参考答案及解析

理数(三)

一、选择题

1. C 【解析】$A=\left\{x\left|\frac{x+1}{x-4}\geqslant 0\right.\right\}=\{x|x\leqslant -1$ 或 $x>4\}$，$B=\{x|\ln x<0\}=\{x|0<x<1\}$，则 $\complement_U A=\{x|-1<x\leqslant 4\}$，$\complement_U B=\{x|x\leqslant 0$ 或 $x\geqslant 1\}$，所以 $(\complement_U A)\cap(\complement_U B)=\{x|-1<x\leqslant 0$ 或 $1\leqslant x\leqslant 4\}$. 故选 C.

2. D 【解析】$z=\frac{2+2i}{1-i}+(1+2i)(2-i)=\frac{2\cdot 2i}{2}+4+3i=4+5i$. 故选 D.

3. C 【解析】$C:x^2=12y$ 的焦点为 $(0,3)$，所以直线 $l:y=\frac{\sqrt{3}}{3}x+3\Leftrightarrow x=\sqrt{3}y-3\sqrt{3}$，代入 C 的方程，得 $y^2-10y+9=0$，则 $y_1+y_2=10$，得 $|AB|=y_1+y_2+6=10+6=16$. 故选 C.

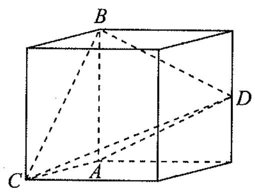
4. A 【解析】两趟车相差 20 分钟，则两拨客人也相差 20 分钟，则出租车司机等待客人不超过 8 分钟的概率为 $\frac{8}{20}=\frac{2}{5}$. 故选 A.

5. A 【解析】由题意 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数，则 $xf(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，得 $0\cdot f(0)=0$，又当 $x\in(0,+\infty)$ 时，$[xf(x)]'=xf'(x)+f(x)>0$，$\therefore xf(x)$ 在区间 $[0,+\infty)$ 上单调递增，则 $2020f(2020)>2019f(2019)>0$，$\therefore |-2019f(-2019)-1|=2019f(2019)+1<2020f(2020)+1=|2020f(2020)+1|$. 故选 A.

6. B 【解析】由题意，9 节竹子容积从上到下依次成等差数列，设最上节容积为 a_1，公差为 d，则有 $\begin{cases}a_1+a_2+a_3+a_4=3,\\ a_7+a_8+a_9=3.9,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}4a_1+6d=3,\\ 3a_1+21d=3.9,\end{cases}$ $\therefore\begin{cases}a_1=0.6,\\ d=0.1.\end{cases}$ $\therefore a_1+a_9=2a_1+8d=2$(升). 故选 B.

7. A 【解析】由 $1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2=1010^2$，得 $n=1010$，$a_{ij}=2n-1=2019$. 则前 k 行共有奇数为：$1+2+3+\cdots+k=\frac{k(k+1)}{2}$ 个，所以第 k 行的最后一个数为 $2\cdot\frac{k(k+1)}{2}-1=k^2+k-1$，第 $k+1$ 行的第一个数为 k^2+k+1，当 $k+1=45$ 时，$k(k+1)+1=44\times 45+1=1981$，即第 45 行的第一个数为 1981，因为 $\frac{2019-1981}{2}=19$，所以 2019 是第 45 行的第 20 个数，即 $i=45$，$j=20$，所以 $i+j=65$. 故选 A.

8. C 【解析】如图，D 是正方体一棱的中点，四面体 $ABCD$ 是三视图所对应的几何体，最长的棱为 $CD=\sqrt{4^2+4^2+2^2}=6$. 故选 C.



9. B 【解析】由题意知 $f(x)=g\left(x-\frac{\pi}{2}\right)=4\cos\left(\frac{x-\frac{\pi}{2}}{2}-\frac{3\pi}{8}\right)=4\cos\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{8}-\frac{\pi}{2}\right)=4\sin\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{8}\right)$，$\because x_0\in\left[\frac{\pi}{4},\frac{5\pi}{4}\right]$，则 $x_0-\frac{\pi}{4}\in[0,\pi]$，$\therefore\frac{x_0}{2}-\frac{\pi}{8}\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$，$\therefore y=\sqrt{2+2\cos\left(x_0-\frac{\pi}{4}\right)}=2\cos$

$\left(\frac{x_0}{2}-\frac{\pi}{8}\right)$,由题意 $2\cos\left(\frac{x_0}{2}-\frac{\pi}{8}\right)=4\sin\left(\frac{x_0}{2}-\frac{\pi}{8}\right)$,$\therefore \tan\left(\frac{x_0}{2}-\frac{\pi}{8}\right)=\frac{1}{2}$,$\therefore \tan\left(x_0-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{2\times\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{4}}=\frac{4}{3}$,$\therefore \tan\left(x_0-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\tan x_0-\tan\frac{\pi}{4}}{1+\tan x_0\cdot\tan\frac{\pi}{4}}=\frac{4}{3}$,得 $\tan x_0=-7$.故选 B.

10. D 【解析】设 $AB=1$,连接 A_1B,则平面 A_1BD_1 与平面 MAB_1 交于 MO,由 $BD_1//$平面 MAB_1,得 $BD_1//MO$,$\because O$ 是线段 AB_1 的中点,$\therefore M$ 是棱 A_1D_1 的中点.设点 B 到面 MAB_1 的距离为 h.$\because MB_1=MA=\sqrt{1^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{6}}{2}$,$\therefore MO=\sqrt{MA^2-AO^2}=1$,由体积 $V_{M-ABB_1}=V_{B-MAB_1}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot AB_1\cdot MO\cdot h=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot AB\cdot BB_1\cdot MA_1$,$\therefore AB_1\cdot MO\cdot h=AB\cdot BB_1\cdot MA_1$,$\therefore\sqrt{2}\times1\times h=1\times1\times\frac{\sqrt{2}}{2}$,得 $h=\frac{1}{2}$,直线 AB 与平面 AMB_1 所成角的正弦值为 $\frac{h}{AB}=\frac{1}{2}$.故选 D.

11. B 【解析】设 $\log_2 a=\log_3 b=\log_5 c=m$,$\because a>2$,$\therefore m>1$,由 $a=2^m,b=3^m,c=5^m$,$\therefore\left(\frac{a}{2}\right)^{\frac{1}{2}}=\left(\frac{2^m}{2}\right)^{\frac{1}{2}}=(\sqrt{2})^{m-1}$,$\left(\frac{b}{3}\right)^{\frac{1}{3}}=\left(\frac{3^m}{3}\right)^{\frac{1}{3}}=(\sqrt[3]{3})^{m-1}$,$\left(\frac{c}{5}\right)^{\frac{1}{5}}=\left(\frac{5^m}{5}\right)^{\frac{1}{5}}=(\sqrt[5]{5})^{m-1}$.又$\because 5^2<2^5,2^3<3^2$,$\therefore\sqrt[5]{5}<\sqrt{2}<\sqrt[3]{3}$,$\because m-1>0$,$\therefore\left(\frac{c}{5}\right)^{\frac{1}{5}}<\left(\frac{a}{2}\right)^{\frac{1}{2}}<\left(\frac{b}{3}\right)^{\frac{1}{3}}$.故选 B.

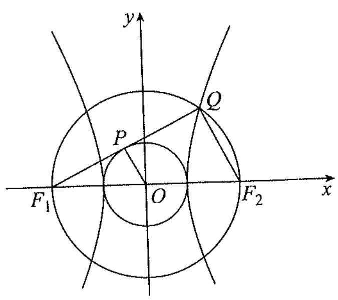
12. C 【解析】$\because$数列$\{a_n\}$为递增的等差数列,$b_n=2^{a_n}$,$\therefore$数列$\{b_n\}$是递增的等比数列,设$\{b_n\}$的公比为 q,则 $b_1q^{19}+3b_1q^3=4b_1q^{11}$,$\therefore q^{16}-4q^8+3=0$,$\therefore q^8=3$ 或 $q^8=1$,$\because$数列$\{b_n\}$是递增的等比数列,$\therefore q^8=3$,又$\because S_{36}-S_4=b_5+b_6+\cdots+b_{36}=q^4S_8+q^{12}S_8+q^{20}S_8+q^{28}S_8$,则 $\frac{S_{36}-S_4}{S_8}=\frac{q^4S_8+q^{12}S_8+q^{20}S_8+q^{28}S_8}{S_8}=q^4(1+q^8+q^{16}+q^{24})=40\sqrt{3}$.故选 C.

二、填空题

13. 60 【解析】$T_{k+1}=C_6^k\cdot(2x)^{6-k}\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^k=C_6^k\cdot2^{6-k}\cdot x^{6-\frac{3k}{2}}$,由题意得 $6-\frac{3k}{2}=0$,解得 $k=4$,$\therefore$常数项为 $C_6^4\cdot2^{6-4}=60$.

14. 87,95 【解析】由最小的两个编号为 07,15,可知,抽取时的分段间隔是 8,即抽取 12 个印张,其编号构成首项为 7,公差为 8 的等差数列,故最大的两个编号为 $7+8\times10=87$ 和 $7+8\times11=95$.

15. $y=\pm2x$ 【解析】由题意可得 $F_1Q\perp QF_2$,$F_1Q\perp OP$,$F_2Q//OP$,$\because O$ 为线段 F_1F_2 的中点,$\therefore|F_2Q|=2|OP|=2a$,$\therefore|F_1Q|=|F_2Q|+2a=4a$,则有 $|F_1Q|^2+|F_2Q|^2=4c^2\Leftrightarrow(4a)^2+(2a)^2=4c^2$,得 $4a^2=b^2$,$\frac{b}{a}=2$,$\therefore$双曲线的渐近线方程为 $y=\pm2x$.



16. $\frac{81}{8}$ 【解析】$|(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})\cdot\overrightarrow{OA}|\leqslant|(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})||\overrightarrow{OA}|=2|(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})|$,当且仅当 $\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}//\overrightarrow{OA}$时等号成立,又 $|(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})\cdot\overrightarrow{OA}|\leqslant18$ 恒成立,可得 $2|\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}|\leqslant18$,

所以$|\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}|\leqslant 9$,故$(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})^2\leqslant 81$,化为$(\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})^2+8\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}\leqslant 81$,所以$8\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}\leqslant 81-(\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})^2\leqslant 81$,故$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}\leqslant\frac{81}{8}$(当且仅当$\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{b}$时取等号).

三、解答题

17.**解**:(1)由题设得$\frac{1}{2}AB\cdot AD\cdot\sin\angle BAD$

$=\frac{\sqrt{3}}{3}BD^2\cdot\sin\angle ABD\cdot\sin\angle ADB$,

由正弦定理得

$\frac{1}{2}\sin\angle ADB\cdot\sin\angle ABD\cdot\sin\angle BAD$

$=\frac{\sqrt{3}}{3}\sin^2\angle BAD\cdot\sin\angle ABD\cdot\sin\angle ADB$,

$\therefore\sin\angle BAD=\frac{\sqrt{3}}{2}$,　　(3分)

$\because BC/\!/AD$,$\angle ABC$是钝角,

$\therefore\angle BAD$是锐角,

$\therefore\angle BAD=\frac{\pi}{3}$.　　(5分)

(2)$\because AB^2+\sqrt{3}AD\cdot BD=AD^2+BD^2$,

$\therefore AB^2=AD^2+BD^2-\sqrt{3}AD\cdot BD$,

由余弦定理得$AB^2=AD^2+BD^2-2AD\cdot BD\cdot\cos\angle ADB$,

$\therefore\cos\angle ADB=\frac{\sqrt{3}}{2}$,$\therefore\angle ADB=\frac{\pi}{6}$,

$\therefore\angle DBC=\angle BDA=\angle BAO=\frac{\pi}{6}$,　　(9分)

$\therefore\angle ABD=\frac{\pi}{2}$,$\therefore\angle BCA=\frac{\pi}{6}$,$\therefore AB=BC=2$,$BD=\sqrt{3}AB=2\sqrt{3}$,

$\therefore S_{\triangle BCD}=\frac{1}{2}BC\cdot BD\cdot\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 2\sqrt{3}\cdot\frac{1}{2}=\sqrt{3}$.　　(12分)

18.**解**:(1)$\because$平面$ABCD$是菱形,且$\angle BAD=60°$,

$\therefore\triangle ABD$是正三角形,

$\therefore BE\perp AD$,$\therefore BE\perp BC$,　　(2分)

又$\because$矩形$A_1B_1BA\perp$平面$ABCD$,

$B_1B\perp AB$,平面$ABCD\cap$平面$ABB_1A_1=AB$,

$\therefore B_1B\perp$平面$ABCD$,

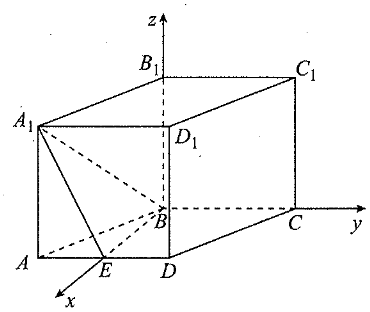
$\therefore B_1B\perp BE$,

$\therefore BE\perp$平面BCC_1B_1.　　(4分)

(2)设$\frac{AA_1}{AB}=\lambda$,$AB=2a$,

则$AA_1=2\lambda a$,$BE=\sqrt{3}a$,

分别以BE,BC,BB_1为x,y,z轴,建立空间直角坐标系,



则$E(\sqrt{3}a,0,0)$,$A_1(\sqrt{3}a,-a,2\lambda a)$,$B_1(0,0,2\lambda a)$.

$\overrightarrow{BE}=(\sqrt{3}a,0,0)$,$\overrightarrow{BA_1}=(\sqrt{3}a,-a,2\lambda a)$,$\overrightarrow{BB_1}=(0,0,2\lambda a)$,　　(6分)

设平面EA_1B的一个法向量为$\boldsymbol{n}_1=(x_1,y_1,z_1)$,

则有$\begin{cases}\boldsymbol{n}_1\cdot\overrightarrow{BE}=0,\\ \boldsymbol{n}_1\cdot\overrightarrow{BA_1}=0,\end{cases}$

即$\begin{cases}\sqrt{3}ax_1=0,\\ \sqrt{3}ax_1-ay_1+2\lambda az_1=0,\end{cases}$

得$\begin{cases}x_1=0,\\ y_1=2\lambda z_1,\end{cases}$

令$z_1=1$,得$\boldsymbol{n}_1=(0,2\lambda,1)$.　　(8分)

设平面B_1A_1B的一个法向量为$\boldsymbol{n}_2=(x_2,y_2,z_2)$,

则有$\begin{cases}\boldsymbol{n}_2\cdot\overrightarrow{BB_1}=0,\\ \boldsymbol{n}_2\cdot\overrightarrow{BA_1}=0,\end{cases}$

即$\begin{cases}2\lambda az_2=0,\\ \sqrt{3}ax_2-ay_2+2\lambda az_2=0,\end{cases}$

得$\begin{cases}z_2=0,\\ y_2=\sqrt{3}x_2,\end{cases}$

令 $x_2=1$,

得 $\boldsymbol{n}_2=(1,\sqrt{3},0)$, (10 分)

则 $|\cos\theta|=\left|\dfrac{\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2}{|\boldsymbol{n}_1|\cdot|\boldsymbol{n}_2|}\right|=\dfrac{2\sqrt{3}\lambda}{\sqrt{4\lambda^2+1^2}\cdot\sqrt{3^2+1}}$

$=\dfrac{3\sqrt{39}}{26}$,

$\therefore\dfrac{\lambda^2}{4\lambda^2+1}=\dfrac{9}{52}$,解得$\dfrac{AA_1}{AB}=\lambda=\dfrac{3}{4}$. (12 分)

19. **解**:(1)由频率分布直方图知,

$0.020+0.014+0.004+0.002+0.025=0.065$,

由 $10\times(0.065+a)=1\Rightarrow a=0.035$.

设总共调查了 x 个人,

则专项心理等级为一般的为 $10\times(0.014+0.020)x=680\Rightarrow x=2000$.

专项心理等级为有隐患的人数为 $10\times(0.004+0.002)\times2000=120$,即专项心理等级为有隐患的人数为 120. (4 分)

(2)依题意,老年人抽 2 人,中青年抽 4 人.

从 6 人中再随机抽 2 人,至少有一位老年人被抽到的概率为 $p=1-\dfrac{C_4^2}{C_6^2}=\dfrac{3}{5}$,

即至少有一位老年人被列为长期关注对象的概率为 $\dfrac{3}{5}$. (8 分)

(3)由频率分布直方图可得 $45\times0.02+55\times0.04+65\times0.14+75\times0.2+85\times0.35+95\times0.25=80.7$,

估计市民心理健康问卷的平均得分为 80.7,

所以市民心理健康指数为$\dfrac{80.7}{100}=0.807>0.8$,

所以只需发放心理指导材料,不需要举办大讲堂活动. (12 分)

20. **解**:(1)设 $Q(x,y)$,

$\because H$ 为 Q 在 y 轴上的射影,

$\therefore\overrightarrow{OH}=(0,y)$,

$\therefore\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{OH}=(x,y)+(0,y)=(x,2y)$, (2 分)

$\therefore\overrightarrow{OQ}\cdot(\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{OH})=(x,y)\cdot(x,2y)=x^2+2y^2=4$,

$\therefore C_2:\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{2}=1$. (4 分)

(2)由题知 $F_1(-2,0),F_2(2,0)$,

设 $P(x_P,y_P),A(x_1,y_1),B(x_2,y_2),C(x_3,y_3),D(x_4,y_4)$,

直线 PF_1 的斜率 $k_1=\dfrac{y_P}{x_P+2}$,

方程可表示为 $y=k_1(x+2)$,

与椭圆 C_1 的方程联立,得$\begin{cases}y=k_1(x+2),\\ \dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{4}=1,\end{cases}$

消去 y,得$(2k_1^2+1)x^2+8k_1^2x+8(k_1^2-1)=0$,

$\Delta=32(k_1^2+1)>0$ 恒成立,

得 $x_1+x_2=-\dfrac{8k_1^2}{2k_1^2+1},x_1\cdot x_2=\dfrac{8(k_1^2-1)}{2k_1^2+1}$,

$|AB|=\sqrt{(k_1^2+1)[(x_1+x_2)^2-4x_1\cdot x_2]}$

$=\sqrt{(k_1^2+1)\left[\left(-\dfrac{8k_1^2}{2k_1^2+1}\right)^2-4\cdot\dfrac{8(k_1^2-1)}{2k_1^2+1}\right]}$

$=\dfrac{4\sqrt{2}(k_1^2+1)}{2k_1^2+1}$.

直线 PF_2 的斜率 $k_2=\dfrac{y_P}{x_P-2}$,

方程可表示为 $y=k_2(x-2)$,

与椭圆 C_1 的方程联立,得$\begin{cases}y=k_2(x-2),\\ \dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{4}=1,\end{cases}$

消去 y,得$(2k_2^2+1)x^2-8k_2^2x+8(k_2^2-1)=0$,

$\Delta=32(k_2^2+1)>0$ 恒成立,

得 $x_3+x_4=\dfrac{8k_2^2}{2k_2^2+1}$,$x_3\cdot x_4=\dfrac{8(k_2^2-1)}{2k_2^2+1}$,

$|CD|=\sqrt{(k_2^2+1)[(x_3+x_4)^2-4x_3\cdot x_4]}$

$=\sqrt{(k_2^2+1)\left[\left(\dfrac{8k_2^2}{2k_2^2+1}\right)^2-4\cdot\dfrac{8(k_2^2-1)}{2k_2^2+1}\right]}$

$=\dfrac{4\sqrt{2}(k_2^2+1)}{2k_2^2+1}$.　　(9 分)

由$\dfrac{x_P^2}{4}+\dfrac{y_P^2}{2}=1\Leftrightarrow y_P^2=\dfrac{1}{2}(4-x_P^2)$,

$\therefore k_1k_2=\dfrac{y_P^2}{x_P^2-4}=-\dfrac{1}{2}$,

则$|AB|\cdot|CD|=\dfrac{4\sqrt{2}(k_1^2+1)}{2k_1^2+1}\cdot\dfrac{4\sqrt{2}(k_2^2+1)}{2k_2^2+1}$

$=\dfrac{32(k_1^2k_2^2+k_1^2+k_2^2+1)}{4k_1^2k_2^2+2(k_1^2+k_2^2)+1}$

$=\dfrac{32\left[\dfrac{5}{4}+(k_1+k_2)^2-2k_1k_2\right]}{2+2(k_1+k_2)^2-4k_1k_2}$

$=\dfrac{16\cdot\left[\dfrac{1}{4}+2+(k_1+k_2)^2\right]}{2+(k_1+k_2)^2}=16+\dfrac{4}{2+(k_1+k_2)^2}$

$\leqslant 16+2=18$,

当且仅当 $k_1=-k_2$ 时,取等号.

$\therefore|AB|\cdot|CD|$的最大值为 18.　　(12 分)

21. **解**:(1)当 $a=1,t=-2$ 时,$f(x)=xe^{x+1}+6(x^2+2x)+7$,

有 $f'(x)=(x+1)e^{x+1}+12(x+1)=(x+1)(e^{x+1}+12)$,

令 $f'(x)=0$,

得 $x=-1$.　　(2 分)

当 $x<-1$ 时,$f'(x)<0$,$f(x)$单调递减;

当 $x>-1$ 时,$f'(x)>0$,$f(x)$单调递增.

$\therefore f(x)$在 $x=-1$ 处,取得最小值,

$f(-1)=-1\cdot e^{-1+1}+6[(-1)^2-2\cdot 1]+7=0$,

$\therefore f(x)\geqslant 0$ 恒成立.　　(5 分)

(2)设 $g(a)=(xe^{x+1}-t)a-3(x^2+2x)t+5=f(x)$,

$\therefore g(a)$是关于 a 的一次函数,

$\because$对任意 $a\in[1,5]$,$x\in\mathbf{R}$,$f(x)\geqslant 0$ 恒成立,

$\therefore$对任意 $a\in[1,5]$,$x\in\mathbf{R}$,$g(a)\geqslant 0$ 恒成立,

即$\begin{cases}g(1)=xe^{x+1}-3(x^2+2x)t-t+5\geqslant 0,\\ g(5)=5xe^{x+1}-3(x^2+2x)t-5t+5\geqslant 0\end{cases}$对 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立.　　(7 分)

记 $f_{(1)}(x)=g(1)=xe^{x+1}-3(x^2+2x)t-t+5$,

$f_{(5)}(x)=g(5)=5xe^{x+1}-3(x^2+2x)t-5t+5$,

$\therefore\begin{cases}f_{(1)}(x)\geqslant 0,\\ f_{(5)}(x)\geqslant 0\end{cases}$对 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立,

$\therefore\begin{cases}f_{(1)}(-1)=(-1)\cdot e^{-1+1}-3[(-1)^2+2\cdot(-1)]t-t+5=2t+4\geqslant 0,\\ f_{(5)}(-1)=5\cdot(-1)\cdot e^{-1+1}-3[(-1)^2+2\cdot(-1)]t-5t+5\geqslant 0=-2t\geqslant 0,\end{cases}$

$\therefore -2\leqslant t\leqslant 0$.　　(9 分)

又 $f_{(1)}'(x)=(x+1)e^{x+1}-6(x+1)t=(x+1)(e^{x+1}-6t)$,

$f_{(5)}'(x)=5(x+1)e^{x+1}-6(x+1)t=(x+1)(5e^{x+1}-6t)$,

而 $e^{x+1}-6t>0,5e^{x+1}-6t>0$,

当 $x<-1$ 时,$\begin{cases}f_{(1)}'(x)<0,\\ f_{(5)}'(x)<0,\end{cases}$

$f_{(1)}(x),f_{(5)}(x)$在区间$(-\infty,-1)$上单调递减;

当 $x>-1$ 时,$\begin{cases}f_{(1)}'(x)>0,\\ f_{(5)}'(x)>0,\end{cases}$

$f_{(1)}(x),f_{(5)}(x)$在区间$(-1,+\infty)$上单调递增.

$\therefore x=-1$ 同时是 $f_{(1)}(x),f_{(5)}(x)$的最小值点,

$\therefore\begin{cases}f_{(1)}(x)\geqslant f_{(1)}(-1)\geqslant 0,\\ f_{(5)}(x)\geqslant f_{(5)}(-1)\geqslant 0\end{cases}\Leftrightarrow -2\leqslant t\leqslant 0.$　　(12 分)

22. **解**：(1)由曲线 $C_1\begin{cases}x=2\cos\alpha,\\ y=\sqrt{3}\sin\alpha,\end{cases}$

得$\begin{cases}\dfrac{\rho\cos\theta}{2}=\cos\alpha,\\ \dfrac{\rho\sin\theta}{\sqrt{3}}=\sin\alpha,\end{cases}$

$\therefore\dfrac{\rho^2\cos^2\theta}{4}+\dfrac{\rho^2\sin^2\theta}{3}=1,$

∴曲线 C_1 的极坐标方程为 $\rho^2=\dfrac{12}{3+\sin^2\theta}$.　　(4 分)

直线 l 过原点,斜率为 $k=\tan\alpha_0=\dfrac{\sqrt{15}}{5}$,

∴直线 l 的直角坐标方程为 $y=\dfrac{\sqrt{15}}{5}x$.　　(6 分)

(2)∵P 为曲线 C_1 与 x 轴正半轴的交点,

∴$\theta=0$ 时,$\rho^2=\dfrac{12}{3+\sin^2 0}=4$,

得 ρ 的值为 2,

又得 $\sin\alpha_0=\dfrac{\sqrt{6}}{4}$,　　(8 分)

∴点 P 到直线 l 的距离为 $2\sin\alpha_0=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$.　　(10 分)

23. **解**：(1)当 $m=2$ 时,

$$f(x)=|x+1|+|2x-1|=\begin{cases}-3x,x<-1,\\ -x+2,-1\leqslant x\leqslant\dfrac{1}{2},\\ 3x,x>\dfrac{1}{2},\end{cases}$$

(2 分)

$f(x)\leqslant 4\Leftrightarrow\begin{cases}x<-1,\\ -3x\leqslant 4,\end{cases}$

或$\begin{cases}-1\leqslant x\leqslant\dfrac{1}{2},\\ -x+2\leqslant 4,\end{cases}$或$\begin{cases}x>\dfrac{1}{2},\\ 3x\leqslant 4,\end{cases}$

解得$\left\{x\,\middle|\,-\dfrac{4}{3}\leqslant x\leqslant\dfrac{4}{3}\right\}$.　　(5 分)

(2)当 $x\in[2,3]$时,不等式 $f(x)\leqslant|x+3|$恒成立,

结合 $m>0$,

即 $x+\dfrac{m}{2}+|mx-1|\leqslant x+3$ 恒成立,也即$|mx-1|\leqslant 3-\dfrac{m}{2}$恒成立,

当 $3-\dfrac{m}{2}<0$ 时,显然不成立;

当 $3-\dfrac{m}{2}\geqslant 0$ 时,得$\dfrac{m}{2}-3\leqslant mx-1\leqslant 3-\dfrac{m}{2}$,整理得

$\dfrac{1}{2}-\dfrac{2}{m}\leqslant x\leqslant\dfrac{4}{m}-\dfrac{1}{2}$,

所以$\begin{cases}\dfrac{1}{2}-\dfrac{2}{m}\leqslant 2,\\ \dfrac{4}{m}-\dfrac{1}{2}\geqslant 3,\end{cases}$得 $m\leqslant\dfrac{8}{7}$.

所以 $0<m\leqslant\dfrac{8}{7}$.

所以实数 m 的取值范围是$\left(0,\dfrac{8}{7}\right]$.　　(10 分)