



参考答案及解析

理数(四)

一、选择题

1. C 【解析】依题意, $z = i - \frac{(i+2)i}{i^2} = i - \frac{-1+2i}{-1} = -1$

+3i, 因此 $\bar{z} = -1-3i$, 从而 $\bar{z}$ 位于第三象限. 故选 C.

2. B 【解析】解不等式得 $A = \left\{ x \mid \frac{1}{3} < x < 1 \right\}$, 而 $B =$

$\{y \mid y = \lg(x^2 + \sqrt{10})\} = \left\{ y \mid y \geq \frac{1}{2} \right\}$, 因此 $A \cap B =$

$\left\{ x \mid \frac{1}{2} \leq x < 1 \right\}$, 故 $\complement_U(A \cap B) = \left\{ x \mid x < \frac{1}{2} \text{ 或 } x \geq \right.$

$1 \}$. 故选 B.

3. B 【解析】根据诱导公式得: $\cos \alpha = -\frac{3}{5}$, 又因为 α

为第二象限角得, 所以 $\sin \alpha = \frac{4}{5}$, 所以 $\sin 2\alpha =$

$2\sin \alpha \cos \alpha = 2 \times \frac{4}{5} \times \left(-\frac{3}{5}\right) = -\frac{24}{25}$. 故选 B.

4. C 【解析】根据折线图所示, 投入“扶贫搬迁”的资金

占 40%, 也即 $10 \text{ 亿} \times 40\% = 4 \text{ 亿}$; 投入“技能培训”的

资金占 15%, 为 1.5 亿; 投入“改善基础设施”的资金

占 20%, 为 2 亿; 投入“发展特色产业”的资金占

10%, 为 1 亿; 投入“资金补偿”的资金占 5%, 为 0.5

亿. 根据以上分析可知, C 选项错误, A, B, D 均正确.

故选 C.

5. A 【解析】抽取一个零件的尺寸在 $(\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma)$ 之

内的概率是 0.9974, 从而零件在区间 $(\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma)$

之外的概率是 $1 - 0.9974 = 0.0026$, 所以 $X \sim B(16,$

$0.0026)$, 所以 $P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 -$

$0.9974^{16} = 0.0408$. 故选 A.

6. D 【解析】设 $F(c, 0)$, 则直线 AB 的方程为 $x - 2y -$

$c = 0$, 而双曲线的渐近线方程为 $y = \pm \frac{b}{a}x$, 所以点

$A\left(\frac{ac}{a-2b}, \frac{bc}{a-2b}\right) (2b > a)$, $B\left(\frac{ac}{a+2b}, -\frac{bc}{a+2b}\right)$, 所

以 $|AB| = \frac{2\sqrt{5}abc}{4b^2 - a^2}$. 设直线 AB 被圆: $x^2 + y^2 = c^2$ 截

得的弦为 MN, 则 $|MN| = 2\sqrt{c^2 - \frac{1}{5}c^2} = \frac{4\sqrt{5}}{5}c$, 依题

意 $|MN| = 3|AB|$, 所以 $\frac{2\sqrt{5}abc}{4b^2 - a^2} \times 3 = \frac{4\sqrt{5}}{5}c$, 消去 c 得

$2a^2 + 15ab - 8b^2 = 0$, 即 $(2a - b)(a + 8b) = 0$, 所以 $b =$

$2a$, 得 $e = \sqrt{5}$. 故选 D.

7. C 【解析】依题意, 外接球的球心在两底面斜边中点

连线段的中点处, 因此其外接球半径为 $\sqrt{2^2 + 2^2} =$

$2\sqrt{2}$, 因此其外接球的表面积为 $4\pi \times (2\sqrt{2})^2 = 32\pi$.

故选 C.

8. C 【解析】观察给出的几个式子, 得出的结论为 $1^2 +$

$2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$, 当 $n = 20$ 时,

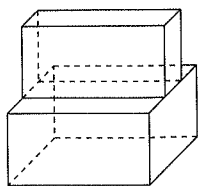
所给式子值为 2870. 故选 C.

9. A 【解析】根据三视图, 该榫构件是一个正方体的上

部, 削去两个小长方体所得, 其直观图如图所示, 因此

其表面积为 $3 \times 6 \times 4 + 6 \times 6 + 2 \times 6 \times 2 + 3 \times 6 \times 2 + 2$

$\times 6 + 3 \times 2 \times 2 = 192$. 故选 A.



10. A 【解析】依题意, $\omega=1, \varphi=0$, 假设 $P(x_0, \cos x_0)$,

则 $\cos x_0 = \tan x_0$, 而 $QR = \sin x_0$, 由 $\cos x_0 = \tan x_0$

得 $\cos x_0 = \frac{\sin x_0}{\cos x_0}$, 也即 $\cos^2 x_0 = \sin x_0$, 因此 $\sin^2 x_0$

$+\sin x_0 - 1 = 0$, 得 $\sin x_0 = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$. 故选 A.

11. B 【解析】法一: 设直线 AB 的方程为 $y=k(x-1)$

($k \neq 0$), $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, 则根据抛物线焦点弦

的性质知 $|AB| = x_1 + x_2 + 2$, 将直线 AB 的方程和

抛物线的方程联立消去 y 可得 $k^2 x^2 - (2k^2 + 4)x +$

$k^2 = 0$, 于是 $|AB| = \frac{4}{k^2} + 4$. 用 $-\frac{1}{k}$ 去取代 k 得 $|CD|$

$= 4k^2 + 4$, 而 A, B, C, D 围成的四边形的面积为 $S =$

$\frac{1}{2} \times |AB| \times |CD| = 8 \left(\frac{1}{k^2} + 1 \right) (k^2 + 1) = 8 \left(2 + k^2 \right.$

$\left. + \frac{1}{k^2} \right) \geq 8 \left(2 + 2\sqrt{k^2 \times \frac{1}{k^2}} \right) = 32$, 当且仅当 $k = \pm 1$

时等号成立. 故选 B.

法二: 设直线 AB 的倾斜角为 θ , A 在准线上的投影

为 A' , B 在准线上的投影为 B' , 则 $|AF| \cos \theta + p =$

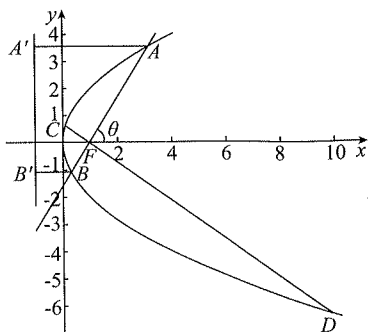
$|A'A| = |AF|$, 所以 $|AF| = \frac{p}{1 - \cos \theta}$, 同理 $|BF| =$

$\frac{p}{1 + \cos \theta}$, 所以 $|AB| = \frac{p}{1 - \cos \theta} + \frac{p}{1 + \cos \theta} = \frac{2p}{\sin^2 \theta}$,

所以 $|AB| = \frac{4}{\sin^2 \theta}$, $|CD| = \frac{4}{\sin^2 \left(\theta + \frac{\pi}{2} \right)} = \frac{4}{\cos^2 \theta}$,

$S_{\text{四边形}ACBD} = \frac{1}{2} |AB| |CD| = \frac{8}{\sin^2 \theta \cos^2 \theta} = \frac{32}{\sin^2 2\theta} \geq$

32 , 当 $\theta = \frac{\pi}{4}$ 时, $\sin 2\theta = 1$ 等号成立. 故选 B.



12. A 【解析】 $f'(x) = \frac{f'(1)}{e} e^x + f(0)x - 1$, 令 $x=1$ 得

$f'(1) = \frac{f'(1)}{e} e + f(0) - 1$, 得 $f(0) = 1$. 在函数 $y =$

$f(x)$ 中, 令 $x=0$ 得 $f'(1) = e$. 所以 $f(x) = e^x +$

$\frac{1}{2} x^2 - x$, 则 $f'(x) = e^x + x - 1$, 令 $f'(x) = 0$, 得 $x =$

0 . 由于 $f'(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增, 所以 $f'(x)$ 在 $(-\infty,$

$0)$ 上为负, 在 $(0, +\infty)$ 为正, 所以 $f(x)$ 在区间

$(-\infty, 0)$ 上单调递减, 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增. 当 x

$= 0$ 时, $f(x)$ 取得最小值 $f(0) = 1$, 存在实数 m 使得

不等式 $f(m) \leq 5n^2 - 4n$ 成立 $\Leftrightarrow f(x)_{\min} \leq 5n^2 - 4n \Leftrightarrow$

$1 \leq 5n^2 - 4n$, 解得 $n \geq 1$ 或 $n \leq -\frac{1}{5}$. 故选 A.

二、填空题

13. $\sqrt{13}$ 【解析】依题意, $2a - b = (4+x, -x)$, 若 $2a$

$-b$ 与 a 共线, 则有 $2(4+x) + 3x = 0$, 解得 $x =$

$-\frac{8}{5}$, 此时, $b = \left(\frac{18}{5}, \frac{12}{5} \right)$, 所以 a 在 b 方向上的投

影为 $\frac{a \cdot b}{|b|} = \frac{3 \times \frac{18}{5} + 2 \times \frac{12}{5}}{\sqrt{\left(\frac{18}{5} \right)^2 + \left(\frac{12}{5} \right)^2}} = \sqrt{13}$.

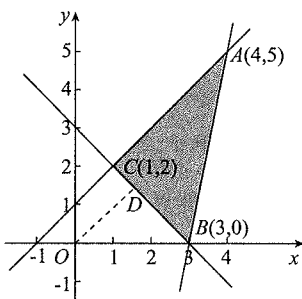
14. 16 【解析】 $\left(x^2 + \frac{1}{x} + 1 \right)^3 = \left[1 + \left(x^2 + \frac{1}{x} \right) \right]^3$, 此

二项式展开式的通项为 $T_{r+1} = C_3^r \left(x^2 + \frac{1}{x} \right)^r$ ($r=0,$

1, 2, 3). 当 $r=0$ 时, 常数项为 1, 当 $r=3$ 时, 常数项为 3, 所以展开式的常数项为 4, 所以 $m=4$, 所以 $(1-3x)^m = (1-3x)^4$, 令 $x=1$, 得展开式的所有项的系数之和为 16.

15. $\left[\frac{9}{2}, 41\right]$ 【解析】点 (x, y) 所在的区域如图所示,

目标函数 $x^2 + y^2$ 的集合意义是可行域内的一点到原点距离的平方, 从原点向直线 $y = -x + 3$ 作垂线, 垂足为 D , 又 D 在直线 $y = x$ 上, 所以 D 的坐标为 $\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$, 显然 D 点在线段 CB 上, 所以 $x^2 + y^2$ 的最小值为 D 到直线 $x + y - 3 = 0$ 的距离的平方 $\frac{9}{2}$, $x^2 + y^2$ 最大值为线段 OA 长度的平方 41, 所以 $x^2 + y^2$ 的取值范围是 $\left[\frac{9}{2}, 41\right]$.



16. 300 【解析】假设 $\angle DOC = \theta$, 则 $\theta \in \left(0, \frac{2}{3}\pi\right)$, 在

$\triangle DOC$ 中, 由正弦定理得: $\frac{CD}{\sin \theta} = \frac{DO}{\sin\left(\frac{2\pi}{3} - \theta\right)}$

$\frac{OC}{\sin \frac{\pi}{3}} = \frac{200}{\sqrt{3}}$, 于是 $CD = \frac{200}{\sqrt{3}} \sin \theta$, $DO =$

$\frac{200}{\sqrt{3}} \sin\left(\frac{2\pi}{3} - \theta\right)$, 因此老人散步路程为 $100 + CD +$

$DO = \frac{200}{\sqrt{3}} \left[\sin \theta + \sin\left(\frac{2\pi}{3} - \theta\right) \right] + 100 = 200 \sin\left(\theta +$

$\frac{\pi}{6}\right) + 100$, 当 $\theta = \frac{\pi}{3}$ 时, 老人散步路程最大为 $200 + 100 = 300$, 此时 C 在弧 AB 中点处.

三、解答题

17. 解: (1) 依题意, $S_n = 2a_n - 1$ ($n \in \mathbb{N}^*$), $S_{n-1} = 2a_{n-1} - 1$ ($n \geq 2$). (1 分)

两式相减得: $S_n - S_{n-1} = 2a_n - 2a_{n-1}$ ($n \geq 2$). (2 分)

所以 $a_n = 2a_n - 2a_{n-1}$ ($n \geq 2$), 即 $a_n = 2a_{n-1}$ ($n \geq 2$).

令 $n=1$ 代入到已知条件中, 注意到 $S_1 = a_1$, 可得 $a_1 = 1$,

所以数列 $\{a_n\}$ 是以 1 为首项, 2 为公比的等比数列.

(5 分)

根据等比数列的通项公式得 $a_n = 2^{n-1}$. (6 分)

(2) 设 $b_n = na_n = n \times 2^{n-1}$,

$\{b_n\}$ 的前 n 项之和为 T_n ,

则 $T_n = b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_n = 1 \times 2^0 + 2 \times 2^1 + 3 \times 2^2 + \dots + n \times 2^{n-1}$, (7 分)

两边同乘 2 得: $2T_n = 1 \times 2^1 + 2 \times 2^2 + 3 \times 2^3 + \dots + n \times 2^n$, (8 分)

两式相减得: $-T_n = 1 \times 2^0 + 1 \times 2^1 + 1 \times 2^2 + \dots + 1 \times 2^{n-1} - n \times 2^n$. (9 分)

所以 $-T_n = (2^0 + 2^1 + 2^2 + \dots + 2^{n-1}) - n \times 2^n$

$= \frac{1 \times (1 - 2^n)}{1 - 2} - n \times 2^n = 2^n - 1 - n \times 2^n$. (11 分)

所以 $T_n = (n-1) \times 2^n + 1$,

所以数列 $\{na_n\}$ 的前 n 项之和为 $(n-1) \times 2^n + 1$.

(12 分)

18. 解: (1) 在平面 $ABCD$ 中, 设 $AC \cap BD = O$,

由于 $AB = BC = 5$, $CD = AD$, $BD = BD$,

因此 $\triangle ABD$ 和 $\triangle CBD$ 全等;

于是 BD 平分 $\angle ABC$,

再根据等腰三角形的性质知, $BD \perp AC$,

设 $BO=x$,则 $DO=7-x$;

由勾股定理得 $25-x^2=18-(7-x)^2$,

解得 $x=4$,

所以 $BO=4, AO=CO=DO=3$, (3分)

折起后,在三棱锥 $D-ABC$ 中由 $DO=3, BO=4$,

$BD=5$ 知, $DO \perp BO$,而 $DO \perp AC$,因此直线 DO 和

平面 ABC 内的两条相交直线 AC, BO 都垂直,

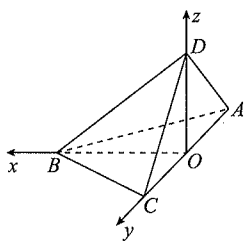
故 $DO \perp$ 平面 ABC ,而 $DO \subset$ 平面 ACD ,因此平面

$ACD \perp$ 平面 ABC . (6分)

(2)由(1)知 OC, OB, OD 两两垂直,以 O 为原点,以

OB, OC, OD 分别为 x 轴, y 轴, z 轴建立空间坐

标系,



则 $O(0,0,0), C(0,3,0), B(4,0,0), A(0,-3,0)$,

$D(0,0,3)$. (7分)

设平面 ABD 的一个法向量为 $n=(x,y,z)$,

$$\text{由} \begin{cases} n \cdot \overrightarrow{AB}=0, \\ n \cdot \overrightarrow{AD}=0, \end{cases} \text{可得} \begin{cases} (x,y,z) \cdot (4,3,0)=0, \\ (x,y,z) \cdot (0,3,3)=0, \end{cases}$$

令 $z=1$,得 $x=\frac{3}{4}, y=-1$,于是 $n=(\frac{3}{4}, -1, 1)$.

(10分)

设直线 BC 和平面 ABD 所成的角为 α ,

由于 $\overrightarrow{BC}=(-4,3,0)$,

则 $\sin \alpha = \frac{|\overrightarrow{BC} \cdot n|}{|\overrightarrow{BC}| \cdot |n|} = \frac{24\sqrt{41}}{205}$,故直线 BC 与平面

ABD 所成角的正弦值为 $\frac{24\sqrt{41}}{205}$. (12分)

19. 解:(1)依题意, $\hat{b} = \frac{0.11}{10} = 0.011, \hat{a} = 1.02 - 0.011$

$\times 9 = 0.921$,

故线性回归方程为 $y = 0.921 + 0.011x$. (4分)

(2)依题意,每一位市民的购房面积不低于110平方米的概率为 $0.15 + 0.05 = 0.2$.

显然 X 符合二项分布,即 $X \sim B(5, 0.2)$,

所以 $E(X) = 5 \times 0.2 = 1$. (8分)

(3)设模型 $\hat{y} = 0.9369 + 0.0285\sqrt{x}$ 与 $\hat{y} = 0.9554 +$

$0.0306 \ln x$ 的相关系数分别为 R_1^2, R_2^2 ,

则 $R_1^2 = 1 - \frac{0.000591}{0.00605}, R_2^2 = 1 - \frac{0.000164}{0.00605}$,显然 $R_1^2 < R_2^2$.

于是,模型 $\hat{y} = 0.9554 + 0.0306 \ln x$ 的模拟效果更好,

而2020年4月份对应的 $x=18$,因此, $y =$

$0.9554 + 0.0306 \ln 18 = 0.9554 + 0.0306 (\ln 2 +$

$2 \ln 3) \approx 1.044$ 万元/平方米. (12分)

20. 解:(1)设椭圆的焦距为 $2c$,依题意, $a=2c$. (1分)

又椭圆 C 经过点 $(\frac{1}{2}, \frac{3\sqrt{5}}{4})$,

因此得 $\frac{1}{a^2} + \frac{45}{b^2} = 1$. (2分)

结合 $b^2 = a^2 - c^2$,

解得 $a=2, b=\sqrt{3}$,

因此椭圆 C 的标准方程为 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$. (4分)

(2)依题意, l_1, l_2 的直线方程分别为 $x = -2$ 和 $x =$

2. (5分)

设直线 l 的方程为 $y = kx + m$,

则点 E, F 的坐标分别为 $E(-2, -2k + m), F(2, 2k + m)$. (6分)

将直线 l 的方程代入到椭圆 C 中,

化简得 $(4k^2 + 3)x^2 + 8kmx + 4m^2 - 12 = 0$, 当直线 l 和椭圆 C 相切时, 有 $\Delta = 0$ 成立, 即 $(8km)^2 - 4(4k^2 + 3)(4m^2 - 12) = 0$,

化简得 $m^2 = 4k^2 + 3$. (8分)

而 $\triangle EOF$ 的面积 $S = \frac{1}{2} \times |m| \times [2 - (-2)] = 2|m|$. (11分)

由 $k^2 \geq 0$ 知, $|m| \geq \sqrt{3}$, 因此 $\triangle EOF$ 的面积最小值为 $2\sqrt{3}$. (12分)

21. 解: (1) 因为 $f'(x) = \frac{1}{x+1}$,

所以 $f'(1) = \frac{1}{2}$,

又 $f(1) = \ln 2$,

故所求切线方程为 $y - \ln 2 = \frac{1}{2}(x - 1)$,

即 $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} + \ln 2$. (4分)

(2) 令 $g(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} + \ln 2 - \ln(x+1)$,

则 $g'(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{x+1} = \frac{x-1}{2(x+1)}$,

当 $0 < x < 1$ 时, $g'(x) < 0$,

所以当 $x \in (0, 1)$ 时, $g(x)$ 单调递减,

则当 $0 < x \leq 1$ 时, $g(x) \geq g(1) = 0$,

即 $\frac{1}{2}x - \frac{1}{2} + \ln 2 \geq \ln(x+1)$,

令 $x = \frac{1}{n}$ 得 $\frac{1}{2} \times \frac{1}{n} - \frac{1}{2} + \ln 2 \geq \ln\left(\frac{1}{n} + 1\right)$,

故 $\frac{1}{2} \times 1 + \ln 2 - \frac{1}{2} \geq \ln 2$,

$\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \ln 2 - \frac{1}{2} \geq \ln\left(\frac{1}{2} + 1\right) = \ln \frac{3}{2}$,

$\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} + \ln 2 - \frac{1}{2} \geq \ln\left(\frac{1}{3} + 1\right) = \ln \frac{4}{3}$,

...

$\frac{1}{2} \times \frac{1}{n} + \ln 2 - \frac{1}{2} \geq \ln\left(\frac{1}{n} + 1\right) = \ln \frac{n+1}{n}$,

各式累加得 $\frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}\right) + n\left(\ln 2 - \frac{1}{2}\right) \geq \ln 2 + \ln \frac{3}{2} + \dots + \ln \frac{n+1}{n} = \ln\left(2 \cdot \frac{3}{2} \cdot \dots \cdot \frac{n+1}{n}\right) = \ln(n+1)$. (12分)

22. 解: (1) 消去参数 t , 得到直线 l 的普通方程为 $x + y = 4$. (1分)

将 $x = \rho \cos \theta, y = \rho \sin \theta, \rho^2 = x^2 + y^2$ 代入到 C_1, C_2 的极坐标方程中, 化简得曲线 C_1, C_2 的直角坐标方程分别为 $x^2 + y^2 - 4x = 0$ 和 $x^2 + y^2 - 12x + 32 = 0$. (5分)

(2) 将直线 l 的方程转化为参数方程的标准型为

$$\begin{cases} x = 4 - \frac{\sqrt{2}}{2}t, \\ y = \frac{\sqrt{2}}{2}t \end{cases} \quad (t \text{ 为参数}). \quad (6 \text{ 分})$$

将直线 l 参数方程的标准型代入到 C_1 的直角坐标方程中化简得 $t^2 - 2\sqrt{2}t = 0$, 于是解得 $t_1 = 0, t_2 = 2\sqrt{2}$, 结合 t 的几何意义知, 直线 AB 被曲线 C_1 截得的弦长为 $2\sqrt{2}$. (8分)

同理,将直线 l 参数方程的标准型代入到 C_2 的直角坐标方程中化简得 $t^2 + 2\sqrt{2}t = 0$,

于是解得 $t_3 = 0, t_4 = -2\sqrt{2}$, 直线 AB 被曲线 C_2 截得的弦长为 $2\sqrt{2}$, 而 A, B 分别在 C_1, C_2 两条曲线上, 且分别位于 x 轴的上方和下方,

因此 $|AB| = 4\sqrt{2}$. (10分)

23. 解: (1) 当 $a=1$ 时, $f(x) = 2|x-1| + |x+3|$,

当 $x \geq 1$ 时, $f(x) = 3x + 1$,

令 $f(x) \leq 5$ 得 $x \leq \frac{4}{3}$, 此时的解集为 $\left[1, \frac{4}{3}\right]$, (1分)

当 $-3 < x < 1$ 时, $f(x) = 5 - x$,

令 $f(x) \leq 5$ 得 $x \geq 0$, 此时的解集为 $[0, 1)$. (2分)

当 $x \leq -3$ 时, $f(x) = -3x - 1$,

令 $f(x) \leq 5$ 得 $x \geq -2$, 此时的解集为空集. (3分)

综上所述, 当 $a=1$ 时, 取上述三者的并集, 得不等式

$f(x) \leq 5$ 的解集为 $\left[0, \frac{4}{3}\right]$. (4分)

(2) 依题意,

$$\text{函数 } f(x) = \begin{cases} (2+a)x + 3a - 2, & x \geq 1, \\ (a-2)x + 3a + 2, & -3 < x < 1, \\ (-2-a)x + 2 - 3a, & x \leq -3, \end{cases}$$

结合 $0 < a < 2$, 当 $x \leq -3$ 时, 函数 $f(x)$ 单调递减;

当 $-3 < x < 1$ 时, 函数 $f(x)$ 单调递减;

当 $x \geq 1$ 时, 函数 $f(x)$ 单调递增;

所以 $f(x)_{\min} = f(1) = 4a$,

因此, $4a = 5$, 从而 $a = \frac{5}{4}$. (7分)

$$\begin{aligned} \text{于是 } \frac{a}{1-b} + \frac{a}{b} &= \frac{5}{4}(1-b+b) \left(\frac{1}{1-b} + \frac{1}{b} \right) \\ &= \frac{5}{4} \left(2 + \frac{b}{1-b} + \frac{1-b}{b} \right) \geq \frac{5}{4}(2+2) = 5. \end{aligned} \quad (8分)$$

当且仅当 $\frac{b}{1-b} = \frac{1-b}{b}$, 即 $b = \frac{1}{2}$ 时等号成立,

所以当 $b = \frac{1}{2}$ 时, $\frac{a}{1-b} + \frac{a}{b}$ 取得最小值 5. (10分)