寒假补充作业：文科数学综合训练（三）

高三数学（文）试题参考答案

第Ⅰ卷

一、选择题：

1.【答案】D

【解析】“$p\wedge q$为假命题”包括“p假q假”，“p真q假”，“p假q真”，“$p\vee q$为真命题”包括“p真q真”，“p真q假”，“p假q真”

【考点】命题交并的真假，充分必要条件

2【答案】D

【解析】$A=\{x|x\le 1或2<x\le 4\}$，$B=\{0,1,2,3,4,5\}$，$\therefore A\cap B=\{0,1,3,4\}$，$\therefore A\cap B$的子集个数为$2^4=16$

【考点】解不等式，交集的运算，集合子集的个数

3.【答案】A

【解析】易知$a=-\frac{1}{4}$，所以只需满足$x>1且x\neq 2$

【考点】复数，具体函数的定义域.

4.【答案】B

【解析】$\because \frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}$，$\therefore \sin C=\frac{4\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}{2\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，又$\because a>c$，所以角$C=\frac{\pi}{4}$

【考点】正弦定理解三角形.

5.【答案】C

【解析】“更相减损术”求最大公约数

【考点】程序框图

6.【答案】A

【解析】$f(x)$的定义域是$[-3,1]$，$f^2(x)=(\sqrt{1-x}+\sqrt{x+3})^2=4+2\sqrt{-x^2-2x+3}$，当$x=-1$时，$f^2(x)_{\max}=8$，所以$M=2\sqrt{2}$；$g(x)$的定义域是$[3,+\infty)$，$g(x)=\sqrt{x-1}-\sqrt{x-3}=\frac{2}{\sqrt{x-1}+\sqrt{x-3}}$，所以$g(x)_{\max}=N=\sqrt{2}$. $\frac{M}{N}=2$

【考点】函数的最值

7.【答案】B

【解析】因为切点为$(1,1)$，斜率为$k = 3x_0^{\ 2} - 1$=2，则该切点处的切线为$2x-y-1=0$

【考点】曲线上某点处的切线方程

8.【答案】A

【解析】$f(x)=\ln(\sqrt{x^2+1}-x)-\sin x$ 在 $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ 上为奇函数且单调递减．所以

$f(a)+f(b)$与$a+b$同号

【考点】函数的性质.

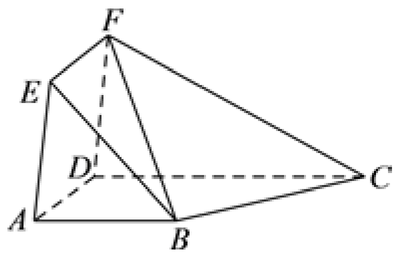
9. 【答案】D

【解析】$ax^2+bx+c=0$ 的两根为 1，5. 所以a,b异号，a,c同号. 又因为$f(0)<0$，所以

c,d 异号

【考点】函数图像

10.【答案】C



【解析】，$V=V_{B-ADFE}+V_{F-BCD}=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$

【考点】三视图

11.【答案】A

【解析】因为$x,y\in R^+$，所以$\begin{cases} x-\frac{2}{x}\le 4y-\frac{1}{2y} \\ y\le \ln x \end{cases}$可

化为$\begin{cases} (x-4y)(1+\frac{1}{2xy})\le 0 \\ y\le \ln x \end{cases}$，即$\begin{cases} \frac{1}{4}\le\frac{y}{x} \\ y\le \ln x \end{cases}$

又因为$\frac{y^2+x^2}{xy}=\frac{y}{x}+\frac{x}{y}$，

所以设$k=\frac{y}{x}$，则约束条件变为$\begin{cases} k\ge\frac{1}{4} \\ kx\le \ln x \end{cases}$，进一步可知约束条件为$\begin{cases} k\ge\frac{1}{4} \\ k\le\frac{1}{e} \end{cases}$，所以

$k\in\left[\frac{1}{4},\frac{1}{e}\right]$，目标函数为$\frac{y^2+x^2}{xy}=k+\frac{1}{k}\in\left[e+\frac{1}{e},\frac{17}{4}\right]$

【考点】线性规划，函数上过某点的切线方程，函数的值域

12.【答案】C

【解析】由题意得$a\le\frac{e^x}{x}+x-\frac{\ln x}{x}$，令$\varphi(x)=\frac{e^x}{x}+x-\frac{\ln x}{x}$，

$\varphi'(x)=\frac{e^x(x-1)}{x^2}+1-\frac{1-\ln x}{x^2}=\frac{e^x(x-1)+x^2-1+\ln x}{x^2}$；

令$t(x)=e^x(x-1)+x^2-1+\ln x$，$t'(x)=e^x\cdot x+2x+\frac{1}{x}>0$，所以$t(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增，又因为$t(1)=0$；当$x\in(0,1)$时，$\varphi(x)$单调递减；当$x\in(1,+\infty)$时，$\varphi(x)$单调递增.

所以$\varphi(x)\ge\varphi(1)=e+1$，所以$a\le e+1$. C 正确.

【考点】导数的应用.

第Ⅱ卷

二、填空题：

13.【答案】$\exists x_0\in(0,+\infty),\ln x_0+2>e^{x_0}$

【解析】“$\exists x_0\in(0,+\infty),\ln x_0+2>e^{x_0}$”

【考点】全称命题和特称命题

14. 【答案】$\left(\frac{1}{2},\frac{2}{3}\right]$

【解析】由$\begin{cases}-m^2+2m+3>0\\2m-1>0\\1\ge 3m-1\end{cases}$可得$\frac{1}{2}<m\le\frac{2}{3}$

【考点】函数的性质

15.【答案】$\sqrt{5}$；$\sqrt{3}$

【解析】$\left|\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{EF}\right|^2=\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{EF}\right)^2=\overrightarrow{AC}^2+\overrightarrow{EF}^2+2\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{EF}=4+1+0=5$，所以$\left|\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{EF}\right|=\sqrt{5}$　设 BD 的中点为G，则$\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BG}=\overrightarrow{GC}$，所以$\left|\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{EF}\right|=\left|\overrightarrow{GC}\right|=\sqrt{3}$

【考点】向量

16.【答案】1

【解析】

$$t=\frac{\sin^2(\frac{\pi}{2}-a_0)+\sin^2(\frac{5\pi}{6}-a_0)+\sin^2(\frac{7\pi}{6}-a_0)}{\cos^2(\frac{\pi}{2}-a_0)+\cos^2(\frac{5\pi}{6}-a_0)+\cos^2(\frac{7\pi}{6}-a_0)}$$

$$=\frac{\cos^2 a_0+\sin^2(\frac{\pi}{6}+a_0)+\sin^2(\frac{\pi}{6}-a_0)}{\sin^2 a_0+\cos^2(\frac{\pi}{6}+a_0)+\cos^2(\frac{\pi}{6}-a_0)}$$

$$=\frac{\cos^2 a_0+(\frac{1}{2}\cos a_0+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin a_0)^2+(\frac{1}{2}\cos a_0-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin a_0)^2}{\sin^2 a_0+(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos a_0-\frac{1}{2}\sin a_0)^2+(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos a_0+\frac{1}{2}\sin a_0)^2}$$

$$=\frac{\cos^2 a_0+\frac{1}{2}\cos^2 a_0+\frac{3}{2}\sin^2 a_0}{\sin^2 a_0+\frac{3}{2}\cos^2 a_0+\frac{1}{2}\sin^2 a_0}=\frac{\frac{3}{2}\cos^2 a_0+\frac{3}{2}\sin^2 a_0}{\frac{3}{2}\cos^2 a_0+\frac{3}{2}\sin^2 a_0}=1$$

【考点】创新题，三角函数

二、**解答题：**

17. **解析**：（1）由 $a_{n+1}=2a_n+1$ 得：$a_{n+1}+1=2(a_n+1)$（$n\in N^*$）

又$\because$ $a_1+1=2$，$\therefore$ $\{a_n+1\}$ 是以 2 为首项，2 为公比的等比数列. ………………5 分

（2） 由（1）知：$a_n+1=2\cdot 2^{n-1}=2^n$，$a_n=2^n-1$ （$n\in N^*$）

$$\therefore b_n=\frac{2^n}{(2^n-1)\cdot(2^{n+1}-1)}=\frac{1}{2^n-1}-\frac{1}{2^{n+1}-1}\ (n\in N^*)$$

$$\therefore S_n=b_1+b_2+\dots+b_n=\frac{1}{2^1-1}-\frac{1}{2^2-1}+\frac{1}{2^2-1}-\frac{1}{2^3-1}+\cdots\cdots+\frac{1}{2^n-1}-\frac{1}{2^{n+1}-1}=1-\frac{1}{2^{n+1}-1}=\frac{2^{n+1}-2}{2^{n+1}-1}$$ ………………………12 分.

18.【解析】（1） $f(x)=\cos^2(\omega x-\frac{\pi}{6})+\sqrt{3}\sin(\omega x-\frac{\pi}{6})\cos(\omega x-\frac{\pi}{6})-\frac{1}{2}$

$$=\frac{1}{2}(2\cos^2(\omega x-\frac{\pi}{6})+2\sqrt{3}\sin(\omega x-\frac{\pi}{6})\cos(\omega x-\frac{\pi}{6})-1)$$

$=\frac{1}{2}$（$\cos(2\omega x-\frac{\pi}{3})+\sqrt{3}\sin(2\omega x-\frac{\pi}{3})$）$=\sin(2\omega x-\frac{\pi}{6})$

由 $T=\frac{2\pi}{2\omega}=\pi$ 得 $\omega=1$ ……………………………………5 分

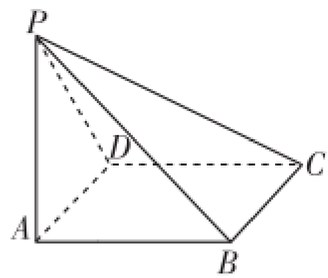
(2) $\Theta\ f(x)=\sin(2x-\frac{\pi}{6})$，$\therefore\ g(x)=\sin(x+\frac{\pi}{6})$ 单调递减区间为：$\left(-\pi,-\frac{2\pi}{3}\right),\left(\frac{\pi}{3},\pi\right)$

零点为 $x_0=k\pi-\frac{\pi}{6}$（$k\in Z$），又因为 $x_0\in[-\pi,\pi]$，所以 $g(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上的零点是 $-\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}$ …………………………12 分

19.【解析】（1）因为 $ABCD$ 为菱形，所以 $AC\perp BD$

又因为 $PA\perp$ 平面 $ABCD$，且 $BD\subset$ 平面 $ABCD$，所以 $PA\perp BD$；所以 $BD\perp$ 平面 PAC；又因为 $BD\subset$ 平面 PBD，

所以平面 $PBD\perp$ 平面 PAC ……………………………5 分



（2）$\Theta\ PC\perp$ 平面 $AA'A''$，$\therefore\ PC\perp AA',PC\perp AA''$

在 $RT\Delta PAC$，$PA^2=PA'\cdot PC$，

又 $\Theta\ PA=1,PC=2$，$\therefore PA'=\frac{1}{2}$，$\therefore\frac{PA'}{PC}=\frac{1}{4}$ …………………………8 分

在 ΔPDC 中，$PD=\sqrt{2},DC=1,PC=2,PA'=\frac{1}{2}$，又 $\Theta\ PA''\cdot\cos\angle DPC=PA'$，

又 $\Theta\ \cos\angle DPC=\frac{PC^2+PD^2-CD^2}{2PC\cdot PD}=\frac{4+2-1}{4\sqrt{2}}=\frac{5}{4\sqrt{2}}$

$\therefore PA''=\frac{2\sqrt{2}}{5}$，$\therefore\frac{PA''}{PD}=\frac{\frac{2\sqrt{2}}{5}}{\sqrt{2}}=\frac{2}{5}$ ………………………………………………12 分

20.【解析】(1) 由 $f'(x)=e^x(2x+1)+f(x)$ 得 $\frac{f'(x)-f(x)}{e^x}=2x+1$，即 $\left(\frac{f(x)}{e^x}\right)'=2x+1$，

所以 $\frac{f(x)}{e^x}=x^2+x+c$

所以 $f(x)=(x^2+x+c)e^x$，又因为 $f(0)=1$，所以 $c=1$

所以函数 $f(x)$ 的解析式是 $f(x)=(x^2+x+1)e^x$ ……………………………………………7 分

（2）$f'(x)=\left(x^2+3x+2\right)e^x$　　$\therefore$　$f(x)$ 的单调递增区间是：$(-\infty,-2),(-1,+\infty)$；$f(x)$ 的单调递减区间是：$(-2,-1)$………………12 分

21. （1）$f(x)$ 的定义域是 $(0,+\infty)$，$f'(x)=2ax-\dfrac{1-\ln x}{x^2}$，由 $f'(1)=0$ 得 $a=\dfrac{1}{2}$.

当 $a=\dfrac{1}{2}$ 时，$f(x)=\dfrac{1}{2}x^2-\dfrac{\ln x}{x}$，$f'(x)=x-\dfrac{1-\ln x}{x^2}=\dfrac{x^3-1+\ln x}{x^2}$

Θ　$x^2>0$ 恒成立，$\therefore$　令 $t(x)=x^3-1+\ln x$，$t'(x)=3x^2+\dfrac{1}{x}>0$ 恒成立

$\therefore t(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，又因为 $t(1)=0$

$\therefore$ 当 $x\in(0,1)$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减；当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增.

$\therefore$　当 $a=\dfrac{1}{2}$ 时，$f(x)$ 在 $x=1$ 处取得极小值. ………………………………5 分

（2）由 $|f(x)|\geq|g(x)|$ 得 $\left|ax^2-\dfrac{\ln x}{x}\right|\geq\left|\dfrac{1}{x}\right|$ 在 $(0,1]$ 上恒成立

即 $\left|ax^3-\ln x\right|\geq 1$ 在 $(0,1]$ 上恒成立.

解法一（将绝对值看成一个函数的整体进行研究）：

令 $\varphi(x)=ax^3-\ln x$，

①当 $a\leq 0$ 时，$\varphi(x)$ 在 $(0,1]$ 上单调递减，$\lim\limits_{x\to 0_+}\varphi(x)=+\infty$，$\varphi(1)=a<0$，所以 $\varphi(x)$ 的值域为：$[a,+\infty)$，因为 $a\leq 0$，所以 $|\varphi(x)|$ 的值域为 $[0,+\infty)$；所以不成立.

②当 $a>0$ 时，易知 $\varphi(x)>0$ 恒成立. $\varphi'(x)=3ax^2-\dfrac{1}{x}=\dfrac{3a}{x}(x^3-\dfrac{1}{3a})$，所以 $\varphi(x)$ 在 $\left(0,\sqrt[3]{\dfrac{1}{3a}}\right)$ 上单调递减，在 $\left(\sqrt[3]{\dfrac{1}{3a}},+\infty\right)$ 上单调递增. 因为 $\varphi(1)\geq 1$，所以 $|a|\geq 1$，所以 $\sqrt[3]{\dfrac{1}{3a}}<1$，所以 $\varphi(x)$ 在 $\left(0,\sqrt[3]{\dfrac{1}{3a}}\right)$ 上单调递减，在 $\left(\sqrt[3]{\dfrac{1}{3a}},1\right)$ 上单调递增. 所以 $\varphi(x)_{\min}=\varphi\left(\sqrt[3]{\dfrac{1}{3a}}\right)$，依题意，$\varphi\left(\sqrt[3]{\dfrac{1}{3a}}\right)\geq 1$，所以 $a\geq\dfrac{e^2}{3}$.

综上：$a\ge\frac{e^2}{3}$

解法二（求命题的否定所对应的集合，再求该集合的补集）：

命题“$\left|ax^3-\ln x\right|\ge 1$对$\forall x\in(0,1]$都成立”的否定是“$\left|ax^3-\ln x\right|<1$在$(0,1]$上有解”

$\left|ax^3-\ln x\right|<1$在$(0,1]$上有解$\Rightarrow -1<ax^3-\ln x<1$在$(0,1]$上有解

$$\Rightarrow \frac{-1+\ln x}{x^3}<a<\frac{1+\ln x}{x^3}\text{在}(0,1]\text{上有解}$$

令$t(x)=\frac{-1+\ln x}{x^3}$，$x\in(0,1]$.

$t'(x)=\frac{\frac{1}{x}\cdot x^3-(-1+\ln x)\cdot 3x^2}{x^6}=\frac{4-3\ln x}{x^4}>0$，所以$t(x)=\frac{-1+\ln x}{x^3}$在$(0,1]$上单调递增，又$\Theta\ \lim\limits_{x\to 0_+}t(x)=-\infty$，所以$t(x)$无最小值.所以$a\in R$；

令$m(x)=\frac{1+\ln x}{x^3}$，$m'(x)=\frac{\frac{1}{x}\cdot x^3-(1+\ln x)\cdot 3x^2}{x^6}=\frac{-2-3\ln x}{x^4}$

所以$m(x)$在$(0,e^{-\frac{2}{3}})$上单调递增，在$(e^{-\frac{2}{3}},1)$上单调递减.

所以$m(x)_{\max}=m(e^{-\frac{3}{2}})=\frac{e^2}{3}$,所以$a<\frac{e^2}{3}$.

因为$\left|ax^3-\ln x\right|<1$在$(0,1]$上有解时，$a<\frac{e^2}{3}$；

所以$\left|ax^3-\ln x\right|\ge 1$对$\forall x\in(0,1]$都成立时，$a\ge\frac{e^2}{3}$.……………………12 分

22. 【解析】（1）C：$\frac{x^2}{9}+y^2=1$；l：$x+y-2=0$ ………………………………4 分

（2）直线l的标准参数方程为$\begin{cases}x=2-\frac{\sqrt{2}}{2}t'\\ y=\frac{\sqrt{2}}{2}t'\end{cases}$，（$t'$为参数）

将l的标准参数方程代入C的直角坐标方程得：$5t'^2-2\sqrt{2}t'-5=0$，所以$t_1'+t_2'=\frac{2\sqrt{2}}{5}$，

$t_1'\cdot t_2'=-1$

$\therefore\ |AB|=|t_1'-t_2'|=\sqrt{(t_1'+t_2')^2-4t_1't_2'}=\dfrac{6\sqrt{3}}{5}$ ………………………………………10 分

【考点】极坐标方程与直角坐标方程的互化，参数方程与普通方程的转换和直线参数方程.

23. 【解析】

（1）由$\begin{cases}x\le -2\\ -3x-1>3\end{cases}$或$\begin{cases}-2<x<\dfrac{1}{2}\\ -x+3>3\end{cases}$或$\begin{cases}x\ge \dfrac{1}{2}\\ 3x+1>3\end{cases}$ 解得：$x<0$ 或 $x>\dfrac{2}{3}$

$\therefore$ 解集为：$(-\infty,0)\cup\left(\dfrac{2}{3},+\infty\right)$ ………………………………………4 分

（2）当 $x=\dfrac{1}{2}$ 时，$f(x)_{\min}=\dfrac{5}{2}$；$g(x)_{\max}=|a+1|+a$

由题意得 $f(x)_{\min}\ge g(x)_{\max}$，得 $|a+1|+a\le\dfrac{5}{2}$ 即 $|a+1|\le\dfrac{5}{2}-a$

$\therefore\begin{cases}\dfrac{5}{2}-a\ge 0\\ (a+1)^2\le\left(\dfrac{5}{2}-a\right)^2\end{cases}$ 解得 $a\le\dfrac{3}{4}$ ………………………………………10 分

【考点】绝对值不等式