4}{x_2+4}.$$

设点 R 的坐标为 (x_0, y_0) ,则由 $\overrightarrow{MR} = \lambda \cdot \overrightarrow{NR}$, 得 $x_0 - x_1 = \lambda(x_0 - x_2)$,

$$\text{解得 } x_0 = \frac{x_1 - \lambda x_2}{1 - \lambda} = \frac{x_1 + \frac{x_1+4}{x_2+4} \cdot x_2}{1 + \frac{x_1+4}{x_2+4}}$$

$$= \frac{2x_1x_2 + 4(x_1 + x_2)}{(x_1 + x_2) + 8},$$

$$\text{又 } 2x_1x_2 + 4(x_1 + x_2) = 2 \times \frac{64k^2 - 12}{3 + 4k^2} + 4 \times \frac{-32k^2}{3 + 4k^2}$$

$$= \frac{-24}{3 + 4k^2},$$

$$(x_1 + x_2) + 8 = \frac{-32k^2}{3 + 4k^2} + 8 = \frac{24}{3 + 4k^2},$$

$$\text{从而 } x_0 = \frac{2x_1x_2 + 4(x_1 + x_2)}{(x_1 + x_2) + 8} = -1,$$

故点 R 在定直线 $x = -1$ 上.

(12分)

$$22. \text{解: (1) 由直线 } l \text{ 的参数方程 } \begin{cases} x = -2 + \frac{\sqrt{3}}{2}t, \\ y = \frac{1}{2}t \end{cases} \text{ 消去 } t,$$

得直线 l 的普通方程为 $x - \sqrt{3}y + 2 = 0$.将 $\rho^2 = x^2 + y^2$, $\rho \cos \theta = x$ 代入曲线 C 的极坐标方程

$$\rho^2 - 2\rho \cos \theta - 2 = 0 \text{ 中,}$$

得曲线 C 的直角坐标方程为 $(x-1)^2 + y^2 = 3$.

(5分)

$$(2) \text{ 将 } \begin{cases} x = -2 + \frac{\sqrt{3}}{2}t, \\ y = \frac{1}{2}t \end{cases} \text{ 代入 } (x-1)^2 + y^2 = 3,$$

$$\text{得 } t^2 - 3\sqrt{3}t + 6 = 0, \Delta > 0.$$

设点 A, B 对应的参数分别为 t_1, t_2 ,

$$\text{则 } t_1 + t_2 = 3\sqrt{3}, t_1 t_2 = 6,$$

$$\text{所以 } |AB| + |MA| \cdot |MB| = |t_1 - t_2| + t_1 t_2$$

$$= \sqrt{(t_1 + t_2)^2 - 4t_1 t_2} + t_1 t_2 = \sqrt{(3\sqrt{3})^2 - 4 \times 6} + 6 = 6 + \sqrt{3}. \quad (10 \text{ 分})$$

23. 解: (1) 由 $f(x) < 5$, 得 $2|x-3| + |x-4| < 5$,

$$\text{则 } \begin{cases} x \geq 4, \\ 2x-6+x-4 < 5 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} 3 < x < 4, \\ 2x-6-x+4 < 5 \end{cases}$$

$$\text{或 } \begin{cases} x \leq 3, \\ -2x+6-x+4 < 5, \end{cases}$$

$$\text{解得 } 4 \leq x < 5 \text{ 或 } 3 < x < 4 \text{ 或 } \frac{5}{3} < x \leq 3.$$

$$\text{所以原不等式的解集为 } \left\{ x \mid \frac{5}{3} < x < 5 \right\}. \quad (5 \text{ 分})$$

$$(2) \text{ 由 } f(x) = 2|x-3| + |x-4| =$$

$$\begin{cases} 3x-10, x \geq 4, \\ x-2, 3 < x < 4, \text{ 易得 } f(x) \geq 1. \\ 10-3x, x \leq 3, \end{cases}$$

若对于任意的 x , 不等式 $f(x) \geq a^2 - a - 1$ 恒成立,

$$\text{则 } f(x)_{\min} = 1 \geq a^2 - a - 1,$$

$$\text{解得 } -1 \leq a \leq 2.$$

所以实数 a 的取值范围为 $[-1, 2]$. (10分)