

文科数学寒假补充作业（三）

高三数学（文）试题

本试卷满分 150 分. 考试用时 120 分钟.

第 I 卷

一、选择题（本大题共 12 小题，每小题 5 分，满分 60 分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.）

1. 已知命题 p, q ，则“ $p \wedge q$ 为假命题”是“ $p \vee q$ 为真命题”的（ ）

- A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
C. 充分必要条件 D. 既不充分也不必要条件

2. 已知集合 $A = \left\{ x \mid \frac{(x-1)(x-4)}{x-2} \leq 0 \right\}$ ， $B = \{x \in \mathbb{N} \mid -1 \leq x \leq 5\}$ ，则集合 $A \cap B$ 的子集个数为（ ）

- A. 5 B. 4 C. 32 D. 16

3. 设 i 为虚数单位，若复数 $Z = \frac{a}{1-i} + i (a \in \mathbb{R})$ 的实部与虚部的和为 $\frac{3}{4}$ ，则

$f(x) = (x-1)^a + \frac{3}{x-2}$ 定义域为（ ）

- A. $(1, 2) \cup (2, +\infty)$ B. $[1, 2) \cup (2, +\infty)$ C. $(1, +\infty)$ D. $(1, 2)$

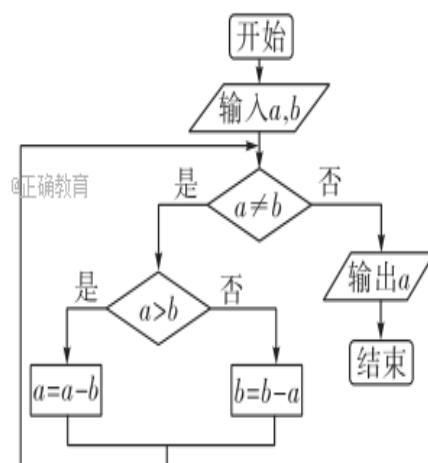
4. $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c ，且 $A = \frac{\pi}{3}$ ， $c = 4$ ， $a = 2\sqrt{6}$ ，则角 $C =$ （ ）

- A. $\frac{3\pi}{4}$ B. $\frac{\pi}{4}$ C. $\frac{\pi}{4}$ 或 $\frac{3\pi}{4}$ D. $\frac{\pi}{3}$ 或 $\frac{2\pi}{3}$

5. 执行下列程序框图，若输入 a, b 分别为 98, 63，则输出的 $a =$

（ ）

- A. 12 B. 14
C. 7 D. 9



6. 已知 $f(x) = \sqrt{1-x} + \sqrt{x+3}$ ， $g(x) = \sqrt{x-1} - \sqrt{x-3}$ ，设 $f(x)$ 的最大值为 M ， $g(x)$ 的

最大值为 N ，则 $\frac{M}{N} =$ （ ）

- A. 2 B. 1 C. 4 D. 3

7. 曲线 $f(x) = x^3 - x + 1$ 在点 $(1, 1)$ 处的切线方程是 ()

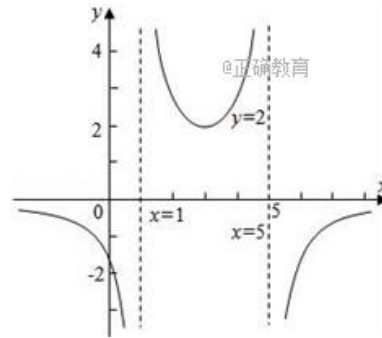
- A. $2x - y - 1 = 0$ 或 $x + 4y - 5 = 0$ B. $2x - y - 1 = 0$
C. $x + y - 2 = 0$ 或 $x + 4y - 5 = 0$ D. $x + y - 2 = 0$

8. 已知函数 $f(x) = \ln(\sqrt{x^2 + 1} - x) - \sin x$, 则对于任意实数 $a, b \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ 且 $a + b \neq 0$,

则 $\frac{f(a) + f(b)}{a + b}$ 的值 ()

- A. 恒负 B. 恒正 C. 恒为 0 D. 不确定

9. 若函数 $f(x) = \frac{d}{ax^2 + bx + c}$ ($a, b, c, d \in \mathbb{R}$) 的图象如图所示, 则下列说法正确的是 ()



- A. $a > 0, b > 0, c > 0, d > 0$
B. $a > 0, b > 0, c > 0, d < 0$
C. $a > 0, b < 0, c > 0, d > 0$
D. $a > 0, b < 0, c > 0, d < 0$

10. 某多面体的三视图如图所示, 正视图中大直角三角形的斜边长为 $\sqrt{5}$, 左视图为边长是 1 的正方形, 俯视图为有一个内角为 45° 的直角梯形, 则该多面体的体积为 ()

- A. 1 B. $\frac{1}{2}$
C. $\frac{2}{3}$ D. 2



11. 若正数 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} x - \frac{2}{x} \leq 4y - \frac{1}{2y} \\ y \leq \ln x \end{cases}$, 则 $\frac{y^2 + x^2}{xy}$ 的取值范围为 ()

- A. $\left[e + \frac{1}{e}, \frac{17}{4}\right]$ B. $\left[e + \frac{1}{e}, +\infty\right)$ C. $\left[2, \frac{17}{4}\right]$ D. $\left[2, e + \frac{1}{e}\right]$

12. 已知函数 $f(x) = x^2 - ax$, $g(x) = \ln x - e^x$. 在其共同的定义域内, $g(x)$ 的图像不可能

在 $f(x)$ 的上方, 则求 a 的取值范围 ()

- A. $0 < a < \frac{1}{e+1}$ B. $a > 0$ C. $a \leq e+1$ D. $a \leq 0$

第 II 卷

本卷包括必考题和选考题两部分. 第 13 题~第 21 题为必考题, 每个试题考生都必须作答.

第 22 题~第 23 题为选考题, 考生根据要求作答.

二、填空题: 本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 请将答案填在答题卡对应题号的位置上. 答错位置, 书写不清, 模棱两可均不得分.

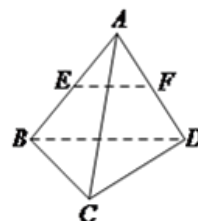
13. 命题“ $\forall x \in (0, +\infty), \ln x + 2 \leq e^x$ ”的否定是_____

14. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} x^{-m^2+2m+3} & (x \geq 1) \\ (2m-1)x + m & (x < 1) \end{cases}$ 在 R 上是单调递增函数, 则 m 的取值范围是__

15. 如图, 四面体 $ABCD$ 的每条棱长都等于 2,

点 E, F 分别为棱 AB, AD 的中点, 则 $|\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{EF}| =$ _____;

$|\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{EF}| =$ _____;



16. 对于集合 $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ 和常数 a_0 ,

定义: $t = \frac{\sin^2(a_1 - a_0) + \sin^2(a_2 - a_0) + \dots + \sin^2(a_n - a_0)}{\cos^2(a_1 - a_0) + \cos^2(a_2 - a_0) + \dots + \cos^2(a_n - a_0)}$

为集合 $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ 相对于 a_0 的“类正切平方”. 则集合 $\left\{\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}\right\}$ 相对于 a_0 的“类正

切平方” $t =$ _____

三、解答题: (本大题共 6 小题, 满分 70 分, 解答应写出文字说明, 证明过程或演算步骤.)

17. (本小题 12 分) 在数列 $\{a_n\}$ 中, 已知 $a_1 = 1$, $a_{n+1} = 2a_n + 1$ ($n \in N^*$)

(1) 求证: $\{a_n + 1\}$ 是等比数列

(2) 设 $b_n = \frac{a_n + 1}{a_n \cdot a_{n+1}}$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 S_n

18. (本小题 12 分) 已知函数 $f(x) = \cos^2(\omega x - \frac{\pi}{6}) + \sqrt{3} \sin(\omega x - \frac{\pi}{6}) \cos(\omega x - \frac{\pi}{6}) - \frac{1}{2}$

($\omega > 0$) 的最小正周期为 π .

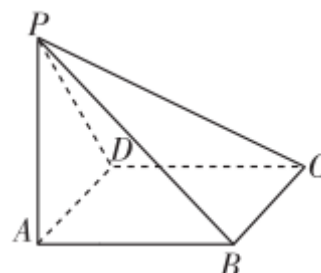
(1) 求 ω 的值

(2) 将函数 $y = f(x)$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位, 再将所得图象上的各点的横坐标伸长到原来的 2 倍, 纵坐标不变, 得到函数 $g(x)$ 的图象. 求函数 $g(x)$ 在 $[-\pi, \pi]$ 上单调递减区间和零点.

19. (本小题 12 分) 如图, 四棱锥 $P-ABCD$ 中, 底面 $ABCD$ 为菱形, 边长为 1, $\angle ADC = 120^\circ$, $PA \perp$ 平面 $ABCD$, $\triangle PAD$ 是等腰三角形.

(1) 求证: 平面 $PBD \perp$ 平面 PAC

(2) 在线段 PC, PD 上可以分别找到两点 A', A'' , 使得直线 $PC \perp$ 平面 $AA'A''$, 并分别求出此时 $\frac{PA'}{PC}, \frac{PA''}{PD}$ 的值.



20. (本小题 12 分) 已知 $f'(x)$ 是函数 $f(x)$ 的导函数, 且对任意的实数 x 都有 $f'(x) = e^x(2x+1) + f(x)$ (e 是自然对数的底数), $f(0) = 1$

(1) 求 $f(x)$ 的解析式

(2) 求 $f(x)$ 的单调区间.

21. (本小题 12 分) 已知函数 $f(x) = ax^2 - \frac{\ln x}{x}$, $g(x) = \frac{1}{x}$.

(1) 若函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处取得极值, 求 a 的值, 并判断 $f(x)$ 在 $x=1$ 处取得极大值还是极小值.

(2) 若 $|f(x)| \geq |g(x)|$ 在 $(0,1]$ 上恒成立, 求 a 的取值范围.

22. (本小题满分 10 分) 选修 4—4: 坐标系与参数方程

在平面直角坐标系 xOy 中, 曲线 C 的参数方程是 $C: \begin{cases} x = 3\cos\alpha \\ y = \sin\alpha \end{cases}$ (α 为参数), 直线 l 的参

数方程是 $\begin{cases} x = -t + 2 \\ y = t \end{cases}$ (t 为参数).

(1) 分别求曲线 C 、直线 l 的普通方程;

(2) 直线 l 与 C 交于 A, B 两点, 则求 $|AB|$ 的值.

23. (本小题满分 10 分) 选修 4—5: 不等式选讲

已知函数 $f(x) = |2x - 1| + |x + 2|$, $g(x) = |x + 1| - |x - a| + a$

(1) 求解不等式 $f(x) > 3$;

(2) 对于 $\forall x_1, x_2 \in \mathbf{R}$, 使得 $f(x_1) \geq g(x_2)$ 成立, 求 a 的取值范围.