

文科数学寒假补充作业 (三)

高三数学 (文) 试题

本试卷满分 150 分. 考试用时 120 分钟.

第 I 卷

一、选择题 (本大题共 12 小题, 每小题 5 分, 满分 60 分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的.)

1. 已知命题 p, q , 则 “ $p \wedge q$ 为假命题” 是 “ $p \vee q$ 为真命题” 的 ()
 - A. 充分不必要条件
 - B. 必要不充分条件
 - C. 充分必要条件
 - D. 既不充分也不必要条件

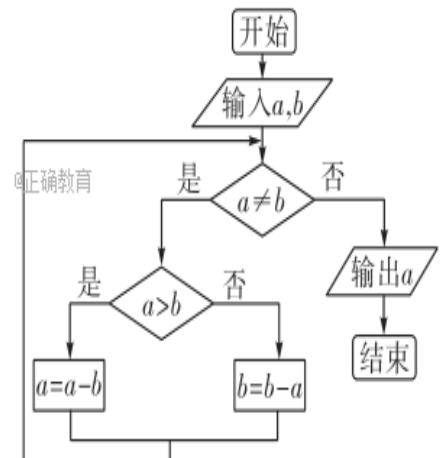
2. 已知集合 $A = \left\{ x \left| \frac{(x-1)(x-4)}{x-2} \leq 0 \right. \right\}$, $B = \{x \in N \mid -1 \leq x \leq 5\}$, 则集合 $A \cap B$ 的子集个数为 ()
 - A. 5
 - B. 4
 - C. 32
 - D. 16

3. 设 i 为虚数单位, 若复数 $Z = \frac{a}{1-i} + i (a \in R)$ 的实部与虚部的和为 $\frac{3}{4}$, 则 $f(x) = (x-1)^a + \frac{3}{x-2}$ 定义域为 ()
 - A. $(1, 2) \cup (2, +\infty)$
 - B. $[1, 2) \cup (2, +\infty)$
 - C. $(1, +\infty)$
 - D. $(1, 2)$

4. $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 且 $A = \frac{\pi}{3}$, $c = 4$, $a = 2\sqrt{6}$, 则角 $C =$ ()
 - A. $\frac{3\pi}{4}$
 - B. $\frac{\pi}{4}$
 - C. $\frac{\pi}{4}$ 或 $\frac{3\pi}{4}$
 - D. $\frac{\pi}{3}$ 或 $\frac{2\pi}{3}$

5. 执行下列程序框图, 若输入 a, b 分别为 98, 63, 则输出的 $a =$ ()
 - A. 12
 - B. 14
 - C. 7
 - D. 9

6. 已知 $f(x) = \sqrt{1-x} + \sqrt{x+3}$, $g(x) = \sqrt{x-1} - \sqrt{x-3}$, 设 $f(x)$ 的最大值为 M , $g(x)$ 的最大值为 N , 则 $\frac{M}{N} =$ ()



- A. 2 B. 1 C. 4 D. 3

7. 曲线 $f(x) = x^3 - x + 1$ 在点 $(1,1)$ 处的切线方程是 ()

- A. $2x - y - 1 = 0$ 或 $x + 4y - 5 = 0$ B. $2x - y - 1 = 0$

- C. $x + y - 2 = 0$ 或 $x + 4y - 5 = 0$ D. $x + y - 2 = 0$

8. 已知函数 $f(x) = \ln(\sqrt{x^2 + 1} - x) - \sin x$, 则对于任意实数 $a, b \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ 且 $a + b \neq 0$,

则 $\frac{f(a) + f(b)}{a + b}$ 的值 ()

- A. 恒负 B. 恒正 C. 恒为 0 D. 不确定

9. 若函数 $f(x) = \frac{d}{ax^2 + bx + c}$ ($a, b, c, d \in \mathbb{R}$) 的图象如图所示, 则下列说法

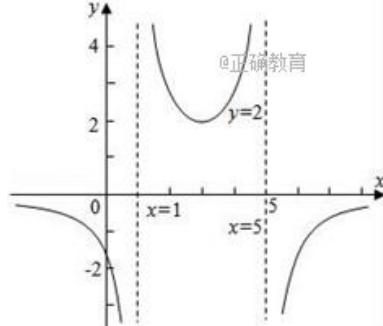
正确的是 ()

- A. $a > 0, b > 0, c > 0, d > 0$

- B. $a > 0, b > 0, c > 0, d < 0$

- C. $a > 0, b < 0, c > 0, d > 0$

- D. $a > 0, b < 0, c > 0, d < 0$



10. 某多面体的三视图如图所示, 正视图中大直角三角形的斜边长为 $\sqrt{5}$, 左视图为边长是

1 的正方形, 俯视图为有一个内角为 45° 的直角梯形, 则该多面体的体积为 ()

- A. 1

- B. $\frac{1}{2}$

- C. $\frac{2}{3}$

- D. 2



11. 若正数 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} x - \frac{2}{x} \leq 4y - \frac{1}{2y}, \\ y \leq \ln x \end{cases}$, 则 $\frac{y^2 + x^2}{xy}$ 的取值范围为 ()

- A. $\left[e + \frac{1}{e}, \frac{17}{4}\right]$ B. $\left[e + \frac{1}{e}, +\infty\right]$ C. $\left[2, \frac{17}{4}\right]$ D. $\left[2, e + \frac{1}{e}\right]$

12. 已知函数 $f(x) = x^2 - ax$, $g(x) = \ln x - e^x$. 在其共同的定义域内, $g(x)$ 的图像不可能

在 $f(x)$ 的上方, 则求 a 的取值范围 ()

- A. $0 < a < \frac{1}{e+1}$ B. $a > 0$ C. $a \leq e+1$ D. $a \leq 0$

第 II 卷

本卷包括必考题和选考题两部分. 第 13 题~第 21 题为必考题, 每个试题考生都必须做答.

第 22 题~第 23 题为选考题, 考生根据要求做答.

二、填空题: 本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 请将答案填在答题卡对应题号的位置上. 答错位置, 书写不清, 模棱两可均不得分.

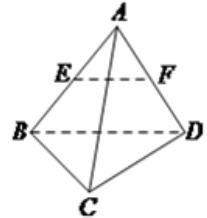
13. 命题 “ $\forall x \in (0, +\infty), \ln x + 2 \leq e^x$ ” 的否定是 _____

14. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} x^{-m^2+2m+3} & (x \geq 1) \\ (2m-1)x + m & (x < 1) \end{cases}$ 在 R 上是单调递增函数, 则 m 的取值范围是 _____

15. 如图, 四面体 $ABCD$ 的每条棱长都等于 2,

点 E , F 分别为棱 AB , AD 的中点, 则 $|\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{EF}| =$ _____;

$|\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{EF}| =$ _____;



16. 对于集合 $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ 和常数 a_0 ,

定义: $t = \frac{\sin^2(a_1 - a_0) + \sin^2(a_2 - a_0) + \dots + \sin^2(a_n - a_0)}{\cos^2(a_1 - a_0) + \cos^2(a_2 - a_0) + \dots + \cos^2(a_n - a_0)}$

为集合 $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ 相对于 a_0 的 “类正切平方”. 则集合 $\left\{\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}\right\}$ 相对于 a_0 的 “类正

切平方” $t =$ _____

三、解答题: (本大题共 6 小题, 满分 70 分, 解答应写出文字说明, 证明过程或演算步骤.)

17. (本小题 12 分) 在数列 $\{a_n\}$ 中, 已知 $a_1 = 1$, $a_{n+1} = 2a_n + 1$ ($n \in N^*$)

(1) 求证: $\{a_n + 1\}$ 是等比数列

(2) 设 $b_n = \frac{a_n + 1}{a_n \cdot a_{n+1}}$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 S_n

18. (本小题 12 分) 已知函数 $f(x) = \cos^2(\omega x - \frac{\pi}{6}) + \sqrt{3} \sin(\omega x - \frac{\pi}{6}) \cos(\omega x - \frac{\pi}{6}) - \frac{1}{2}$

($\omega > 0$) 的最小正周期为 π .

(1) 求 ω 的值

(2) 将函数 $y = f(x)$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位, 再将所得图象上的各点的横坐标伸长到

原来的 2 倍, 纵坐标不变, 得到函数 $g(x)$ 的图象. 求函数 $g(x)$ 在 $[-\pi, \pi]$ 上单调递减区间和零点.

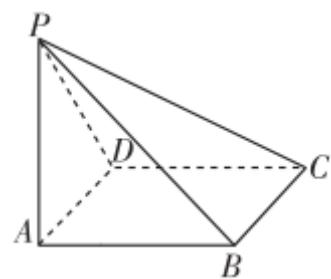
19. (本小题 12 分) 如图, 四棱锥 $P-ABCD$ 中, 底面 $ABCD$ 为菱形, 边长为 1,

$\angle ADC = 120^\circ$, $PA \perp$ 平面 $ABCD$, $\triangle PAD$ 是等腰三角形.

(1) 求证: 平面 $PBD \perp$ 平面 PAC

(2) 在线段 PC, PD 上可以分别找到两点 A' , A'' , 使得直线 $PC \perp$ 平面 $AA'A''$, 并分

别求出此时 $\frac{PA'}{PC}, \frac{PA''}{PD}$ 的值.



20. (本小题 12 分) 已知 $f'(x)$ 是函数 $f(x)$ 的导函数, 且对任意的实数 x 都有

$$f'(x) = e^x(2x+1) + f(x) \quad (e \text{ 是自然对数的底数}), \quad f(0) = 1$$

(1) 求 $f(x)$ 的解析式

(2) 求 $f(x)$ 的单调区间.

21. (本小题 12 分) 已知函数 $f(x) = ax^2 - \frac{\ln x}{x}$, $g(x) = \frac{1}{x}$.

(1) 若函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处取得极值, 求 a 的值, 并判断 $f(x)$ 在 $x=1$ 处取得极大值还是极小值.

(2) 若 $|f(x)| \geq |g(x)|$ 在 $(0,1]$ 上恒成立, 求 a 的取值范围.

22. (本小题满分 10 分) 选修 4—4: 坐标系与参数方程

在平面直角坐标系 xOy 中, 曲线 C 的参数方程是 $C: \begin{cases} x = 3\cos \alpha \\ y = \sin \alpha \end{cases}$ (α 为参数), 直线 l 的参

数方程是 $\begin{cases} x = -t + 2 \\ y = t \end{cases}$ (t 为参数).

- (1) 分别求曲线 C 、直线 l 的普通方程;
- (2) 直线 l 与 C 交于 A, B 两点, 则求 $|AB|$ 的值.

23. (本小题满分 10 分) 选修 4—5: 不等式选讲

已知函数 $f(x) = |2x-1| + |x+2|$, $g(x) = |x+1| - |x-a| + a$

- (1) 求解不等式 $f(x) > 3$;
- (2) 对于 $\forall x_1, x_2 \in R$, 使得 $f(x_1) \geq g(x_2)$ 成立, 求 a 的取值范围.