



参考答案及解析

文数(五)

一、选择题

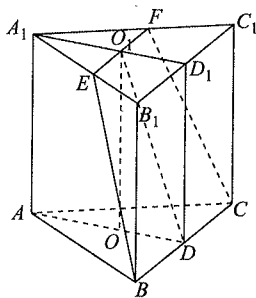
1. D 【解析】因为 $A = \{x | 3^x \leq 9\} = \{x | x \leq 2\}$, 所以 $A \cap B = \{x | -2 < x \leq 2\}$, 所以 $\complement_U(A \cap B) = \{x | x \leq -2 \text{ 或 } x > 2\}$. 故选 D.
2. B 【解析】因为 $z = (2+i)i + \frac{1}{i} = -1+i$, 所以复数 z 在复平面内对应的点 $(-1, 1)$ 在第二象限. 故选 B.
3. C 【解析】甲班学生该分数段成绩的众数为 136, 乙班学生该分数段成绩的众数为 127, 所以 A 正确; 由茎叶图可得甲班学生该分数段成绩的平均分为 $\frac{1691}{13}$, 乙班学生该分数段成绩的平均分为 $\frac{1659}{13}$, 所以 B 正确; 甲班学生该分数段成绩的极差为 31, 乙班学生该分数段成绩的极差为 28, 所以 C 错误; 甲班学生该分数段成绩的中位数为 132, 乙班学生该分数段成绩的中位数为 127, 即中位数不相同, 所以 D 正确. 故选 C.
4. C 【解析】由题意, 当输入 $x=2$ 时, 不符合 $x \leq -1$, 执行 $x=2+3=5$, 此时符合 $x \leq 5$, 执行 $f(5)=5^2=25$, 故输出 $f(x)$ 的值为 25. 故选 C.
5. A 【解析】由于小张在上午 9:30~10:10 之间随机到达会场, 区间长度为 40, 若第一场报告他能听到时间不少于 25 分钟, 则小张应在 9:30~9:35 之间到达会场, 区间长度为 5, 所以所求概率 $P = \frac{5}{40} = \frac{1}{8}$. 故选 A.
6. C 【解析】因为 $\cos \angle POF_1 = -\frac{\sqrt{10}}{5}$, 所以 $\cos \angle POF_2 = \frac{\sqrt{10}}{5}$, 数形结合可知 $\angle POF_2$ 即为过第一三象限的渐近线的倾斜角, 所以 $\tan \angle POF_2 = \frac{\sqrt{6}}{2}$, 又 $\tan \angle POF_2 = \frac{b}{a}$, 所以 $\frac{b}{a} = \frac{\sqrt{6}}{2}$, 故 C 的渐近线方程为 $y = \pm \frac{\sqrt{6}}{2}x$. 故选 C.
7. C 【解析】由题设得, 圆柱的体积 $V = 2000 \times 1.62 =$

3240 立方尺, 又因为圆柱的高 $h = 10 + 3 + \frac{1}{3} = \frac{40}{3}$ 尺, 有 $\frac{40}{3} \times 3r^2 = 3240$, 即 $r = 9$ 尺, 故圆柱的底面周长 $l = 2 \times 3 \times 9 = 54$ 尺. 所以所求谷仓的侧面积为 $S = 54 \times \frac{40}{3} = 720$ (平方尺). 故选 C.

8. B 【解析】因为 $105 = 4 \times 26 + 1$, $26 = 4 \times 6 + 2$, $6 = 4 \times 1 + 2$, $1 = 4 \times 0 + 1$, 由类比思想, 可知 $105 = 1221_{(4)}$. 故选 B.

9. B 【解析】由正弦定理及 $2c - b = 2a \cos B$, 可得 $2 \sin C - \sin B = 2 \sin A \cos B$, 即 $2 \sin(A+B) - \sin B = 2 \sin A \cos B$, 即 $2 \sin A \cos B + 2 \cos A \sin B - \sin B = 2 \sin A \cos B$, 化简得 $\cos A = \frac{1}{2}$, 因为 $0 < A < \pi$, 所以 $A = \frac{\pi}{3}$. 又由余弦定理, 得 $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A = b^2 + c^2 - bc$, 所以 $4 = b^2 + c^2 - bc \geq 2bc - bc$, 即得 $bc \leq 4$, 当且仅当 $b=c$ 时, 等号成立, 此时 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} bc \sin A \leq \frac{1}{2} \times 4 \sin \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$. 故选 B.

10. D 【解析】如图所示,



设 D, D_1 分别为边 BC, B_1C_1 的中点, 连接 AD, A_1D_1, DD_1 . 过点 O_1 作直线 $EF \parallel B_1C_1$, 分别交 A_1B_1, A_1C_1 于点 E, F , 则过棱 BC 与 O_1 的截面即为平面 $BCFE$. 设底面 ABC 的中心为 O , 连接 OO_1 , 则 $OO_1 \perp$ 平面 ABC , 又 $OO_1 \subset$ 平面 ADD_1A_1 , 所以平面 $ABC \perp$ 平面 ADD_1A_1 . 易证 $BC \perp AD$, 平面 $ABC \cap$ 平面 $ADD_1A_1 = AD$, 所以 $BC \perp$ 平面 ADD_1A_1 , 所以

$BC \perp AD, BC \perp OO_1$, 所以 $\angle ODO_1$ 为平面 $BCFE$ 与平面 ABC 所成的二面角的平面角. 因为所有棱长均为 3, 所以 $OD = 3 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $OO_1 = DD_1 = BB_1 = 3$, 所以 $\tan \angle ODO_1 = \frac{OO_1}{OD} = 2\sqrt{3}$. 故选 D.

11. D 【解析】由题得, $F(1, 0)$, 设直线 AB 的方程为 $x = my + n (n > 0, n \neq 1)$, 由 $\begin{cases} x = my + n, \\ y^2 = 4x \end{cases} \Rightarrow y^2 - 4my - 4n = 0$, 显然 $\Delta = 16m^2 + 16n > 0$. 设 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, ($y_1 > 0, y_2 < 0$), 则 $y_1 y_2 = -4n$, 因为 $\vec{OA} \cdot \vec{OB} = x_1 x_2 + y_1 y_2 = \frac{y_1^2 y_2^2}{16} + y_1 y_2 = n^2 - 4n$, 所以 $n^2 - 4n = -3 \Rightarrow n^2 - 4n + 3 = 0 \Rightarrow n = 1$ (舍) 或 $n = 3$, 所以直线 AB 与 x 轴的交点为 $C(3, 0)$, 所以 $S_{\triangle ABO} = \frac{1}{2} |OC| |y_1 - y_2| = \frac{3}{2} (y_1 - y_2) = \frac{3y_1}{2} + \frac{18}{y_1} \geq 2\sqrt{\frac{3y_1}{2} \cdot \frac{18}{y_1}} = 6\sqrt{3}$, 当且仅当 $y_1 = 2\sqrt{3}, y_2 = -2\sqrt{3}$ 时, 等号成立. 综上, $\triangle ABO$ 面积的最小值为 $6\sqrt{3}$. 故选 D.

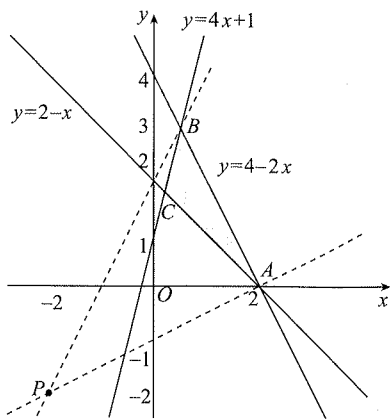
12. A 【解析】设 $g(x) = |x - a|$, 可得 $g(x) = \begin{cases} x - a, & x \geq a, \\ -x + a, & x < a, \end{cases}$ $g(x)$ 与 x 轴的交点为 $(a, 0)$.
- ① 当 $x \geq a$ 时, 由不等式 $f(x) \geq |x - a|$ 对任意 $x \in (0, +\infty)$ 恒成立, 可得临界值时, $f(x)$ 与 $g(x)$ 相切, 此时 $f(x) = x^2 - 2x + 3, x > 1, g(x) = x - a, x \geq a$, 而 $f'(x) = 2x - 2$, 所以 $2x - 2 = 1, x = \frac{3}{2}$, 所以切点坐标为 $(\frac{3}{2}, \frac{9}{4})$, 可得切线方程为 $y = x + \frac{3}{4}$, 所以切线与 x 轴的交点为 $(-\frac{3}{4}, 0)$, 此时 $a = -\frac{3}{4}$, 综合函数图象可得 $a \geq -\frac{3}{4}$;
- ② 当 $x < a$ 时, 由不等式 $f(x) \geq |x - a|$ 对任意 $x \in (0, +\infty)$ 恒成立, 可得临界值时, $f(x)$ 与 $g(x)$ 相切, 此时 $f(x) = 2 - \ln x, x \leq 1, g(x) = -x + a, x < a$, 而 $f'(x) = -\frac{1}{x}$, 所以 $-\frac{1}{x} = -1, x = 1$, 所以切点坐标为 $(1, 2)$, 可得切线方程为 $y = -x + 3$, 所以切线与 x 轴的交点为 $(3, 0)$, 此时 $a = 3$, 综合函数图象可得 $a \leq 3$. 综上, $-\frac{3}{4} \leq a \leq 3$. 故选 A.

二、填空题

13. $\exists x_0 > 0, \frac{x_0 + 1}{x_0} \leq 0$ 或 $x_0 = 0$ 【解析】由题得, 命题

p 的否定 $\neg p$ 是: $\exists x_0 > 0, \frac{x_0 + 1}{x_0} \leq 0$ 或 $x_0 = 0$.

14. $[\frac{1}{2}, 2]$ 【解析】作出不等式组满足约束条件的区域(阴影部分)如图所示,



而 $z = \frac{y+2}{x+2}$ 表示区域内的点与定点 $P(-2, -2)$ 连

线的斜率的取值, 数形结合可知, 当过点 P 的直线过点 A 时, 斜率最小, 当过点 P 的直线过点 B 时, 斜

率最大, 由 $\begin{cases} x + y = 2, \\ 2x + y = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2, \\ y = 0, \end{cases}$ 所以 $A(2, 0)$, 由

$\begin{cases} 2x + y = 4, \\ 4x - y = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2}, \\ y = 3, \end{cases}$ 所以 $B(\frac{1}{2}, 3)$, 所以 $z_{\min}$

$= k_{AP} = \frac{0+2}{2+2} = \frac{1}{2}, z_{\max} = k_{BP} = \frac{3+2}{\frac{1}{2}+2} = 2$, 所以 z 的

取值范围是 $[\frac{1}{2}, 2]$.

15. $\sqrt{2}$ 【解析】由题知, $f(x) = \sin \omega x - \sqrt{3} \cos \omega x =$

$2\sin(\omega x - \frac{\pi}{3})$, $\therefore f(x)$ 的最小正周期为 π , $\therefore \frac{2\pi}{\omega} =$

π , 得 $\omega = 2$, 即 $f(x) = 2\sin(2x - \frac{\pi}{3})$, 将函数 $f(x)$

的图象向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位, 可得 $g(x) = 2\sin[2(x + \frac{\pi}{6}) - \frac{\pi}{3}] = 2\sin 2x$, $\therefore g(\frac{\pi}{8}) = 2\sin \frac{\pi}{4} = \sqrt{2}$.

16. $(1, \frac{2\sqrt{3}}{3}]$ 【解析】设 $\angle AOC = \theta, \theta \in (0, \frac{\pi}{3})$, 则

$\angle COB = \frac{\pi}{3} - \theta$, 由 $\vec{OC} = \lambda \vec{OA} + \mu \vec{OB} \Rightarrow \vec{OC} \cdot \vec{OA} =$

$\lambda \vec{OA} \cdot \vec{OA} + \mu \vec{OB} \cdot \vec{OA}$, 即得 $|\vec{OC}| |\vec{OA}| \cos \theta = \lambda |\vec{OA}|^2 + \mu |\vec{OB}| |\vec{OA}| \cos \frac{\pi}{3}$, 化简得 $\lambda + \frac{1}{2} \mu = \cos \theta$, 同理得 $\frac{1}{2} \lambda + \mu = \cos(\frac{\pi}{3} - \theta)$, 上述两式相加, 得 $\lambda + \mu = \frac{2}{3} [\cos \theta + \cos(\frac{\pi}{3} - \theta)] = \frac{2\sqrt{3}}{3} \sin(\theta + \frac{\pi}{3})$, 因为 $\theta \in (0, \frac{\pi}{3})$, 所以 $\sin(\theta + \frac{\pi}{3}) \in (\frac{\sqrt{3}}{2}, 1]$, 所以 $\lambda + \mu \in (1, \frac{2\sqrt{3}}{3}]$.

三、解答题

17. 解: (1) 当 $n \geq 3$ 时, $2S_n - 2S_{n-2} = a_n^2 - a_{n-1}^2$,

$$\text{即 } 2a_n + 2a_{n-1} = a_n^2 - a_{n-1}^2 = (a_n + a_{n-1})(a_n - a_{n-1}),$$

因为 $a_n > 0$, 所以 $a_n - a_{n-1} = 2$,

即当 $n \geq 3$ 时, $a_n - a_{n-1} = 2$, (3分)

又因为 $a_1 = 1, a_2 = 3$,

所以 $a_2 - a_1 = 2$,

即当 $n \geq 2$ 时, $a_n - a_{n-1} = 2$, 且 $a_1 = 1$,

所以 $\{a_n\}$ 是 1 为首项, 2 为公差的等差数列, (5分)

且 $a_n = 1 + 2(n-1) = 2n-1$. (6分)

(2) 由(1)知, $S_n = \frac{n(1+2n-1)}{2} = n^2$,

所以 $\frac{1}{S_n} = \frac{1}{n^2}$. (7分)

当 $n=1$ 时, $T = \frac{1}{S_1} = 1$, (8分)

当 $n \geq 2$ 时, $\frac{1}{S_n} = \frac{1}{n \cdot n} < \frac{1}{n \cdot (n-1)} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$, (10分)

所以 $T = \frac{1}{S_1} + \frac{1}{S_2} + \frac{1}{S_3} + \dots + \frac{1}{S_n} < 1 + \left[\left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) \right]$
 $= 2 - \frac{1}{n} < 2$.

综上, $T \in [1, 2)$. (12分)

18. 解: (1) 因为 $AC = \sqrt{3}a, BC = a, AB = 2a$,

所以 $AC^2 + BC^2 = AB^2$,

所以 $\angle ACB = 90^\circ$, 即 $BC \perp AC$.

又因为三棱柱为直三棱柱,

所以平面 $ACC_1A_1 \perp$ 平面 ABC , 且交线为 AC ,

所以 $BC \perp$ 平面 ACC_1A_1 .

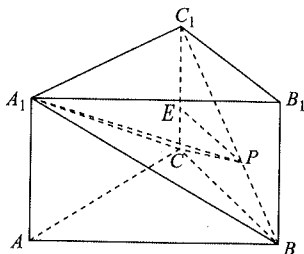
又因为 $BC \subset$ 平面 A_1BC ,

所以平面 $A_1BC \perp$ 平面 ACC_1A_1 . (5分)

(2) 因为 $V_{P-A_1BC} = V_{B-A_1CC_1} - V_{P-A_1CC_1}$,

而 $V_{B-A_1CC_1} = \frac{1}{3} S_{\triangle A_1CC_1} \times BC = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times \sqrt{3}a \times a \times$

$a = \frac{\sqrt{3}}{6} a^3$, (7分)



过点 P 作 $PE \parallel BC$ 交 CC_1 于点 E ,

因为由(1)证明可知, $BC \perp$ 平面 ACC_1A_1 ,

所以 $PE \perp$ 平面 ACC_1A_1 ,

即 PE 为三棱锥 $P-A_1CC_1$ 底面 A_1CC_1 上的高.

因为 $BP = \frac{1}{3} BC$, 所以 $PE = \frac{2}{3} BC = \frac{2}{3} a$, (9分)

所以 $V_{P-A_1CC_1} = \frac{1}{3} S_{\triangle A_1CC_1} \times PE = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times \sqrt{3}a \times a \times \frac{2}{3} a = \frac{\sqrt{3}}{9} a^3$,

所以 $V_{P-A_1BC} = V_{B-A_1CC_1} - V_{P-A_1CC_1} = \frac{\sqrt{3}}{6} a^3 - \frac{\sqrt{3}}{9} a^3 = \frac{\sqrt{3}}{18} a^3$,

所以三棱锥 $P-A_1BC$ 的体积为 $\frac{\sqrt{3}}{18} a^3$. (12分)

19. 解: (1) 由公式及题中有关数据可知,

$$r = \frac{\sum_{i=1}^{10} (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{10} (x_i - \bar{x})^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{10} (y_i - \bar{y})^2}} \approx \frac{49}{19 \times 9} \approx$$

$$0.287 < 0.29,$$

所以这一天生产的零件尺寸不随生产过程的进行而系统地变大或变小. (4分)

(2) (i) $\bar{x} = \frac{1}{10} \times (97 + 98 + 102 + 109 + 108 + 113 + 114 + 105 + 107 + 97) = 105 (\mu\text{m})$, (6分)

$$s^2 = \frac{1}{10} \times [(-8)^2 + (-7)^2 + (-3)^2 + 4^2 + 3^2 + 8^2 + 9^2 + 0^2 + 2^2 + (-8)^2] = 36,$$

所以 $s = 6 (\mu\text{m})$,

所以该批样本零件内径打印数据的平均值为 $105 \mu\text{m}$, 标准差为 $6 \mu\text{m}$. (8分)

(ii)需要重新校对调试.

理由如下:如果 3D 打印机正常工作,打印出的数据应该在 $(\bar{x}-3s, \bar{x}+3s)$ 之内,

由(i)计算数据得,打印出的数据应在 $(87, 123)$ 内,而该日打印的数据 $86 \notin (87, 123)$,

所以需要重新校对调试. (12分)

20. 解:(1)在圆 $M: (x-\sqrt{2})^2 + (y-1)^2 = 1$ 中,

令 $y=0$, 得 $x=\sqrt{2}$,

所以 $F_2(\sqrt{2}, 0)$,

故 $c=\sqrt{2}$. (1分)

因为圆心 $M(\sqrt{2}, 1)$ 在椭圆上,

所以有 $\frac{2}{a^2} + \frac{1}{b^2} = 1$, (2分)

$$\text{联立方程组} \begin{cases} \frac{2}{a^2} + \frac{1}{b^2} = 1, \\ a^2 = b^2 + 2, \end{cases}$$

$$\text{解得} \begin{cases} a=2, \\ b=\sqrt{2}, \end{cases} \quad (4分)$$

所以椭圆 E 的方程为 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1$. (5分)

(2)由题意知,直线 l 的斜率 k 存在,设其方程为 $y=kx-3$,

$$\text{联立} \begin{cases} \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1, \\ y=kx-3 \end{cases} \text{消去 } y,$$

得 $(1+2k^2)x^2 - 12kx + 14 = 0$, (6分)

设点 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$,

所以 $\Delta > 0$, 即 $4k^2 - 7 > 0, x_1 + x_2 = \frac{12k}{1+2k^2}, x_1 x_2 = \frac{14}{1+2k^2}$. (7分)

因为 O 到直线 l 的距离 $d = \frac{3}{\sqrt{1+k^2}}, |AB| =$

$\sqrt{1+k^2} |x_1 - x_2|$, (8分)

所以 $S_{\triangle OAB} = \frac{1}{2} |AB| \cdot d = \frac{3}{2} |x_1 - x_2|$

$$= \frac{3}{2} \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2}$$

$$= \frac{3}{2} \sqrt{\left(\frac{12k}{1+2k^2}\right)^2 - 4 \cdot \frac{14}{1+2k^2}}$$

$$= 3\sqrt{2} \cdot \sqrt{\frac{4k^2 - 7}{(1+2k^2)^2}}. \quad (10分)$$

令 $t = 4k^2 - 7$, 所以 $t > 0, 4k^2 + 2 = t + 9$.

$$\text{所以 } S_{\triangle OAB} = 6\sqrt{2} \cdot \sqrt{\frac{t}{t^2 + 18t + 81}}$$

$$= 6\sqrt{2} \cdot \sqrt{\frac{1}{t + \frac{81}{t} + 18}} \leq 6\sqrt{2} \cdot \sqrt{\frac{1}{18 + 2\sqrt{t \cdot \frac{81}{t}}}}$$

$$= \sqrt{2}. \quad (11分)$$

当且仅当 $t=9$, 即 $k=\pm 2$ 时, $\triangle OAB$ 的面积取最大值 $\sqrt{2}$,

所以 $\triangle OAB$ 面积的最大值为 $\sqrt{2}$. (12分)

21. 解:记 $s=x+1$, 则有 $\varphi(s) = \frac{a \ln s - b}{s} - 1$,

依题得, $\varphi(s)$ 在 $s=e$ 时取得极值, 且 $\varphi(s)$ 有两个零点. (1分)

(1)因为 $\varphi(s) = \frac{a \ln s - b}{s} - 1$,

所以 $\varphi'(s) = \frac{a - a \ln s + b}{s^2} (s > 0)$,

又 $\varphi(s)$ 在 $s=e$ 时取得极值,

所以 $\varphi'(e) = \frac{a - a \ln e + b}{e^2} = 0$,

即 $b=0$, 经检验符合题意. (2分)

所以 $\varphi(s) = \frac{a \ln s}{s} - 1$.

因为 $\varphi(s)$ 有两个零点,

所以方程 $\frac{a \ln s}{s} = 1$ 有两个不同实根,

即为 $\frac{\ln s}{s} = \frac{1}{a}$ 有两个不同实根.

令 $g(s) = \frac{\ln s}{s}$, 则 $g'(s) = \frac{1 - \ln s}{s^2}$,

由 $g'(s) > 0$, 得 $0 < s < e$; 由 $g'(s) < 0$, 得 $s > e$,

所以函数 $g(s) = \frac{\ln s}{s}$ 在 $(0, e)$ 上单调递增, 在 $(e, +\infty)$ 上单调递减,

所以 $g(s)_{\max} = g(e) = \frac{1}{e}$. (4分)

又当 $s > 1$ 时, $g(s) > 0$; 当 $0 < s < 1$ 时, $g(s) < 0$,

因此, 要使方程 $\frac{\ln s}{s} = \frac{1}{a}$ 有两个不同实根, 只需 $y =$

$\frac{1}{a}$ 与 $g(s) = \frac{\ln s}{s}$ 的图象有两个不同交点,

所以 $0 < \frac{1}{a} < \frac{1}{e} \Rightarrow a > e$.

即实数 a 的取值范围为 $(e, +\infty)$. (5分)

(2)因为函数 $f(x)$ 有两个相异零点 x_1, x_2 ,

即 $\varphi(s) = \frac{a \ln s}{s} - 1$ 有两个相异零点 s_1, s_2 , (6分)

所以 $a \ln s_1 = s_1, a \ln s_2 = s_2$, ①

即 $a(\ln s_1 - \ln s_2) = s_1 - s_2$,

即 $\frac{\ln s_1 - \ln s_2}{s_1 - s_2} = \frac{1}{a}$. ②

又 $x_1 x_2 + x_1 + x_2 > e^2 - 1$ 可化为 $(x_1 + 1)(x_2 + 1) > e^2$,

也就是 $s_1 s_2 > e^2$, 等价于 $\ln s_1 + \ln s_2 > 2$,

即 $\frac{1}{a}(s_1 + s_2) > 2$. ③

由①②③, 可得 $\frac{\ln s_1 - \ln s_2}{s_1 - s_2}(s_1 + s_2) > 2$. (8分)

不妨令 $s_1 > s_2 > 0$, 则 $t = \frac{s_1}{s_2} > 1$,

上式可化为 $\ln t > \frac{2(t-1)}{t+1}, t > 1$.

设 $H(t) = \ln t - \frac{2(t-1)}{t+1}, t > 1$,

则 $H'(t) = \frac{(t-1)^2}{t(t+1)^2} > 0$ 在 $(1, +\infty)$ 上恒成立,

故函数 $H(t)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增, (10分)

所以 $H(t) > H(1) = 0$,

即不等式 $\ln t > \frac{2(t-1)}{t+1}$ 成立.

因此, 所证不等式 $s_1 s_2 > e^2$ 成立,

即 $x_1 x_2 + x_1 + x_2 > e^2 - 1$ 成立. (12分)

22. 解: (1) 圆 $C_1: \begin{cases} x = 2\cos \varphi, \\ y = -1 + 2\sin \varphi \end{cases}$ 消去参数 φ ,

可得圆 C_1 的普通方程为 $x^2 + (y+1)^2 = 4$. (2分)

将 $x^2 + y^2 = \rho^2, x = \rho \cos \theta, y = \rho \sin \theta$ 代入 $\rho^2 -$

$2\sqrt{5}\rho \cos \theta - 2\rho \sin \theta + a = 0$ 中,

得圆 C_2 的直角坐标方程为 $(x - \sqrt{5})^2 + (y - 1)^2 = 6 - a (a < 6)$. (4分)

(2) 由(1)知, 圆 C_1 表示圆心为 $(0, -1)$ 、半径为 2 的圆,

圆 C_2 表示圆心为 $(\sqrt{5}, 1)$ 、半径为 $\sqrt{6-a}$ 的圆,

两圆圆心的距离 $d = \sqrt{5+2^2} = 3$, (6分)

要使圆 C_1 与圆 C_2 有公共点,

则必须满足 $|r_1 - r_2| \leq d \leq r_1 + r_2$, (7分)

即 $|2 - \sqrt{6-a}| \leq 3 \leq 2 + \sqrt{6-a}$,

解得 $-19 \leq a \leq 5$,

故实数 a 的取值范围为 $[-19, 5]$. (10分)

23. 解: (1) 因为 $f(x) \leq 0$, 即为 $|2x+1| - |x-1| \leq 0$,

所以 $|2x+1| \leq |x-1| \Rightarrow 4x^2 + 4x + 1 \leq x^2 - 2x + 1$,

所以 $x^2 + 2x \leq 0 \Rightarrow -2 \leq x \leq 0$,

所以不等式 $f(x) \leq 0$ 的解集 $M = \{x | -2 \leq x \leq 0\}$.

(5分)

(2) 因为 $4a^2 + 4b^2 - 16 - a^2 b^2 = 4(a^2 - 4) - b^2(a^2 - 4) = (a^2 - 4)(4 - b^2)$,

由(1)知, $-2 \leq a \leq 0, -2 \leq b \leq 0$,

所以 $a^2 - 4 \leq 0, 4 - b^2 \geq 0$,

从而有 $(a^2 - 4)(4 - b^2) \leq 0$,

即得 $4a^2 + 4b^2 \leq 16 + a^2 b^2$,

所以 $16 + a^2 b^2 \geq 4a^2 + 4b^2$ 得证.

(10分)