



参考答案及解析

理数(五)

一、选择题

1. B 【解析】 $A = \{x \mid |2^x - 2| \leq 2, x \in \mathbb{N}\} = \{0, 1, 2\}$, 所以 $\complement_U A = \{-4, -3, -2, -1, 3, 4\}$, 所以 $(\complement_U A) \cap B = \{-1, 3, 4\}$. 故选 B.

2. C 【解析】因为 $(1+i)(2i-b) = 2i - 2 - b - bi = (-b - 2) + (2 - b)i$, 由复数相等的概念可知 $\begin{cases} -b-2=a, \\ 2-b=b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=-3, \\ b=1, \end{cases}$ 所以 z 的虚部为 1. 故选 C.

3. C 【解析】根据等比数列的性质, 得到 $\frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_4} + \frac{1}{a_6} = \frac{a_2 + a_6}{a_2 a_6} + \frac{1}{a_4} = \frac{a_2 + a_4 + a_6}{a_4^2} = \frac{7}{8}$, 又因为 $a_4 = 4$, 所以由 $\frac{a_2 + a_6 + 4}{16} = \frac{7}{8} \Rightarrow a_2 + a_6 = 10$. 设数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q , 则 $q > 1$, 所以 $\frac{a_1}{q^2} + a_1 q^2 = 10 \Rightarrow \frac{4}{q^2} + 4q^2 = 10 \Rightarrow q^2 = 2$ 或 $q^2 = \frac{1}{2}$ (舍), 所以 $a_2 + a_4 + a_6 + a_8 + a_{10} = \frac{a_4}{q^2} + a_4 + a_4 q^2 + a_4 q^4 + a_4 q^6 = 2 + 4 + 8 + 16 + 32 = 62$. 故选 C.

4. B 【解析】当 $m=1$ 时, $a=(1, 2)$, $b+c=(-1, 1)$, 所以 $a \cdot (b+c) = (1, 2) \cdot (-1, 1) = 1$, $|a| = \sqrt{5}$, 所以向量 $b+c$ 在向量 a 方向上的投影为 $|b+c| \cos \langle a, b+c \rangle = \frac{a \cdot (b+c)}{|a|} = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$, 即充分性成立, 反之由 $a=(m, 2m) \Rightarrow |a| = \sqrt{5}|m|$, $|b+c| \cos \langle a, b+c \rangle = \frac{(m, 2m) \cdot (-1, 1)}{|a|} = \frac{m}{\sqrt{5}|m|}$. 令 $\frac{m}{\sqrt{5}|m|} = \frac{\sqrt{5}}{5} \Rightarrow m > 0$,

不能推出 $m=1$, 即必要性不成立. 所以 $m=1$ 是向量 $b+c$ 在向量 a 方向上的投影为 $\frac{\sqrt{5}}{5}$ 的充分不必要条件. 故选 B.

5. A 【解析】对于第四局比赛结果有 2 种, 而甲胜只是其中一种, 所以 $P = \frac{1}{2}$. 故选 A.

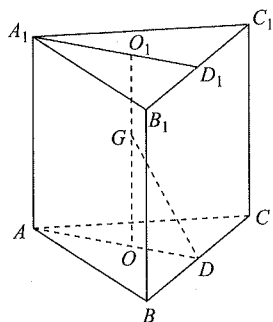
6. B 【解析】由 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1$ 可知左焦点 $F(-2, 0)$, 右顶点为 $A(3, 0)$. 因为点 Q 在圆 $x^2 + y^2 = 1$ 上, 所以设 $Q(\cos \theta, \sin \theta)$, $\theta \in [0, 2\pi)$, 所以 $\overrightarrow{QF} = (-2, 0) - (\cos \theta, \sin \theta) = (-2 - \cos \theta, -\sin \theta)$, $\overrightarrow{QA} = (3, 0) - (\cos \theta, \sin \theta) = (3 - \cos \theta, -\sin \theta)$, 所以 $\overrightarrow{QF} \cdot \overrightarrow{QA} = (-2 - \cos \theta, -\sin \theta) \cdot (3 - \cos \theta, -\sin \theta) = -6 - 3\cos \theta + 2\cos \theta + \cos^2 \theta + \sin^2 \theta = -5 - \cos \theta$, 因为 $\theta \in [0, 2\pi)$, 所以 $\cos \theta \in [-1, 1]$, 所以 $-5 - \cos \theta \in [-6, -4]$. 故选 B.

7. D 【解析】根据题意, 函数 $f(x) = (e^x + e^{-x})x + x^3$, 则 $f(-x) = -x(e^{-x} + e^x) + (-x)^3 = -[x(e^x + e^{-x}) + x^3] = -f(x)$, 即函数 $f(x)$ 为奇函数, 且当 $x > 0$ 时, $f'(x) = (e^x + e^{-x}) + x(e^x - e^{-x}) + 3x^2 > 0$, 所以函数 $f(x)$ 在区间 $(-\infty, +\infty)$ 上为增函数, 由 $f(x^2) > f(2x+3)$, 得 $x^2 > 2x+3 \Rightarrow x < -1$ 或 $x > 3$. 故选 D.

8. D 【解析】由题意, 模拟执行程序框图, 当输入 $i=4$ 时, 符合, 执行第一次运行: $a=1 \times 3+1=4$, $i=3$, 符合; 执行第二次运行: $a=4 \times 3+1=13$, $i=2$, 符合; 执

行第三次运行: $a=13 \times 3+1=40, i=1$, 符合; 执行第四次运行: $a=40 \times 3+1=121, i=0$, 符合; 执行第五次运行: $a=121 \times 3+1=364, i=-1$, 不符合, 终止循环, 退出, 输出 a 的值为 364. 故选 D.

9. C 【解析】如图所示, 设 D, D_1 分别是边 BC, B_1C_1 的中点, 连 AD, A_1D_1 ,



则 O, O_1 分别在 AD, A_1D_1 上, 且 $OO_1 \perp$ 平面 ABC , 所以 $OO_1 \perp BC$, 又 $OD \perp BC$, 所以 $BC \perp$ 平面 ODG , 所以 $BC \perp DG$, 所以 $\angle GDO$ 即为截面 BCG 与平面 ABC 所成的角. 因为所有棱长为 3, 所以 $OD = \frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times 3 = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $OG = \frac{3}{2}$, 在 $\text{Rt}\triangle GOD$ 中, 求得 $\tan \angle GDO = \sqrt{3}$. 故选 C.

10. B 【解析】法一: 由题可知 $f(x) =$

$$\begin{cases} \sqrt{x^2+1} (0 \leq x \leq 1), \\ \sqrt{x^2-2x+3} (1 < x \leq 2), \\ \sqrt{x^2-6x+11} (2 < x \leq 3), \end{cases}$$

其图象是由三段函数图

象构成的, 当 $0 \leq x \leq 1$ 时, $f(x)$ 为增函数, 故可排除 A、C; 当 $1 < x < 2$ 时, $f(x) = \sqrt{x^2-2x+3}$, 则 $2 < 4-x < 3$, $f(4-x) = \sqrt{(4-x)^2-6(4-x)+11} = \sqrt{x^2-2x+3}$, 即 $x \in (1, 2)$ 与 $x \in (2, 3)$ 时, $f(x)$ 的图象关于 $x=2$ 对称, 排除 D. 故选 B.

法二: 由 $f(x)$ 定义可知, 在 $(0, 1)$ 上, $f(x)$ 为增函数,

故排除 A、C, 又正方体是一个关于平面 ABC_1D_1 对称的图形, 所以对应 $f(x)$ 图象是 $(1, 3)$ 上的轴对称图形. 故选 B.

11. D 【解析】由题可知 $F(c, 0)$, 在 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 中, 令 $x=c$, 则 $y = \pm \frac{b^2}{a}$, 不妨设 $A(c, \frac{b^2}{a})$, $B(c, -\frac{b^2}{a})$, 因为 $\triangle ABO$ 为钝角三角形, 由对称性可知 $\angle AOB$ 为钝角, 即有 $\vec{OA} \cdot \vec{OB} < 0 \Rightarrow (c, \frac{b^2}{a}) \cdot (c, -\frac{b^2}{a}) < 0$, 即 $c^2 - (\frac{b^2}{a})^2 < 0 \Rightarrow b^4 > a^2 c^2$, 也就是 $(c^2 - a^2)^2 > a^2 c^2 \Rightarrow c^4 - 3a^2 c^2 + a^4 > 0$, 即 $e^4 - 3e^2 + 1 > 0 \Rightarrow e^2 > \frac{3+\sqrt{5}}{2}$, 或 $e^2 < \frac{3-\sqrt{5}}{2}$ (舍), 所以 $e > \frac{\sqrt{5}+1}{2}$. 故选 D.

12. B 【解析】设 $f(x)$ 的最小正周期为 T , 对称中心与对称轴的距离为 $\frac{T}{4} + \frac{kT}{2} (k \in \mathbf{Z})$, 即 $\frac{5\pi}{18} - (-\frac{2\pi}{9}) = \frac{1}{4} \cdot \frac{2\pi}{\omega} + \frac{k}{2} \cdot \frac{2\pi}{\omega}$, 所以 $\omega = 2k+1$, 因为单调区间 $(\frac{\pi}{9}, \frac{4\pi}{9})$ 在两条相邻对称轴之间, 而函数对称轴为 $x = -\frac{2\pi}{9} + \frac{n\pi}{\omega}$, 故 $\exists n_0 \in \mathbf{Z}$, 使得 $\begin{cases} -\frac{2\pi}{9} + \frac{n_0\pi}{\omega} \leq \frac{\pi}{9}, \\ -\frac{2\pi}{9} + \frac{(n_0+1)\pi}{\omega} \geq \frac{4\pi}{9} \end{cases}$ 所以 $3n_0 \leq \omega \leq \frac{3(n_0+1)}{2}$, 由 $3n_0 \leq \frac{3}{2}(n_0+1)$, 得 $n_0 \leq 1$, 由 $\omega > 1$, 得 $\frac{3(n_0+1)}{2} > 1$, 故 $n_0 > -\frac{1}{3}$, 所以 $n_0 = 0$ 或 1. 当 $n_0 = 0$ 时, $0 \leq \omega \leq \frac{3}{2}$; 当 $n_0 = 1$ 时, $3 \leq \omega \leq 3$, 故 ω 最大值为 3. 故选 B.

二、填空题

13.5 【解析】由题意可得抽样比为 $\frac{25}{500} = \frac{1}{20}$, 所以 C 区

域应抽查的人数为 $\frac{1}{20} \times 100 = 5$.

14.28 【解析】设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d , 则由 $\frac{S_n}{n} -$

$\frac{S_{n-1}}{n-1} = \frac{3}{2}$, 得 $\frac{S_2}{2} - \frac{S_1}{1} = \frac{3}{2} \Rightarrow S_2 - 2S_1 = 3$, 即得 $a_1 +$

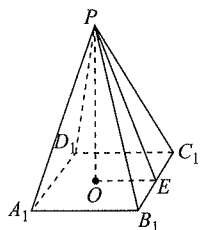
$a_2 - 2a_1 = 3 \Rightarrow d = 3$, 所以 $a_n = 2 + (n-1) \times 3 = 3n -$

1, 所以 $a_2 + a_8 = 5 + 23 = 28$.

15.乙 【解析】由于只有一个同学选对了, 且他们的回答只有两个人说的是对的, 所以分别假设如下:

①假设甲选对了, 则甲、乙、丙、丁四位同学的说法都是错误的, 所以甲选错了; ②假设乙选对了, 则甲、乙的说法是错误的, 而丙、丁的说法是正确的, 故乙选对了; ③假设丙选对了, 则甲、乙、丙三人的说法都正确, 不符合, 所以丙选错了; ④假设丁选对了, 则乙、丙、丁三人的说法都错误, 所以丁同学选错了. 综合上述可知只有乙同学选对了.

16. $\frac{16\sqrt{5}}{375}$ 【解析】在图(一)中, 可知 $AO = BO = CO = DO = 1$, 又由正方形 $A_1B_1C_1D_1$ 的边长为 a , 设点 E 为棱 B_1C_1 的中点(如图所示),



则 $OE = \frac{a}{2}$, $PE = 1 - \frac{a}{2}$ ($0 < a < 1$), 从而 $PO =$

$\sqrt{\left(1 - \frac{a}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{1 - a}$, 所以 $V =$

$\frac{1}{3} S_{\text{正方形} A_1 B_1 C_1 D_1} \cdot PO = \frac{1}{3} \times a^2 \times \sqrt{1 - a} =$

$\frac{1}{3} \sqrt{a^4 - a^5}$. 记 $f(a) = a^4 - a^5$ ($0 < a < 1$), 则 $f'(a)$

$= 4a^3 - 5a^4 = a^3(4 - 5a)$, 令 $f'(a) = 0 \Rightarrow a = \frac{4}{5}$, 当 a

$\in \left(0, \frac{4}{5}\right)$ 时, $f'(a) > 0$, $f(a)$ 单调递增; 当 $a \in$

$\left(\frac{4}{5}, 1\right)$ 时, $f'(a) < 0$, $f(a)$ 单调递减, 所以当 $a = \frac{4}{5}$

时, $f(a)$ 有最大值, 此时 $V_{\max} = \frac{16\sqrt{5}}{375}$.

三、解答题

17. 解: (1) 由 $\sin(B+C) - 2\cos^2 A + 1 = 0$,

得 $\sin A - 2(1 - \sin^2 A) + 1 = 0 \Rightarrow 2\sin^2 A + \sin A - 1$
 $= 0 \Rightarrow (2\sin A - 1)(\sin A + 1) = 0$.

因为 $\triangle ABC$ 中, 有 $\sin A + 1 > 0$,

因此 $\sin A = \frac{1}{2}$,

由题可知 A 为钝角, 所以 $A = \frac{5\pi}{6}$. (3分)

由余弦定理得 $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A = 4 + 3 - 2 \times 2$
 $\times \sqrt{3} \cos \frac{5\pi}{6}$

$= 4 + 3 + 2 \times 2 \times \sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 13 \Rightarrow a = \sqrt{13}$. (6分)

(2) 由 $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = -\sqrt{3}$, 知 $bc = 2$, (8分)

所以 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} bc \sin A = \frac{1}{2}$,

又 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} ah$ (设 $AD = h$),

要使 h 最大, 即只需 a 最小,

而 $a = \sqrt{b^2 + c^2 + 2\sqrt{3}} \geq \sqrt{2bc + 2\sqrt{3}} = \sqrt{4 + 2\sqrt{3}} =$
 $\sqrt{3} + 1$, (10分)

当且仅当 $b = c = \sqrt{2}$ 时, 取等号. (11分)

所以 BC 边上的高 AD 的最大值为 $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$. (12分)

18. 解: (1) 在图一中, 由条件可知矩形 $AEFD$ 与矩形 $BEFC$ 是边长为 4 的两个全等的正方形,

因为 G, H 分别为 AE, FC 的中点,

所以 O 也为 EF 的中点,

由翻折的不变性, 在图二中有 $MF \parallel GO$,

又 $MF \not\subset$ 平面 $GOH, GO \subset$ 平面 GOH ,

所以直线 $MF \parallel$ 平面 GOH . (4 分)

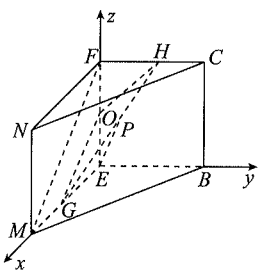
(2) 因为二面角 $M-FE-B$ 为直二面角,

所以 $ME \perp EB$,

又由翻折可知 $EF \perp$ 平面 MEB ,

所以 EM, EB, EF 两两相互垂直, 分别以 $EM, EB,$

EF 为 x, y, z 轴, 建立空间直角坐标系 (如图所示),



由题知 $ME = EB = EF = 4$,

所以 $E(0, 0, 0), G(2, 0, 0), O(0, 0, 2), H(0, 2, 4)$,

(6 分)

设 $\frac{HP}{HG} = t (0 < t < 1)$, 则 $\overrightarrow{HP} = t \overrightarrow{HG}$,

设 $P(x, y, z)$,

$$\begin{cases} x = 2t, \\ y = 2 - 2t, \text{ 即 } P(2t, 2 - 2t, 4 - 4t), \\ z = 4 - 4t, \end{cases}$$

所以 $\overrightarrow{EP} = (2t, 2 - 2t, 4 - 4t)$.

设平面 GOH 的一个法向量为 $\mathbf{n} = (a, b, c)$,

$$\begin{cases} \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{OG} = 0, \\ \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{OH} = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} (a, b, c) \cdot (2, 0, -2) = 0, \\ (a, b, c) \cdot (0, 2, 2) = 0, \end{cases}$$

令 $a = 1$, 得 $\mathbf{n} = (1, -1, 1)$. (8 分)

$$\begin{aligned} \text{所以 } |\cos \langle \overrightarrow{EP}, \mathbf{n} \rangle| &= \left| \frac{\overrightarrow{EP} \cdot \mathbf{n}}{|\overrightarrow{EP}| |\mathbf{n}|} \right| \\ &= \left| \frac{2t + 2t - 2 + 4 - 4t}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{(2t)^2 + (2 - 2t)^2 + (4 - 4t)^2}} \right| \\ &= \left| \frac{1}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{6t^2 - 10t + 5}} \right|. \end{aligned} \quad (10 \text{ 分})$$

因为 EP 与平面 GOH 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{7}}{7}$,

$$\text{所以 } |\cos \langle \overrightarrow{EP}, \mathbf{n} \rangle| = \frac{\sqrt{7}}{7}.$$

$$\text{所以 } \left| \frac{1}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{6t^2 - 10t + 5}} \right| = \frac{\sqrt{7}}{7},$$

$$\text{解得 } t = \frac{1}{3} \text{ 或 } t = \frac{4}{3} \text{ (舍)}.$$

$$\text{所以 } \frac{HP}{HG} = \frac{1}{3}. \quad (12 \text{ 分})$$

19. 解: (1) 依题得准线 l 的方程为 $x = -1$,

所以 $K(-1, 0)$,

设直线 l_1 的方程为: $x = my - 1$,

$$\text{联立方程组 } \begin{cases} x = my - 1, \\ y^2 = 4x \end{cases} \Rightarrow y^2 - 4my + 4 = 0, \text{ 由 } \Delta >$$

0 , 得 $m > 1$ 或 $m < -1$,

设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$,

$$\text{则 } y_1 + y_2 = 4m, y_1 y_2 = 4, \quad (2 \text{ 分})$$

$$\begin{aligned} \text{所以 } |AB| &= \sqrt{1 + m^2} |y_1 - y_2| \\ &= \sqrt{1 + m^2} \sqrt{(y_1 + y_2)^2 - 4y_1 y_2} \\ &= \sqrt{1 + m^2} \cdot \sqrt{16m^2 - 16} = 4\sqrt{m^4 - 1}. \end{aligned} \quad (3 \text{ 分})$$

$$\text{令 } 4\sqrt{m^4 - 1} = 4\sqrt{15} \Rightarrow m = \pm 2,$$

所以所求的直线 l_1 的方程为 $x - 2y + 1 = 0$ 或 $x + 2y + 1 = 0$. (5 分)

(2)当直线 l_2 的斜率为 0 时,和抛物线只有一个交点,不满足题意;

当斜率不为 0 时,可设其方程为 $x=ny+1$,

$$\text{联立方程组} \begin{cases} x=ny+1, \\ y^2=4x \end{cases} \Rightarrow y^2-4ny-4=0, \text{由 } \Delta > 0$$

得 $n \in \mathbf{R}$.

设 $C(x_3, y_3), D(x_4, y_4)$,

$$\text{则 } y_3 + y_4 = 4n, y_3 y_4 = -4. \quad (7 \text{ 分})$$

$$\text{所以 } \overrightarrow{MC} = (x_3 - 4, y_3), \overrightarrow{MD} = (x_4 - 4, y_4).$$

$$\begin{aligned} \text{所以 } \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MD} &= (x_3 - 4, y_3) \cdot (x_4 - 4, y_4) \\ &= 16 - 4(x_3 + x_4) + x_3 x_4 + y_3 y_4 = 5 - 16n^2, \quad (10 \text{ 分}) \end{aligned}$$

$$\text{因为 } \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MD} \geq 1,$$

$$\text{所以 } 5 - 16n^2 \geq 1 \Rightarrow \frac{1}{n^2} \geq 4 \Rightarrow \frac{1}{n} \geq 2 \text{ 或 } \frac{1}{n} \leq -2,$$

故所求直线 l_2 的斜率的取值范围为 $(-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$. (12 分)

$$\begin{aligned} 20. \text{解: (1)} \bar{x} &= 160 \times 0.02 + 170 \times 0.12 + 180 \times 0.22 + \\ &190 \times 0.34 + 200 \times 0.28 + 210 \times 0.02 = 188, \quad (3 \text{ 分}) \\ s^2 &= (-28)^2 \times 0.02 + (-18)^2 \times 0.12 + (-8)^2 \times \\ &0.22 + 2^2 \times 0.34 + 12^2 \times 0.28 + 22^2 \times 0.02 = 120. \quad (6 \text{ 分}) \end{aligned}$$

$$(2) \text{①由 (1) 知 } \bar{x} = 188, s^2 = 120,$$

$$\text{所以 } \mu \text{ 近似值为 } 188, \sigma = \sqrt{s^2} = \sqrt{120} \approx 11.$$

$$\text{由 } P(\mu - 2\sigma < X \leq \mu + 2\sigma) = 0.9544,$$

$$\text{得 } P(166 < X \leq 210) = 0.9544,$$

$$\begin{aligned} \text{所以 } P(X < 166) &= P(X \geq 210) = \frac{1}{2} [1 - P(166 < X \\ &\leq 210)] = \frac{1}{2} (1 - 0.9544) = 0.0228, \quad (8 \text{ 分}) \end{aligned}$$

$$\text{所以产品个数为 } 1000 \times 0.0228 = 22.8 \approx 23 (\text{个}).$$

(10 分)

②由①知抽测的 1000 个零件在 $(\mu - 2\sigma < X \leq \mu + 2\sigma)$ 之外的达到近 46 个,所以超过千分之三,故必须更换. (12 分)

$$21. \text{解: (1) 当 } a=1 \text{ 时, } f(x) = e^x + bx,$$

$$\text{所以 } f'(x) = e^x + b, \quad (1 \text{ 分})$$

①若 $b \geq 0$, 则 $f'(x) = e^x + b > 0$ 恒成立, $f(x)$ 在区间 $(-\infty, +\infty)$ 上单调递增,

函数 $f(x)$ 无极小值,不满足题意; (2 分)

$$\text{②若 } b < 0, \text{ 令 } f'(x) = 0 \Rightarrow e^x + b = 0 \Rightarrow x = \ln(-b),$$

当 $x \in (-\infty, \ln(-b))$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调递减;

当 $x \in (\ln(-b), +\infty)$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增. (3 分)

所以当 $x = \ln(-b)$ 时, $f(x)$ 有极小值,

$$\text{且为 } f(\ln(-b)) = -b + b \ln(-b),$$

$$\text{令 } -b + b \ln(-b) < 0,$$

$$\text{因为 } b < 0, \text{ 所以 } 1 - \ln(-b) < 0 \Rightarrow b < -e,$$

故实数 b 的取值范围是 $(-\infty, -e)$. (5 分)

$$(2) \text{当 } b = -2 \text{ 时, } g(x) = ae^x + x^2 - 2x + 1,$$

$$\text{得到 } g'(x) = ae^x + 2x - 2,$$

$$\text{令 } g'(x) = 0 \Rightarrow ae^x + 2x - 2 = 0 \Rightarrow a = \frac{2-2x}{e^x}, \quad (6 \text{ 分})$$

因为函数 $g(x)$ 有两个极值点 x_1, x_2 ,

$$\text{所以 } g'(x_1) = g'(x_2),$$

$$\text{记 } h(x) = \frac{2-2x}{e^x},$$

$$\text{则有 } h(x_1) = h(x_2),$$

$$\text{又 } h'(x) = \frac{2x-4}{e^x},$$

当 $x \in (-\infty, 2)$ 时, $h(x)$ 单调递减,

当 $x \in (2, +\infty)$ 时, $h(x)$ 单调递增. (8 分)

$$\text{所以 } x_1 < 2 < x_2,$$

$$\begin{aligned} \text{令 } H(x) &= h(2+x) - h(2-x) = \frac{-2-2x}{e^{2+x}} - \frac{-2+2x}{e^{2-x}}, \end{aligned} \quad (9 \text{ 分})$$

$$\text{则 } H'(x) = \frac{2x(e^{2-x} - e^{2+x})}{e^{2+x} \cdot e^{2-x}},$$

当 $x > 0$ 时, $H'(x) < 0$, $H(x)$ 单调递减, 且有 $H(x) < H(0) = 0$,

$$\text{所以 } h(2+x) < h(2-x), \quad (10 \text{ 分})$$

$$\text{所以 } h(x_1) = h(x_2) = h[2 + (x_2 - 2)] < h[2 - (x_2 - 2)] = h(4 - x_2),$$

因为 $x_1 < 2$, $4 - x_2 < 2$, $h(x)$ 在区间 $(-\infty, 2)$ 上单调递减,

$$\text{所以 } x_1 > 4 - x_2, \text{ 即得 } x_1 + x_2 > 4. \quad (12 \text{ 分})$$

$$22. \text{ 解: (1) 圆 } C_1: \begin{cases} x = 2\cos \varphi, \\ y = -1 + 2\sin \varphi \end{cases} \quad \text{消去参数 } \varphi,$$

$$\text{可得圆 } C_1 \text{ 的普通方程为 } x^2 + (y+1)^2 = 4. \quad (2 \text{ 分})$$

$$\text{将 } x^2 + y^2 = \rho^2, x = \rho\cos \theta, y = \rho\sin \theta \text{ 代入 } \rho^2 -$$

$$2\sqrt{5}\rho\cos \theta - 2\rho\sin \theta + a = 0 \text{ 中,}$$

$$\text{得圆 } C_2 \text{ 的直角坐标方程为 } (x-\sqrt{5})^2 + (y-1)^2 = 6 - a (a < 6). \quad (4 \text{ 分})$$

(2) 由(1)知, 圆 C_1 表示圆心为 $(0, -1)$ 、半径为 2

的圆,

圆 C_2 表示圆心为 $(\sqrt{5}, 1)$ 、半径为 $\sqrt{6-a}$ 的圆,

$$\text{两圆圆心的距离 } d = \sqrt{5+2^2} = 3, \quad (6 \text{ 分})$$

要使圆 C_1 与圆 C_2 有公共点,

$$\text{则必须满足 } |r_1 - r_2| \leq d \leq r_1 + r_2, \quad (7 \text{ 分})$$

$$\text{即 } |2 - \sqrt{6-a}| \leq 3 \leq 2 + \sqrt{6-a},$$

$$\text{解得 } -19 \leq a \leq 5,$$

$$\text{故实数 } a \text{ 的取值范围为 } [-19, 5]. \quad (10 \text{ 分})$$

23. 解: (1) 因为 $f(x) \leq 0$, 即为 $|2x+1| - |x-1| \leq 0$,

$$\text{所以 } |2x+1| \leq |x-1| \Rightarrow 4x^2 + 4x + 1 \leq x^2 - 2x + 1,$$

$$\text{所以 } x^2 + 2x \leq 0 \Rightarrow -2 \leq x \leq 0,$$

$$\text{所以不等式 } f(x) \leq 0 \text{ 的解集 } M = \{x | -2 \leq x \leq 0\}.$$

(5 分)

$$(2) \text{ 因为 } 4a^2 + 4b^2 - 16 - a^2b^2 = 4(a^2 - 4) - b^2(a^2 - 4) = (a^2 - 4)(4 - b^2),$$

$$\text{由(1)知, } -2 \leq a \leq 0, -2 \leq b \leq 0,$$

$$\text{所以 } a^2 - 4 \leq 0, 4 - b^2 \geq 0,$$

$$\text{从而有 } (a^2 - 4)(4 - b^2) \leq 0,$$

$$\text{即得 } 4a^2 + 4b^2 \leq 16 + a^2b^2,$$

$$\text{所以 } 16 + a^2b^2 \geq 4a^2 + 4b^2 \text{ 得证.} \quad (10 \text{ 分})$$