

2020 年普通高等学校招生全国统一考试

数学模拟测试参考答案

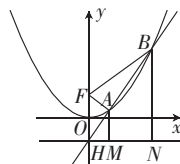
1. B 本题考查 Venn 图. 因为 $A \cap B = \{1, 2, 4\}$, 所以阴影部分表示的集合为 $\{-2, -1, 0, 3\}$, 该集合共有 4 个元素.
2. A 本题考查复数的运算、复数的概念. 依题意, $z = \frac{2+ai}{1-i} = \frac{(2+ai)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{2-a+(a+2)i}{2} = \frac{2-a}{2} + \frac{(a+2)i}{2}$, 因为 $z = \bar{z}$, 所以 $a+2=0$, 解得 $a=-2$.
3. C 本题考查等比中项. $\because a^2=4, \therefore a=\pm 2, \because 4^2=1 \times c, \therefore c=16, ac=\pm 32$.
4. D 本题考查统计图表与用样本估计总体. 私人类电动汽车充电桩保有量增长率最高的年份是 2016 年, 这 5 次统计的公共类电动汽车充电桩保有量的中位数是 21.4 万台, 平均数是 $\frac{4.9+14.1+21.4+30+44.7}{5} = 23.02$ 万台, 故 A、B、C 项错误, D 项正确.
5. D 本题考查对数的运算与估算. 记初始线段长度为 a , “一次构造”后的折线的长度为 $\frac{4a}{3}$, “二次构造”后的折线的长度为 $(\frac{4}{3})^2 a, \dots$, “ n 次构造”后的折线的长度为 $(\frac{4}{3})^n a$, 则要使得到的折线的长度达到原来的 1000 倍, 应满足 $(\frac{4}{3})^n a \geq 1000a, (\frac{4}{3})^n \geq 1000$, 两边同时取对数得 $n \lg \frac{4}{3} \geq \lg 1000 = 3$, 得 $n(2 \lg 2 - \lg 3) \geq 3, n \geq \frac{3}{2 \lg 2 - \lg 3}$. 代入数据得 $n \geq \frac{3}{0.6020 - 0.4771} \approx 24.02$, 故至少需要通过构造的次数是 25.
- 【失分陷阱】**考生不能由复杂的背景抽象出数学模型列出不等式, 考生的数学运算素养不够导致计算错误, 最后一步得出结论时四舍五入导致错误. 解答本题错误的原因主要是抽象概括能力不够与数学运算素养不扎实.
- 【满分秘籍】**由实际问题抽象出正确的数学模型, 平时训练扎实的数学运算素养.
6. B 本题考查程序框图. 第一次循环, $M=104, N=4, a=5$;
第二次循环, $M=109, N=20, a=6$;
第三次循环, $M=115, N=120, a=7$,
此时 $M > N$ 不成立, 输出 $a=7$.
7. C 本题考查二项式定理. 取 $x = \frac{2}{3}$, 可得 $a_0 - \frac{a_1}{3} + \frac{a_2}{3^2} - \frac{a_3}{3^3} + \dots + \frac{a_{10}}{3^{10}} = (\frac{7}{3})^{10}$.
8. D 本题考查函数的性质. $f(-x) = -x \sin(-x) = x \sin x = f(x)$, ①正确; 令 $f(x) = 0$, 得 $x=0$ 或 $\sin x = 0$, 解得 $x=0$ 或 $x = \pm \pi$, ②正确; $f'(x) = \sin x + x \cos x$, 当 $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ 时, $f'(x) = \sin x + x \cos x > 0$, 故 $f(x)$ 在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 上单调递增, ③正确.
9. A 本题考查圆锥、圆柱的体积与侧面积计算. 设圆锥 SC 的底面半径为 r , 高为 $3r$, 则圆柱 OM 的底面半径为 $2r$, 设圆柱 OM 的高为 h , 依题意有 $\frac{1}{3} \pi r^2 \cdot 3r = \pi (2r)^2 h$, 解得 $h = \frac{r}{4}$. 故圆锥 SC 的侧面积为 $\pi r l = \sqrt{10} \pi r^2$, 圆柱 OM 的侧面积为 $2\pi \cdot 2r \cdot \frac{r}{4} = \pi r^2$, 故圆锥 SC 和圆柱 OM 的侧面积之比为 $\sqrt{10} : 1$.

10. B 本题考查三角恒等变换与新定义问题. 由题知集合 $\{-\frac{\pi}{10}, -\frac{\pi}{5}, \frac{3\pi}{10}, \frac{2\pi}{5}\}$ 相对于 x_0 的“余弦方差”为 $\Omega =$

$$\frac{\cos^2(-\frac{\pi}{10}-x_0) + \cos^2(-\frac{\pi}{5}-x_0) + \cos^2(\frac{3\pi}{10}-x_0) + \cos^2(\frac{2\pi}{5}-x_0)}{4}$$

$$= \frac{\frac{1+\cos(\frac{\pi}{5}+2x_0)}{2} + \frac{1+\cos(\frac{2\pi}{5}+2x_0)}{2} + \frac{1+\cos(\frac{3\pi}{5}-2x_0)}{2} + \frac{1+\cos(\frac{4\pi}{5}-2x_0)}{2}}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$

11. B 本题考查抛物线的性质. 如图, 连接 AF, BF , 过 A, B 分别作准线的垂线, 垂足分别为 M, N , 易知 $F(0, 2), H(0, -2), |FH| = 4$. 由角平分线定理可得 $\frac{|BF|}{|FH|} = \frac{|BA|}{|AH|} = 2$, 则



$$\frac{|AH|}{|BH|} = \frac{|AM|}{|BN|} = \frac{1}{3}.$$

$$\therefore |BN| = |BF| = 2|FH| = 8, \therefore |AM| = |AF| = \frac{8}{3}.$$

【解题方法】本题容易将直线与抛物线的方程联立, 依据 $|AB| = 2|AH|$ 得出 A, B 两点横坐标的关系, 结合韦达定理求出 k , 解出 A 点的坐标, 得出 $|AF|$ 的长, 这种解法将小题大做了. 由角平分线定理得出 $\frac{|BF|}{|FH|} = \frac{|BA|}{|AH|} = 2$, $\frac{|AH|}{|BH|} = \frac{|AM|}{|BN|} = \frac{1}{3}$, 避免联立直线与抛物线的方程去解题, 再运用抛物线的性质可得出正确结论. 圆锥曲线的小题首选运用圆锥曲线的性质去处理.

12. A 本题考查函数与方程的综合. 由 $2f(f(m)) + 1 = 2^{f(m)+1}$, 可得 $f(f(m)) = 2^{f(m)} - \frac{1}{2}$, 则 $f(m) \leq 0$.

当 $m \leq 0$ 时, 由 $f(m) = 2^m - \frac{1}{2} \leq 0$, 解得 $m \leq -1$.

当 $m > 0$ 时, $f(m) = \ln m + \frac{1+\ln m}{m} - 1, f'(m) = \frac{m-\ln m}{m^2}$.

令 $g(m) = m - \ln m, g'(m) = 1 - \frac{1}{m} = \frac{m-1}{m}$, 当 $0 < m < 1$ 时, $g'(m) < 0, g(m)$ 单调递减,

当 $m > 1$ 时, $g'(m) > 0, g(m)$ 单调递增, 则 $g(m)$ 的最小值为 $g(1) = 1$,

故 $f'(m) = \frac{m-\ln m}{m^2} > 0, f(m)$ 单调递增, 又 $f(1) = 0$, 故当 $0 < m \leq 1$ 时, $f(m) \leq 0$.

综上所述, 当 $m \in (-\infty, -1] \cup (0, 1]$ 时, $f(m) \leq 0$, 满足 $2f(f(m)) + 1 = 2^{f(m)+1}$.

13. $2\ln 2 - 1$ 本题考查导数的几何意义. $\because f'(x) = 2^x \cdot \ln 2 - \frac{1}{x^2}, \therefore f'(1) = 2\ln 2 - 1$. 由导数的几何意义知曲

线 $f(x) = 2^x + \frac{1}{x}$ 在 $x = 1$ 处的切线的斜率为 $2\ln 2 - 1$.

14. $\frac{2}{3}$ 本题考查平面向量的基本定理. 连接 $AE, \overrightarrow{AF} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AD}$, 则 $m = \frac{1}{2}, n = \frac{3}{4}, \frac{m}{n} = \frac{2}{3}$.

15. $[\frac{5}{2}, +\infty)$ 本题考查等差数列与恒成立问题. 由已知得 $\begin{cases} a_1 + d = 3 \\ a_1 + 4d = 9 \end{cases}$, 解得 $\begin{cases} a_1 = 1 \\ d = 2 \end{cases}$,

所以 $S_n = n + \frac{n(n-1)}{2} \times 2 = n^2$. 因为 $S_n + 4 \leq \lambda \cdot 2^n$ 对任意 $n \in \mathbb{N}^*$ 恒成立,

所以 $\lambda \geq \frac{n^2+4}{2^n}$ 对任意 $n \in \mathbf{N}^*$ 恒成立, 记 $b_n = \frac{n^2+4}{2^n}$, 则 $b_{n-1} = \frac{(n-1)^2+4}{2^{n-1}} (n \geq 2)$,

所以 $b_n - b_{n-1} = \frac{n^2+4}{2^n} - \frac{(n-1)^2+4}{2^{n-1}} = -\frac{n^2-4n+6}{2^n} < 0 (n \geq 2)$, 所以数列 $\{b_n\}$ 是递减数列,

所以 $\{b_n\}$ 的最大项为 $b_1 = \frac{5}{2}$, 所以实数 λ 的取值范围为 $[\frac{5}{2}, +\infty)$.

16. $4\sqrt{2}$ 本题考查双曲线的性质. $\because \angle PBA = \angle PAB + \frac{\pi}{2}, \therefore k_{PA} \cdot k_{PB} = 1$. 设 $P(x_0, y_0)$,

则 $\frac{y_0}{x_0+2} \cdot \frac{y_0}{x_0-2} = \frac{y_0^2}{x_0^2-4} = 1. \because$ 点 P 在双曲线 C 上, $\therefore \frac{x_0^2}{4} - \frac{y_0^2}{b^2} = 1, \frac{y_0^2}{x_0^2-4} = \frac{b^2}{4},$

$\therefore \frac{b^2}{4} = 1, b = 2$, 焦距为 $2\sqrt{4+4} = 4\sqrt{2}$.

17. 解: 本题考查解三角形.

(1) 因为 $\sqrt{3} \sin A \sin(\frac{\pi}{2} - A) = \cos^2 A + \frac{1}{2}$, 所以 $\sin(2A - \frac{\pi}{6}) = 1$,

因为 $A \in (0, \pi)$, 所以 $2A - \frac{\pi}{6} \in (-\frac{\pi}{6}, \frac{11\pi}{6})$, 所以 $2A - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2}, A = \frac{\pi}{3}$ 6 分

(2) 因为 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} bc \sin A = \frac{\sqrt{3}}{4} bc = \frac{\sqrt{3}}{4} a$, 所以 $a = bc$.

又因为 $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \frac{\pi}{3} = b^2 + c^2 - bc$, 由 $b^2 + c^2 \geq 2bc$, 当且仅当 $b = c$ 时取等号, 得 $2bc - bc \leq b^2 + c^2$, 即

$bc \geq 1$, 所以当 $b = c$ 时, bc 取得最小值 1. 12 分

18. 解: 本题考查线面垂直的证明与二面角.

(1) 因为 $AB^2 + AM^2 = 8 = BM^2$, 所以 $AB \perp AM$, 同理可得 $AD \perp AM$.

因为 $AD \cap AB = A$, 所以 $AM \perp$ 平面 $ABCD$ 4 分

(2) 因为 $AB \perp AD$, 所以 AD, AM, AB 两两垂直, 以 A 为坐标原点,

建立如图所示的空间直角坐标系,

因为 $AB = AM = AD = 2$, 所以 $A(0, 0, 0), D(2, 0, 0), M(0, 2, 0), B(0, 0, 2)$,

因为 E 是 BM 的中点, 所以 $E(0, 1, 1)$,

因为 $CD \parallel AB, 2CD = AB$, 所以 $C(2, 0, 1)$,

所以 $\overrightarrow{CE} = (-2, 1, 0), \overrightarrow{DC} = (0, 0, 1)$.

设平面 CED 的一个法向量为 $\mathbf{m} = (x_1, y_1, z_1)$,

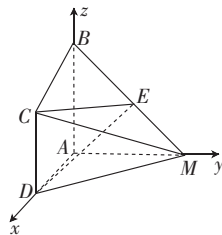
由 $\begin{cases} \mathbf{m} \cdot \overrightarrow{DC} = (x_1, y_1, z_1) \cdot (0, 0, 1) = 0 \\ \mathbf{m} \cdot \overrightarrow{CE} = (x_1, y_1, z_1) \cdot (-2, 1, 0) = 0 \end{cases}$, 得 $\begin{cases} z_1 = 0 \\ -2x_1 + y_1 = 0 \end{cases}$,

取 $x_1 = 1$, 得 $\mathbf{m} = (1, 2, 0)$. 取 DM 的中点 H , 连接 AH , 易证 $AH \perp$ 平面 CDM ,

则平面 CDM 的一个法向量为 $\mathbf{n} = \overrightarrow{AH} = (1, 1, 0)$. 设二面角 $E-CD-M$ 的平面角为 θ ,

由图知 $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$, 所以 $\cos \theta = \frac{|\mathbf{m} \cdot \mathbf{n}|}{|\mathbf{m}| \cdot |\mathbf{n}|} = \frac{(1, 2, 0) \cdot (1, 1, 0)}{\sqrt{1^2+2^2} \times \sqrt{1^2+1^2}} = \frac{3\sqrt{10}}{10}$,

所以二面角 $E-CD-M$ 的余弦值为 $\frac{3\sqrt{10}}{10}$ 12 分



19. 解: 本题考查直线与椭圆的位置关系.

$$(1) \text{ 设 } A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), \text{ 则 } \begin{cases} \frac{x_1^2}{6} + \frac{y_1^2}{2} = 1 \\ \frac{x_2^2}{6} + \frac{y_2^2}{2} = 1 \end{cases}, \text{ 两式相减得 } \frac{x_1^2 - x_2^2}{6} + \frac{y_1^2 - y_2^2}{2} = 0,$$

$$\text{则 } k_{AB} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = -\frac{2(x_1 + x_2)}{6(y_1 + y_2)} = -\frac{2 \times 2}{6 \times 1} = -\frac{2}{3}, \text{ 故直线 } l \text{ 的方程为 } y - \frac{1}{2} = -\frac{2}{3}(x - 1),$$

$$\text{即 } 4x + 6y - 7 = 0. \dots\dots\dots 5 \text{ 分}$$

$$(2) \text{ 由题知 } F(-2, 0), \text{ 故可设直线 } l \text{ 的方程为 } y = k(x + 2).$$

$$\text{当直线 } l \text{ 的斜率 } k = 0 \text{ 时, } |AB| = 2\sqrt{6}, |FN| = 2, \text{ 此时 } \frac{|FN|}{|AB|} = \frac{\sqrt{6}}{6}.$$

$$\text{当直线 } l \text{ 的斜率 } k \text{ 不为 } 0 \text{ 时, 联立 } \begin{cases} \frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{2} = 1 \\ y = k(x + 2) \end{cases}, \text{ 可得 } (1 + 3k^2)x^2 + 12k^2x + 12k^2 - 6 = 0,$$

$$\text{设 } A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), \text{ 由韦达定理知 } x_1 + x_2 = \frac{-12k^2}{1 + 3k^2}, x_1x_2 = \frac{12k^2 - 6}{1 + 3k^2},$$

$$\text{则 } |AB| = \sqrt{1 + k^2} \cdot \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2} = \sqrt{1 + k^2} \times \sqrt{\left(\frac{-12k^2}{1 + 3k^2}\right)^2 - 4} \cdot \frac{12k^2 - 6}{1 + 3k^2} = \frac{2\sqrt{6}(1 + k^2)}{1 + 3k^2}.$$

$$\text{设 } AB \text{ 的中点为 } M(x_0, y_0), \text{ 则 } x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{-6k^2}{1 + 3k^2}, \text{ 又 } y_0 = k(x_0 + 2) = \frac{2k}{1 + 3k^2},$$

$$\text{故直线 } MN \text{ 的方程为 } y - \frac{2k}{1 + 3k^2} = -\frac{1}{k}\left(x + \frac{6k^2}{1 + 3k^2}\right), \text{ 令 } y = 0, \text{ 得 } x_N = \frac{-4k^2}{1 + 3k^2},$$

$$\text{则 } |FN| = \left|\frac{-4k^2}{1 + 3k^2} + 2\right| = \frac{2(k^2 + 1)}{1 + 3k^2}, \text{ 所以 } \frac{|FN|}{|AB|} = \frac{\sqrt{6}}{6}.$$

$$\text{综上所述, } \frac{|FN|}{|AB|} \text{ 为定值. } \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

20. 解: 本题考查函数的单调性与零点.

$$(1) f(x) \text{ 的定义域为 } (0, +\infty), f'(x) = \frac{(e^x - 2a)(x - 1)}{x^2}.$$

$$\text{当 } a \leq \frac{1}{2} \text{ 时, } e^x - 2a > 0, f(x) \text{ 的单调递减区间为 } (0, 1), \text{ 单调递增区间为 } (1, +\infty);$$

$$\text{当 } \frac{1}{2} < a < \frac{e}{2} \text{ 时, } 0 < \ln 2a < 1, f(x) \text{ 的单调递增区间为 } (0, \ln 2a), (1, +\infty), \text{ 单调递减区间为 } (\ln 2a, 1);$$

$$\text{当 } a = \frac{e}{2} \text{ 时, } f'(x) \geq 0, f(x) \text{ 的单调递增区间为 } (0, +\infty);$$

$$\text{当 } a > \frac{e}{2} \text{ 时, } \ln 2a > 1, f(x) \text{ 的单调递增区间为 } (0, 1), (\ln 2a, +\infty), \text{ 单调递减区间为 } (1, \ln 2a). \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

$$(2) \text{ 由(1)知, 当 } a \leq \frac{1}{2} \text{ 时, } f(x) \text{ 的最小值为 } f(1) = e - 2a > 0, \text{ 不合题意};$$

$$\text{当 } \frac{1}{2} < a < \frac{e}{2} \text{ 时, } \because f(x) = \frac{e^x - 2a - 2ax \ln x}{x}, \therefore f(1) = e - 2a > 0,$$

$$\text{且当 } x \rightarrow 0 \text{ 时, } x \ln x \rightarrow 0, f(x) \rightarrow -\infty, \therefore \text{此时符合题意};$$

$$\text{当 } a = \frac{e}{2} \text{ 时, } f(x) = \frac{e^x}{x} - \frac{e}{x} - e \ln x, f(1) = e - e = 0, \text{符合题意};$$

$$\text{当 } a > \frac{e}{2} \text{ 时, } \ln 2a > 1, \text{则 } f(x) \text{ 在 } (0, 1), (\ln 2a, +\infty) \text{ 上单调递增, } f(x) \text{ 在 } (1, \ln 2a) \text{ 上单调递减,}$$

$\because f(x) = \frac{e^x - 2a - 2ax \ln x}{x}$, $\therefore f(1) = e - 2a < 0$, 且当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $f(x) \rightarrow +\infty$, $\therefore$ 此时符合题意.

综上所述, 实数 a 的取值范围为 $(\frac{1}{2}, +\infty)$ 12 分

【解后反思】导数背景下的函数零点个数问题, 应该根据单调性和零点存在性定理来说明. 由函数零点个数求参数范围常常分离参数, 借助函数的单调性考虑函数的图象与极值求解, 或讨论函数的单调性, 结合函数的极值和区间端点处的函数值的正负求解. 含参数的不等式的有解问题, 可转化为恒成立问题来处理, 后者以导数为工具讨论函数的单调性, 从而得到函数的最值, 最后由最值的正负得到不等式成立.

21. 解: 本题考查随机变量的分布列与数列综合.

(1) 一人投掷两颗骰子, 向上的点数之和为 4 的倍数的概率为 $\frac{9}{36} = \frac{1}{4}$.

(i) 因为第 1 次从小明开始, 所以前 4 次投掷中小明恰好投掷 2 次的概率

$$P = \frac{1}{4} \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \times \frac{3}{4} \times \frac{3}{4} + \frac{3}{4} \times \frac{1}{4} \times \frac{3}{4} = \frac{39}{64}. \quad \dots\dots\dots 3 \text{ 分}$$

(ii) 设游戏的前 4 次中, 小芳投掷的次数为 X , 依题意, X 可取 0, 1, 2, 3,

$$\text{所以 } P(X=0) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{64}, P(X=1) = \frac{3}{4} \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \times \frac{3}{4} \times \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} \times \frac{3}{4} = \frac{21}{64},$$

$$P(X=2) = \frac{39}{64}, P(X=3) = \frac{3}{4} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{3}{64}.$$

所以 X 的分布列为

X	0	1	2	3
P	$\frac{1}{64}$	$\frac{21}{64}$	$\frac{39}{64}$	$\frac{3}{64}$

$$\text{所以 } E(X) = 0 \times \frac{1}{64} + 1 \times \frac{21}{64} + 2 \times \frac{39}{64} + 3 \times \frac{3}{64} = \frac{27}{16}. \quad \dots\dots\dots 7 \text{ 分}$$

(2) 若第 1 次从小芳开始, 则第 n 次由小芳投掷骰子有两种情况:

① 第 $n-1$ 次由小芳投掷, 第 n 次继续由小芳投掷, 其概率为 $P_{n_1} = \frac{1}{4} P_{n-1} (n \geq 2)$;

② 第 $n-1$ 次由小明投掷, 第 n 次由小芳投掷,

$$\text{其概率为 } P_{n_2} = (1 - \frac{1}{4})(1 - P_{n-1}) = \frac{3}{4} - \frac{3}{4} P_{n-1} (n \geq 2).$$

$$\text{因为①②两种情形是互斥的, 所以 } P_n = P_{n_1} + P_{n_2} = \frac{1}{4} P_{n-1} + \frac{3}{4} - \frac{3}{4} P_{n-1} = -\frac{1}{2} P_{n-1} + \frac{3}{4} (n \geq 2),$$

$$\text{所以 } P_n - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} (P_{n-1} - \frac{1}{2}) (n \geq 2). \text{ 因为 } P_1 = 1, \text{ 所以 } \{P_n - \frac{1}{2}\} \text{ 是以 } \frac{1}{2} \text{ 为首项, } -\frac{1}{2} \text{ 为公比的等比数列,}$$

$$\text{所以 } P_n - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} (-\frac{1}{2})^{n-1}, \text{ 即 } P_n = \frac{1}{2} - (-\frac{1}{2})^n. \quad \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

22. 解: 本题考查参数方程与极坐标方程的转化、直线参数方程的几何意义.

$$(1) \frac{1 - \cos 2\theta}{1 + \cos 2\theta} = \frac{2\sin^2 \theta}{2\cos^2 \theta} = \tan^2 \theta, y^2 = 4x.$$

因为 $1 + \cos 2\theta \neq 0$, 所以 $\theta \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$, 所以 $y \in \mathbf{R}$,

故曲线 C 的普通方程为 $y^2 = 4x$.

由 $2\rho\sin(\theta-\frac{\pi}{6})+\sqrt{3}=0$, 可得直线 l 的直角坐标方程为 $x-\sqrt{3}y-\sqrt{3}=0$ 5 分

(2) 将曲线 $C: y^2=4x$ 化为极坐标方程, 可得 $\rho\sin^2\theta=4\cos\theta$, 将 $\theta=-\frac{\pi}{6}$ 代入,

可得 $\rho_A\sin^2\frac{\pi}{6}=4\cos\frac{\pi}{6}$, 解得 $\rho_A=8\sqrt{3}$, 同理可得 $\rho_B=1$,

所以 $|AB|=|\rho_A-\rho_B|=8\sqrt{3}-1$ 10 分

23. 解: 本题考查绝对值不等式的解集与恒成立问题.

$$(1) \text{ 当 } a=-1 \text{ 时, } f(x)=|x-5|+|x+2|=\begin{cases} -2x+3, & x\leq -2 \\ 7, & -2<x<5 \\ 2x-3, & x\geq 5 \end{cases}.$$

当 $x\leq -2$ 时, $f(x)=-2x+3\leq 11$, 解得 $x\geq -4$, 此时 $-4\leq x\leq -2$;

当 $-2<x<5$ 时, $f(x)=7\leq 11$, 此时 $-2<x<5$;

当 $x\geq 5$ 时, $f(x)=2x-3\leq 11$, 解得 $x\leq 7$, 此时 $5\leq x\leq 7$.

综上所述, 不等式 $f(x)\leq 11$ 的解集为 $[-4, 7]$ 5 分

(2) 关于 x 的不等式 $f(x)\leq g(x)$ 的解集包含 $[-2, -1]\Leftrightarrow |x+\frac{a^2+4}{a}|+|x+2|\leq 8-|x+3|$ 在 $x\in[-2, -1]$ 上恒成立.

因为 $a<0$, $\frac{a^2+4}{a}<0$, 所以当 $x\in[-2, -1]$ 时, 不等式 $-x-\frac{a^2+4}{a}+x+2\leq 5-x$ 恒成立,

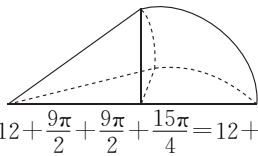
即 $-\frac{a^2+4}{a}\leq 3-x$ 在 $[-2, -1]$ 上恒成立, 即 $-\frac{a^2+4}{a}\leq 4$, 又 $a<0$, $\frac{a^2+4}{-a}\geq 4$, 所以 $\frac{a^2+4}{-a}=4$, 所以 $a=-2$,

故 a 的取值集合是 $\{-2\}$ 10 分

2020 年普通高等学校招生全国统一考试

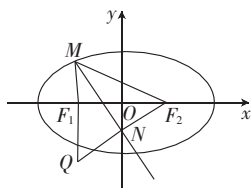
数学模拟测试参考答案

1. D 本题考查集合的运算. 因为 $A = \{x | \frac{x-2}{x+2} \leq 0\} = \{x | -2 < x \leq 2\}$, 所以 $A \cup B = (-2, 3)$.
2. C 本题考查复数的模. 因为 $z = (1+2i)(2-i) = 4+3i$, 所以 $|z| = \sqrt{4^2+3^2} = 5$.
3. C 本题考查茎叶图. 由茎叶图可知, 第一场得分的中位数为 $\frac{5}{2}$, 众数为 0, 平均数为 $\frac{35}{6}$, 方差约为 45.6, 第二场得分的众数为 0, 平均数为 $\frac{19}{3}$, 方差约为 43.2, 所以选项 C 的说法是错误的.
4. C 本题考查双曲线的离心率. 令 $c = \sqrt{a^2+b^2}$, 由题知, $\frac{c}{a} = \frac{5}{3}$, 设 $a = 3k$, 所以 $c = 5k, b = 4k$, 所以 $\frac{|PF_1|}{|PF_2|} = \frac{b+c}{c-b} = \frac{4k+5k}{5k-4k} = 9$.
5. A 本题考查等差数列基本量的求解. 设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d , 因为 $S_{11} = 66$, 所以 $11a_6 = 66$, 解得 $a_6 = 6$, 又因为 $a_3 a_6 + a_9 = 27$, 所以 $(a_6 - 3d)a_6 + (a_6 + 3d) = 27$, 解得 $d = 1$, 所以 $a_n = n$, 又因为 $S_{12} = S_{11} + a_{12}$, 所以 $S_{12} = 66 + 12 = 78$.
6. B 本题考查函数的图象. 因为 $f(-x) = f(x)$, 所以 $f(x)$ 为偶函数, 排除 C, D 项, 又因为 $f(1) = \frac{1-e}{1+e} \ln(\sqrt{2}-1) > 0$, 所以排除 A 项.
7. C 本题考查数学史与立体几何. 由 $V = \frac{1}{6} \pi d^3$, 解得 $\pi = \frac{6V}{d^3}$. 选项 A 化简得 $\frac{V}{d^3} \approx \frac{9}{16}$, 所以 $\pi \approx \frac{6 \times 9}{16} = 3.375$; 选项 B 化简得 $\frac{V}{d^3} \approx \frac{1}{2}$, 所以 $\pi \approx \frac{6}{2} = 3$; 选项 C 化简得 $\frac{V}{d^3} \approx \frac{157}{300}$, 所以 $\pi \approx \frac{6 \times 157}{300} = 3.14$; 选项 D 化简得 $\frac{V}{d^3} \approx \frac{8}{15}$, 所以 $\pi \approx \frac{6 \times 8}{15} = 3.2$. 所以选项 C 的公式最精确.
8. D 本题考查二项展开式. 因为 $(\frac{1}{x} - 1)^5$ 展开式的通项 $T_{r+1} = C_5^r (\frac{1}{x})^{5-r} (-1)^r (r=0, 1, 2, 3, 4, 5)$, 所以 $(\frac{1}{x} - 1)^5$ 展开式中 x^{-2}, x^{-1} 及常数项分别为 $C_5^3 x^{-2} (-1)^3, C_5^4 x^{-1} (-1)^4$ 及 $C_5^5 (-1)^5$, 所以 $(x^2 + x + 1)(\frac{1}{x} - 1)^5$ 展开式中的常数项为 $C_5^3 (-1)^3 + C_5^4 (-1)^4 + C_5^5 (-1)^5 = -6$.
9. A 本题考查三视图. 根据三视图可知, 该几何体是由 $\frac{1}{4}$ 个圆锥和 $\frac{1}{8}$ 个球组成的, 如图所示, 其中球的半径为 3, 圆锥的底面半径也为 3, 高为 4, 母线长为 5, 故该几何体的表面积为 $2 \times \frac{1}{2} \times 3 \times 4 + 2 \times \frac{1}{4} \times \pi \times 3^2 + \frac{1}{8} \times 4 \times \pi \times 3^2 + \frac{1}{4} \times \pi \times 3 \times 5 = 12 + \frac{9\pi}{2} + \frac{9\pi}{2} + \frac{15\pi}{4} = 12 + \frac{51\pi}{4}$.
10. B 本题考查函数的最值. 当 $x > 0$ 时, $f(x) = x + \frac{1}{x} \geq 2 > 1$, 所以 1 是函数 $f(x) = x + \frac{1}{x} (x > 0)$ 的下界, 故
 ① 错误; 因为 $(x \ln x)' = 1 + \ln x$, 所以函数 $f(x) = x \ln x$ 在区间 $(0, e^{-1})$ 上单调递减, 在区间 $(e^{-1}, +\infty)$ 上单调递增, 所以 $f(x) = x \ln x \geq f(e^{-1}) = -e^{-1}$, 故 $f(x) = x \ln x$ 有下界, 无上界, 即 ② 正确; $f(x) = \frac{e^x}{x^2} > 0$, 所



以函数 $f(x)$ 有下界, 故③错误; 因为 $\frac{\sin x}{x^2+1} \leq \left| \frac{\sin x}{x^2+1} \right| \leq \frac{1}{x^2+1} \leq 1$, 所以函数 $|f(x)| \leq 1$, 故函数 $f(x) = \frac{\sin x}{x^2+1}$ 有界, 即④正确.

11. A 本题考查椭圆的性质. 当点 M 在 y 轴左侧时, 如图, 延长 F_2N, MF_1 并相交于 Q 点, 由题知, $MN \perp F_2Q$, 且 MN 平分 $\angle F_1MF_2$, 所以 $MF_2 = MQ$, N 为 F_2Q 的中点, 又因为 O 为 F_1F_2 的中点, 所以 $ON \parallel \frac{1}{2}F_1Q$, 因为 $|ON| = 2$, 所以 $|F_1Q| = 4$, 所以 $4 = ||MF_2| - |MF_1||$, 又因为 $|MF_1| + |MF_2| = 8$, $|MF_2| - |MF_1| = 4$, 解得 $|MF_1| = 2$, $|MF_2| = 6$, 所以 $|MF_2|^2 = |MF_1|^2 + |F_1F_2|^2$, 所以 $MF_1 \perp F_1F_2$, 所以 $|OM| = \sqrt{|OF_1|^2 + |MF_1|^2} = \sqrt{8+4} = 2\sqrt{3}$. 当点 M 在 y 轴右侧时, 同理可得 $|OM| = 2\sqrt{3}$.



12. C 本题考查数列的综合. 因为 $|a_{n+1}| = |a_n + 1|$, 所以 $a_{n+1}^2 = a_n^2 + 2a_n + 1$, 故 $2a_n = a_{n+1}^2 - a_n^2 - 1$, 又因为 $a_1 = 0$, 所以 $a_2^2 = 1$, $2(a_1 + a_2 + \dots + a_{11}) = a_{12}^2 - a_1^2 - 11 = a_{12}^2 - 11$,

所以 $|a_1 + a_2 + \dots + a_{11}| = \frac{1}{2}|a_{12}^2 - 11|$, 由题知, 数列 $\{a_n\}$ 为整数列, 所以 $\frac{1}{2}|a_{12}^2 - 11| \geq \frac{1}{2}|3^2 - 11| = 1$,

当 $a_{12} = 3$ 时, 等号成立, 下面举例说明 a_{12} 可以取到 3,

$a_2 = a_4 = a_6 = a_8 = a_{10} = 1, a_3 = a_5 = a_7 = a_9 = -2, a_{11} = 2, a_{12} = 3$, 所以 $|a_1 + a_2 + \dots + a_{11}|$ 的最小值为 1.

【思路点拨】 本题是以绝对值为背景的数列的综合应用, 综合性较强, 本题有两个难点:

第一, $|a_{n+1}| = |a_n + 1|$ 通过两边平方转化为 $2a_n = a_{n+1}^2 - a_n^2 - 1$, 进一步利用累加求和的形式求数列前 n 项和;

第二, $\frac{1}{2}|a_{12}^2 - 11|$ 最小值的取得对整数的敏感性较强, 后面需要简单验证取等号的条件, 即列举某个特殊数列, 使得 $a_{12} = 3$.

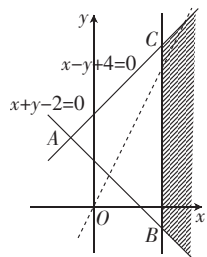
13. $-\frac{1}{2}$ 本题考查向量的垂直. 由题知, $\mathbf{a} - \lambda \mathbf{b} = (1 - \lambda, 2 + \lambda)$, 因为 $(\mathbf{a} - \lambda \mathbf{b}) \perp \mathbf{b}$, 所以 $1 - \lambda - 2 - \lambda = 0$, 解得 $\lambda = -\frac{1}{2}$.

14. 1 本题考查线性规划. x, y 满足约束条件 $\begin{cases} x - y + 4 \geq 0 \\ x + y - 2 \geq 0 \\ x - 3 \geq 0 \end{cases}$, 其可行域如图所示,

所以当目标函数 $z = -2x + y$ 平移到点 C 时取得最大值,

由 $\begin{cases} x - y + 4 = 0 \\ x = 3 \end{cases}$, 解得 $\begin{cases} x = 3 \\ y = 7 \end{cases}$, 即点 $C(3, 7)$,

所以 $z = -2x + y$ 的最大值为 $-2 \times 3 + 7 = 1$.



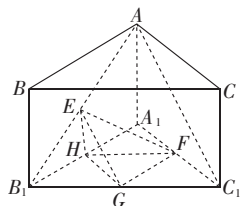
15. $\frac{2\pi}{3}$ 本题考查三角函数的性质. 因为点 $(\frac{2\pi}{3}, 0)$ 和 $(\frac{7\pi}{6}, 0)$ 是函数 $f(x)$ 图象上相邻的两个对称中心, 所以 $\frac{\pi}{\omega} = \frac{7\pi}{6} - \frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{2}$, 解得 $\omega = 2$, 所以 $2 \times \frac{2\pi}{3} + \varphi = k\pi$, 即 $\varphi = k\pi - \frac{4\pi}{3} (k \in \mathbf{Z})$, 又因为 $0 < \varphi < \pi$, 所以 $\varphi = \frac{2\pi}{3}$.

16. $\frac{\sqrt{3}}{4}$ 本题考查异面直线所成角. 因为平面 $\alpha \parallel$ 平面 $A_1B_1C_1$,

平面 $\alpha \cap$ 平面 $A_1B_1C_1 = l$, 平面 $A_1B_1C \cap$ 平面 $A_1B_1C_1 = A_1B_1$,

所以 $l \parallel A_1B_1$, 取 A_1B_1, B_1C_1 的中点分别为 H, G ,

连接 EH, EG, GH, GF, AC_1 , 如图所示, 则 $GF \parallel A_1B_1$, 所以 $GF \parallel l$, 所以异面直线



EF 与 l 所成的角为 $\angle GFE$ 或其补角, 又因为 $AB=2\sqrt{3}$, $AA_1=2$, 所以 $AC_1=4$, $EH=1$, $HF=GF=\sqrt{3}$, 所

$$\text{以 } EG=EF=2, \text{ 所以 } \cos \angle GFE = \frac{\frac{GF}{2}}{\frac{EF}{2}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{2}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

【解题方法】 本题以三棱柱为载体, 综合考查异面直线所成角的概念. 解答的基本方法是通过平移直线, 把异面直线平移到两条相交直线上, 明确异面直线所成角的概念, 应用三角函数知识求解, 充分利用图形特征, 则可事半功倍. 例如本题利用图形易得 $l \parallel A_1B_1$, 这是本题的题眼.

17. 解: 本题考查解三角形的综合应用.

$$(1) \text{ 因为 } (a \cos C + c \cos A) \tan A = \sqrt{3}b,$$

$$\text{所以 } (\sin A \cos C + \sin C \cos A) \tan A = \sqrt{3} \sin B, \text{ 即 } \sin(A+C) \tan A = \sqrt{3} \sin B,$$

$$\text{又因为 } A+B+C=\pi, \text{ 所以 } \sin(A+C) = \sin B \neq 0, \text{ 所以 } \tan A = \sqrt{3}, \text{ 故 } A = \frac{\pi}{3}. \dots\dots\dots 5 \text{ 分}$$

$$(2) \text{ 设 } \angle OBC = \alpha, \text{ 因为 } O \text{ 为 } \triangle ABC \text{ 的内心, 且 } A = \frac{\pi}{3}, \text{ 所以 } \angle BOC = \frac{2\pi}{3},$$

$$\text{所以 } \angle OCB = \frac{\pi}{3} - \alpha, \text{ 在 } \triangle OBC \text{ 中, } \frac{OC}{\sin \alpha} = \frac{OB}{\sin(\frac{\pi}{3} - \alpha)} = \frac{\sqrt{3}}{\sin \frac{2\pi}{3}} = 2, \text{ 所以 } OC = 2 \sin \alpha, OB = 2 \sin(\frac{\pi}{3} - \alpha), \text{ 所}$$

$$\text{以 } OB + OC = 2 \sin \alpha + 2 \sin(\frac{\pi}{3} - \alpha) = 2 \sin(\alpha + \frac{\pi}{3}) \leq 2, \text{ 当且仅当 } \alpha = \frac{\pi}{6}, \text{ 即 } \triangle ABC \text{ 为等边三角形时取等号,}$$

$$\text{故 } OB + OC \text{ 的最大值为 } 2. \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

18. 解: 本题考查面面平行及线面角.

(1) 因为 $BC \parallel AD$, $AD = 2BC$, E 为线段 AD 的中点, 所以 $BC \parallel AE$, 连接 EC , 因为 $AB \perp AD$, 所以四边形 $ABCE$ 为矩形, 连接 BE 交 AC 于点 O , 连接 GO , 图略. 因为 G 为线段 PB 的中点, 所以 $GO \parallel PE$, 因为 $GO \not\subset$ 平面 PEF , $PE \subset$ 平面 PEF , 所以 $GO \parallel$ 平面 PEF . 由题易知, $AC \parallel$ 平面 PEF , 又因为 $GO \subset$ 平面 GAC , $AC \subset$ 平面 GAC , $AC \cap GO = O$, 所以平面 $PEF \parallel$ 平面 GAC . $\dots\dots\dots 5 \text{ 分}$

(2) 因为 $PA \perp$ 底面 $ABCD$, $AB \perp AD$, 所以 AB, AD, AP 两两垂直, 故分别以 AB, AD, AP 所在直线为 x, y, z 轴建立如图所示的空间直角坐标系,

$$\text{因为 } AD = 2BC = 2PA = 2, AB = 1, \text{ 所以 } G(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}), C(1, 1, 0), D(0, 2, 0), P(0, 0, 1), \text{ 所以 } \vec{GC} = (\frac{1}{2}, 1, -\frac{1}{2}), \vec{PC} = (1, 1, -1), \vec{PD} = (0, 2, -1).$$

$$\text{设平面 } PCD \text{ 的法向量为 } \vec{n} = (x, y, z), \text{ 所以 } \begin{cases} \vec{n} \cdot \vec{PC} = 0 \\ \vec{n} \cdot \vec{PD} = 0 \end{cases}, \text{ 即 } \begin{cases} x + y - z = 0 \\ 2y - z = 0 \end{cases},$$

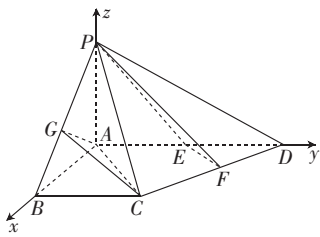
令 $y = 1$, 解得 $x = 1, z = 2$, 所以平面 PCD 的一个法向量为 $(1, 1, 2)$. 设直线 GC 与平面 PCD 所成的角为 θ ,

$$\text{所以 } \sin \theta = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{GC}|}{|\vec{n}| \cdot |\vec{GC}|} = \frac{1 \times \frac{1}{2} + 1 \times 1 + 2 \times (-\frac{1}{2})}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 2^2} \times \sqrt{\frac{1}{4} + 1 + \frac{1}{4}}} = \frac{1}{6}, \text{ 故直线 } GC \text{ 与平面 } PCD \text{ 所成角的正弦}$$

$$\text{值为 } \frac{1}{6}. \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

19. 解: 本题考查抛物线的性质.

$$(1) \text{ 因为 } |PF| = 10, \text{ 所以 } 8 + \frac{p}{2} = 10, \text{ 解得 } p = 4, \text{ 所以 } F(2, 0), \text{ 因为 } t^2 = 8 \times 8, \text{ 且 } t < 0, \text{ 所以 } t = -8, \text{ 所以 } P(8, -8), \text{ 故直线 } PF \text{ 的方程为 } y - 0 = \frac{-8 - 0}{8 - 2}(x - 2), \text{ 化简得 } 4x + 3y - 8 = 0. \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$$



(2)由(1)知,抛物线 C 的方程为 $y^2=8x$,联立方程 $\begin{cases} y^2=8x \\ 4x+3y-8=0 \end{cases}$,得 $y^2+6y-16=0$,

解得 $y=-8$ 或 $y=2$,即 $Q(\frac{1}{2}, 2)$,所以 $|PQ|=\sqrt{1+(-\frac{3}{4})^2}|-8-2|=\frac{25}{2}$.

设直线 m 的方程为 $y+8=k(x-8)$,联立 $\begin{cases} y^2=8x \\ y+8=k(x-8) \end{cases}$,得 $ky^2-8y-64k-64=0$,由 $\Delta=0$,解得 $k=-\frac{1}{2}$,所以直线 m 的方程为 $x+2y+8=0$,同理可得直线 n 的方程为 $2x-y+1=0$,由 $\begin{cases} x+2y+8=0 \\ 2x-y+1=0 \end{cases}$ 解得

$\begin{cases} x=-2 \\ y=-3 \end{cases}$,即 $G(-2, -3)$,设点 $G(-2, -3)$ 到直线 PQ 的距离为 d ,

$d=\frac{|4 \times (-2)+3 \times (-3)-8|}{\sqrt{3^2+4^2}}=5$,所以 $\triangle PQG$ 的面积为 $\frac{1}{2} \times 5 \times \frac{25}{2}=\frac{125}{4}$ 12 分

【解题思路】解决直线与抛物线的综合问题时,需要注意:

- (1)观察、应用题设中的每一个条件,明确确定直线、抛物线的条件;
- (2)强化有关直线与抛物线联立得出一元二次方程后的运算能力,重视根与系数之间的关系、弦长、斜率、三角形的面积等问题;
- (3)注重平面几何的知识,利用数形结合的思想处理问题.

20. 解:本题考查概率统计.

(1)由题知,每位员工首轮测试被认定为“暂定”的概率为 $C_3^2 p^2(1-p)+C_3^3 p^3$,每位员工再次测试被认定为“暂定”的概率为 $C_3^1 p(1-p)^2[1-(1-p)^2]$,综上知,每位员工被认定为“暂定”的概率 $f(p)=C_3^2 p^2(1-p)+C_3^3 p^3+C_3^1 p(1-p)^2[1-(1-p)^2]=-3p^5+12p^4-17p^3+9p^2$ 4 分

(2)设每位员工测试的费用为 X 元,则 X 的可能取值为 90,150,

由题知, $P(X=150)=C_3^1 p(1-p)^2$, $P(X=90)=1-C_3^1 p(1-p)^2$,

所以 $E(X)=90 \times [1-C_3^1 p(1-p)^2]+150 \times C_3^1 p(1-p)^2=90+180p(1-p)^2$ (元), $p \in (0, 1)$.

令 $g(x)=90+180x(1-x)^2$, $x \in (0, 1)$,则 $g'(x)=180[(1-x)^2-2x(1-x)]=180(3x-1)(x-1)$.

当 $x \in (0, \frac{1}{3})$ 时, $g'(x) > 0$,所以 $g(x)$ 在 $(0, \frac{1}{3})$ 上单调递增;

当 $x \in (\frac{1}{3}, 1)$ 时, $g'(x) < 0$,所以 $g(x)$ 在 $(\frac{1}{3}, 1)$ 上单调递减.

所以 $g(x) \leq g(\frac{1}{3})=90+180 \times \frac{1}{3} \times (1-\frac{1}{3})^2=\frac{350}{3}$,即 $E(X) \leq \frac{350}{3}$ (元),

所以此方案的最高费用为 $1+600 \times \frac{350}{3} \times 10^{-4}=8$ (万元).

综上,若以此方案实施,不会超过预算. 12 分

21. 解:本题考查恒成立问题.

(1) $f'(x)=\frac{1}{x}-a(x>0)$,当 $a<0$ 时, $f'(x)=\frac{1}{x}-a>0$,函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, $f(e^{-b})=-ae^{-b}>0$,不合题意.当 $a>0$ 时,由 $f'(x)>0$,解得 $0<x<\frac{1}{a}$,由 $f'(x)<0$,解得 $x>\frac{1}{a}$,所以函数 $f(x)$ 在

$(0, \frac{1}{a})$ 上单调递增,在 $(\frac{1}{a}, +\infty)$ 上单调递减,所以 $f(x) \leq f(\frac{1}{a})=-\ln a-1+b \leq 0$,所以 $b \leq \ln a+1$,此时

$\frac{b}{a} \leq \frac{\ln a+1}{a}$,令 $\varphi(a)=\frac{\ln a+1}{a}$,则 $\varphi'(a)=\frac{-\ln a}{a^2}$,当 $a \in (0, 1)$ 时, $\varphi'(a)=\frac{-\ln a}{a^2}>0$,函数 $\varphi(a)$ 单调递增,

当 $a \in (1, +\infty)$ 时, $\varphi'(a) = \frac{-\ln a}{a^2} < 0$, 函数 $\varphi(a)$ 单调递减, 所以 $\varphi(a) \leq \varphi(1) = 1$, 所以 $\frac{b}{a}$ 的最大值为 1. ...

..... 5 分

(2) $g'(x) = f'(x) - e^x = \frac{1}{x} - a - e^x$, 易知函数 $g'(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减, 因为函数 $g(x)$ 有且只有一个零点, 设该零点为 x_0 , 所以 $g(x_0) = 0, g'(x_0) = 0$,

$$\text{即} \begin{cases} \frac{1}{x_0} - a - e^{x_0} = 0 \\ \ln x_0 - ax_0 + b - e^{x_0} = 0 \end{cases}, \text{解得} \begin{cases} a = \frac{1}{x_0} - e^{x_0} \\ b = (1 - x_0)e^{x_0} + 1 - \ln x_0 \end{cases},$$

由 $m(a + e - 1) \geq b - 1$ 恒成立, 得 $m(\frac{1}{x_0} - e^{x_0} + e - 1) \geq (1 - x_0)e^{x_0} + 1 - \ln x_0 - 1$,

整理得 $(x_0 - m - 1)e^{x_0} + \ln x_0 + \frac{m}{x_0} + (e - 1)m \geq 0$ 在 $(0, +\infty)$ 上恒成立.

令 $h(x) = (x - m - 1)e^x + \ln x + \frac{m}{x} + (e - 1)m, x \in (0, +\infty)$,

$$\text{则 } h'(x) = (x - m)e^x + \frac{1}{x} - \frac{m}{x^2} = (x - m)(e^x + \frac{1}{x^2}).$$

若 $m \leq 0, h'(x) > 0, h(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 又因为 $h(1) = 0$, 所以当 $0 < x < 1$ 时, $h(x) < 0$, 不合题意.

若 $m > 0$, 当 $x \in (0, m)$ 时, $h'(x) < 0$, 当 $x \in (m, +\infty)$ 时, $h'(x) > 0$, 所以函数 $h(x)$ 在 $(0, m)$ 上单调递减, 在 $(m, +\infty)$ 上单调递增.

① 当 $0 < m < 1$ 时, 函数 $h(x)$ 在 $(m, 1)$ 上单调递增, $h(x) < h(1) = 0$, 不合题意;

② 当 $m > 1$ 时, 函数 $h(x)$ 在 $(1, m)$ 上单调递减, $h(x) < h(1) = 0$, 不合题意;

③ 当 $m = 1$ 时, $h(x) \geq h(1) = 0$, 符合题意.

综上所述, 实数 m 的值为 1. 12 分

22. 解: 本题考查坐标系与参数方程.

(1) 由题知, 曲线 C 的直角坐标方程为 $x^2 + y^2 = 4$, 直线 l 的直角坐标方程为 $\sqrt{3}x - y + 2m = 0$, 因为直线 l 与曲线 C 至多只有一个公共点, 所以 $\frac{|2m|}{\sqrt{3+1}} = |m| \geq 2$, 所以实数 m 的取值范围为 $(-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$.

..... 5 分

(2) 设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), P(u, v)$, 由 (1) 知, $m \in (-2, 2)$, 由 $\begin{cases} \sqrt{3}x - y + 2m = 0 \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases}$, 解得 $4x^2 + 4\sqrt{3}mx + 4m^2 - 4 = 0$, 所以 $2u = x_1 + x_2 = -\sqrt{3}m, 2v = y_1 + y_2 = \sqrt{3}(x_1 + x_2) + 4m = m$, 所以 $2u = -2\sqrt{3}v$, 即 $u = -\sqrt{3}v$, 故点 P 的轨迹方程为 $x + \sqrt{3}y = 0 (-1 < y < 1)$ 10 分

23. 解: 本题考查不等式证明.

(1) 因为 $a^2 + b^2 = 2$, 所以 $ab \leq 1$, 所以 $ab \leq \sqrt{ab} \leq 1$,

又因为 $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$, 所以 $ab \leq \frac{a+b}{2}$, 即 $a+b \geq 2ab$, 当且仅当 $a=b$ 时等号成立. 5 分

(2) $a^4 + b^4 = (a^2 + b^2)^2 - 2a^2b^2 = 4 - 2a^2b^2$,

由 (1) 知 $ab \leq 1$, 所以 $a^2b^2 \leq 1$, 所以 $4 - 2a^2b^2 \geq 4 - 2 = 2$, 即 $a^4 + b^4 \geq 2$, 当且仅当 $a=b$ 时等号成立.

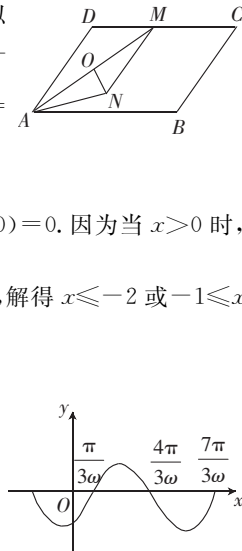
..... 10 分

答案

2020 年普通高等学校招生全国统一考试

数学模拟测试参考答案

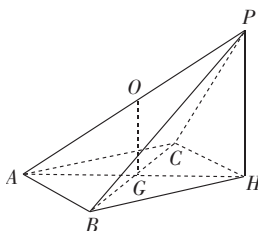
1. A 本题考查复数的运算及几何意义. 由 $z = \frac{2+i}{1-i} = \frac{(2+i)(1+i)}{1-i^2} = \frac{1+3i}{2}$, 得复数 z 在复平面内对应点的坐标为 $(\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$, 所以 z 在复平面内对应的点位于第一象限.
2. D 本题考查集合的运算. 因为 $1-x > 0$, 所以 $x < 1$, 所以 $A = (-\infty, 1)$, 所以 $\complement_U A = [1, +\infty)$. 因为 $x > 0$, 所以 $B = (0, +\infty)$, 所以 $(\complement_U A) \cap B = [1, +\infty)$.
3. A 本题考查三角恒等变换. $\because \sin 2\theta = -\frac{3}{4}, \therefore \sin \theta \cos \theta = -\frac{3}{8}$,
 则 $\tan \theta + \frac{1}{\tan \theta} = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} + \frac{\cos \theta}{\sin \theta} = \frac{1}{\sin \theta \cos \theta} = -\frac{8}{3}$.
4. B 本题考查中国传统文化与古典概型. 设事件 A 为“从‘八音’中任取‘两音’, 含有打击乐器”, 所以 $P(A) = \frac{C_4^2 + C_4^1 C_1^1}{C_8^2} = \frac{11}{14}$.
5. C 本题考查空间中的线面关系. 若 $\alpha // \beta, l, m$ 可能为异面关系, 故选项 A 不正确;
 若 $\alpha \perp \beta, l, m$ 可能为平行、相交或异面关系, 故选项 B 不正确;
 由面面垂直的判定定理, 若 $l \perp \beta, l \subset \alpha$, 则 $\alpha \perp \beta$, 故选项 C 正确;
 若 $\alpha \perp \beta, \alpha \cap \beta = n$, 由面面垂直的性质定理知, 当 $m \perp n$ 时, $m \perp \alpha$, 故选项 D 不正确.
6. D 本题考查解三角形. $\because a \cos B - b \cos A = \frac{c}{4}, \therefore$ 由余弦定理得 $a \times \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} - b \times \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{c}{4}$, 化简得 $a^2 - b^2 = \frac{c^2}{4}, \therefore \frac{a^2 - b^2}{2c^2} = \frac{1}{8}$.
7. C 本题考查指数、对数、幂的大小比较. 因为 $a = \log_2 3 \in (1, 2), b = 2^{-4.1} \in (0, 1), c = (\frac{8}{27})^{-\frac{1}{3}} = \frac{3}{2}$, 且 $\frac{3}{2} = \log_2 2\sqrt{2} < \log_2 3$, 所以 $b < c < a$.
8. B 本题考查平面向量的数量积. 取 AM 的中点为 O , 连接 ON , 因为 $AN = NM$, 所以 $ON \perp AM$. 因为 $\angle DAB = 60^\circ$, 所以 $\angle ADM = 120^\circ$, 所以 $\overrightarrow{AM}^2 = (\overrightarrow{DM} - \overrightarrow{DA})^2 = 4 + 16 - 2 \times 2 \times 4 \times (-\frac{1}{2}) = 28$, 则 $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AM} \cdot (\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{ON}) = \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{ON} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AM}^2 = \frac{1}{2} \times 28 = 14$.
9. B 本题考查函数的性质与不等式. 因为 $y = f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数, 所以 $f(0) = 0$. 因为当 $x > 0$ 时, $f(x) = x + \frac{2}{x} - 3$, 所以当 $x < 0$ 时, $f(x) = -f(-x) = x + \frac{2}{x} + 3$, 由 $\begin{cases} x < 0 \\ x + \frac{2}{x} + 3 \leq 0 \end{cases}$, 解得 $x \leq -2$ 或 $-1 \leq x < 0$. 综上可得 $f(x) \leq 0$ 的解集是 $(-\infty, -2] \cup [-1, 0]$.
10. A 本题考查三角函数的图象与性质. 由题意知 $g(x) = \cos(\omega x - \frac{5}{6}\pi) (\omega > 0)$, 其大致图象如右图所示,
 因为函数 $g(x)$ 在 $(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$ 上没有零点, 所以 $\frac{3}{2}\pi - \frac{\pi}{2} \leq \frac{T}{2} = \frac{\pi}{\omega}$, 所以 $\omega \leq 1$.



①当 $\frac{3\pi}{2} \leq \frac{\pi}{3\omega}$ 时, 得 $0 < \omega \leq \frac{2}{9}$; ②当 $\begin{cases} \frac{\pi}{3\omega} \leq \frac{\pi}{2} \\ \frac{4\pi}{3\omega} \geq \frac{3\pi}{2} \end{cases}$ 时, 得 $\frac{2}{3} \leq \omega \leq \frac{8}{9}$. 其他情况无解或解不在范围内. 综合得 ω 的

取值范围是 $(0, \frac{2}{9}] \cup [\frac{2}{3}, \frac{8}{9}]$.

11. C 本题考查多面体的外接球问题. 由已知 $AB \perp BP, AC \perp PC, AB \perp AC$, 得到 $\angle BAC = \angle PBA = \angle PCA = 90^\circ$, 所以该球的直径为 AP . 过 P 作 $PH \perp$ 平面 ABC , 交平面 ABC 于 H , 连接 AH 交 BC 于 G , 取 AP 的中点 O , 连接 OG, HB, HC . 因为 $PB = PC$, 所以 $HB = HC, AB = AC$, 所以 G 为 BC 的中点, 所以 $OG \perp$ 平面 ABC , 可得 $OG \parallel PH$, 且 $OG = \frac{1}{2} PH = 1$. 设 $AB = x$, 因为 $PB = 2\sqrt{2}$, 所以 AO



$= \frac{1}{2} PA = \frac{1}{2} \sqrt{x^2 + 8}$. 因为 $AG = \frac{1}{2} BC = \frac{\sqrt{2}}{2} x$, 所以在 $\triangle OAG$ 中, $AG^2 + OG^2 =$

$OA^2, (\frac{\sqrt{2}}{2} x)^2 + 1 = (\frac{1}{2} \sqrt{x^2 + 8})^2$, 解得 $x = 2$, 所以三棱锥 $P-ABC$ 的外接球的半径为 $AO = \frac{1}{2} \sqrt{x^2 + (2\sqrt{2})^2} = \frac{1}{2} \sqrt{4 + (2\sqrt{2})^2} = \sqrt{3}$, 所以三棱锥 $P-ABC$ 外接球的表面积为 $S = 4\pi R^2 = 12\pi$.

【解题思路】关于多面体与球的问题, 首先要作出球的直径或半径, 此题因为 $AB \perp BP, AC \perp PC, AB \perp AC$, 所以该球的直径为 AP . 在 $\triangle PAB$ 中, 可以算出 AP 的一个表达式, 在 $\triangle OAG$ 中, 可以算出 OA 的一个表达式, 从而列出等式求出半径, 进而求出球的表面积. 另解: 将三棱锥 $P-ABC$ 放入正方体中, 可迅速得出外接球的直径即正方体的对角线.

12. B 本题考查抛物线的定义与平面几何知识. 过点 A 作准线的垂线, 垂足为 M, AM

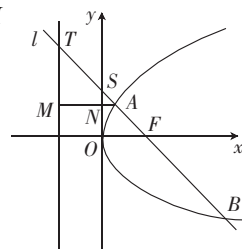
与 y 轴交于点 N , 因为 $|FA| = 2|AS|$, 所以 $\frac{|SA|}{|SF|} = \frac{1}{3}$,

所以 $|AN| = \frac{1}{3} |OF| = \frac{p}{3}$, 所以 $|AM| = \frac{4}{3} p$,

根据抛物线的定义知 $|AF| = |AM| = \frac{4}{3} p$, 因为 $|AS| = \frac{1}{2} |AF| = \frac{2}{3} p$,

所以 $|SF| = 2p$, 所以 $|TS| = 2p$. 根据抛物线的性质 $\frac{1}{|AF|} + \frac{1}{|BF|} = \frac{2}{2p}$, 得 $\frac{3}{4p} +$

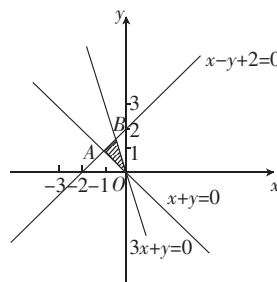
$\frac{1}{|BF|} = \frac{1}{p}$, 解得 $|BF| = 4p$, 所以 $\frac{|FB|}{|TS|} = \frac{4p}{2p} = 2$.



13. $\frac{3}{2}$ 本题考查简单的线性规划. 先作出约束条件所表示的平面区域, 如图所示,

联立 $\begin{cases} x - y + 2 = 0 \\ 3x + y = 0 \end{cases}$, 解得 $B(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$, 当目标函数过点 B 时取最大值, 所以

$z_{\max} = 3 \times (-\frac{1}{2}) + 2 \times \frac{3}{2} = \frac{3}{2}$.



14. $\frac{8}{15}$ 本题考查独立事件的概率. 甲被录取的概率为 $P_1 = \frac{4}{5} \times \frac{3}{4} = \frac{3}{5}$, 乙被录

取的概率为 $P_2 = \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$, 该次考试只有一人被录取的概率是 $P = P_1(1 -$

$P_2) + P_2(1 - P_1) = \frac{3}{5} \times \frac{2}{3} + \frac{2}{5} \times \frac{1}{3} = \frac{8}{15}$.

15. $2\sqrt{3}$ 本题考查双曲线. 由题意可设 $A(x_0, y_0), B(-x_0, -y_0)$, 因为左焦点为 $F(-\sqrt{3}, 0)$, 所以双曲线

的半焦距 $c = \sqrt{3}$. 因为 $|HK| = 2|OG|$, 所以 $OH \perp OK$, 由 $H(\frac{x_0 - \sqrt{3}}{2}, \frac{y_0}{2}), K(\frac{-x_0 - \sqrt{3}}{2}, \frac{-y_0}{2}), \vec{OH} \cdot \vec{OK} =$

0, 所以 $x_0^2 + y_0^2 = 3$ ①, 可得 $|AB| = 2\sqrt{3}$. 又因为直线 AB 的斜率为 $\frac{\sqrt{2}}{4}$, 所以 $\frac{y_0}{x_0} = \frac{\sqrt{2}}{4}$ ②, 结合①②解得 $x_0^2 = \frac{8}{3}, y_0^2 = \frac{1}{3}$, 因为点 A 在双曲线上, 所以 $\frac{x_0^2}{a^2} - \frac{y_0^2}{b^2} = 1$, 所以 $\frac{8}{3a^2} - \frac{1}{3b^2} = 1$, 结合 $a^2 + b^2 = 3$, 解得 $a = \sqrt{2}, b = 1$, 所以双曲线的离心率 $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}}{2}$.

【温馨提示】2019 年全国 II 卷出现了两空题, 2020 年全国 I、II、III 卷都有一定概率出现两空题, 故此题设置两空.

16. $[\frac{1}{e}, e)$ 本题考查函数与导数. $f(x) = \frac{(e^x - ax)(e^x - \ln x)}{\ln x - ax} < 0$,

由指数函数 $y = e^x$ 和对数函数 $y = \ln x$ 的图象可知 $e^x > \ln x (x > 0)$, 所以 $f(x) < 0$ 可转化为 $(e^x - ax)(\ln x - ax) < 0$, 即 $e^x > ax$ 且 $\ln x < ax$, 也就是 $y = ax$ 的图象夹在函数 $y = e^x$ 与 $y = \ln x$ 的图象之间, 即 $y = ax$ 的图象在两条切线之间, 所以需要求两条切线的方程, 过原点与两条曲线相切的直线斜率. 设 $y = \ln x$ 上的切点为 $(x_0, \ln x_0)$, 所以切线的斜率为 $y'|_{x=x_0} = \frac{1}{x_0}$, 切线的方程为 $y - \ln x_0 = \frac{1}{x_0}(x - x_0)$, 又因为切线经过原点, 故 $0 - \ln x_0 = \frac{1}{x_0}(0 - x_0)$, 解得 $x_0 = e$, 所以过原点与 $y = \ln x$ 相切的直线斜率为 $\frac{1}{e}$, 同理过原点与 $y = e^x$ 相切的直线斜率为 e , 所以 $\frac{1}{e} < a < e$. 当 $a = \frac{1}{e}$ 时, $\ln x - \frac{1}{e}x \leq 0$, 因为 $\ln x - \frac{1}{e}x \neq 0$, 所以 $a = \frac{1}{e}$ 也适合, 综上可得 $a \in [\frac{1}{e}, e)$.

【易错分析】本题为函数与导数综合的小题, 对学生的数形结合、转化与化归思想的要求较高. 易错点一: 把函数直接展开, 去求函数的最大值, 导致运算繁杂, 无法算出准确结果. 易错点二: 没有注意分母中含有参数, 导致漏解.

17. 解: 本题考查数列的通项公式与前 n 项和.

(1) 根据题意, 得 $a_1 a_4 = a_2^2$, 即 $a_1(a_1 + 3d) = (a_1 + d)^2$, 即 $a_1(a_1 + 6) = (a_1 + 2)^2$,

解得 $a_1 = 2$, 所以 $a_n = a_1 + (n-1)d = 2 + 2(n-1) = 2n$ 5 分

(2) 由(1)得 $b_n = (\frac{1}{2})^{a_n} = (\frac{1}{2})^{2n} = (\frac{1}{4})^n$, 所以数列 $\{b_n\}$ 是首项为 $\frac{1}{4}$, 公比为 $\frac{1}{4}$ 的等比数列, 所以 $S_n = (a_1 +$

$a_2 + a_3 + \dots + a_n) + (b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_n) = \frac{n(2+2n)}{2} + [\frac{1}{4} + (\frac{1}{4})^2 + (\frac{1}{4})^3 + \dots + (\frac{1}{4})^n]$

$= n^2 + n - \frac{1}{3 \times 4^n} + \frac{1}{3}$ 12 分

18. 解: 本题考查线面平行与二面角.

(1) 连接 $A_1 C_1$, 设 $B_1 D_1 \cap A_1 C_1 = O_1$, 连接 $O_1 C$, 图略. 因为在四棱柱 $ABCD - A_1 B_1 C_1 D_1$ 中, O, O_1 分别为 $AC, A_1 C_1$ 的中点, 所以 $OC \parallel A_1 O_1, OC = A_1 O_1$, 所以四边形 $A_1 O C O_1$ 为平行四边形, 所以 $A_1 O \parallel O_1 C$, 因为 $A_1 O \not\subset$ 平面 $B_1 C D_1, O_1 C \subset$ 平面 $B_1 C D_1$, 所以 $A_1 O \parallel$ 平面 $B_1 C D_1$ 6 分

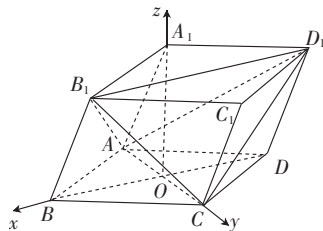
(2) 以 O 为原点, OB, OC, OA_1 所在直线分别为 x 轴, y 轴, z 轴建立空间直角坐标系 $O - xyz$.

设 $OA = 1$, 因为 $AB = AA_1$, 所以 $OA_1 = 1$, 所以 $A(0, -1, 0), A_1(0, 0, 1), B_1(1, 1, 1), D_1(-1, 1, 1)$,

所以 $\overrightarrow{AB_1} = (1, 2, 1), \overrightarrow{B_1 D_1} = (-2, 0, 0), \overrightarrow{A_1 B_1} = (1, 1, 0)$, 设 $\mathbf{n}_1 = (x_1, y_1, z_1)$ 为平面 $AB_1 D_1$ 的法向量, $\mathbf{n}_2 =$

(x_2, y_2, z_2) 为平面 $A_1 A B_1$ 的法向量, 因为 $\begin{cases} \mathbf{n}_1 \cdot \overrightarrow{AB_1} = 0 \\ \mathbf{n}_1 \cdot \overrightarrow{B_1 D_1} = 0 \end{cases}$, 所以 $\begin{cases} x_1 + 2y_1 + z_1 = 0 \\ -2x_1 = 0 \end{cases}$, 令 $y_1 = 1$, 所以 $\mathbf{n}_1 = (0, 1,$

$-2)$, 因为 $\begin{cases} \mathbf{n}_2 \cdot \overrightarrow{AB_1} = 0 \\ \mathbf{n}_2 \cdot \overrightarrow{A_1 B_1} = 0 \end{cases}$, 所以 $\begin{cases} x_2 + 2y_2 + z_2 = 0 \\ x_2 + y_2 = 0 \end{cases}$, 令 $x_2 = 1$, 所以 $\mathbf{n}_2 = (1, -1, 1)$. 设二面角 $D_1 - AB_1 - A_1$



的平面角为 θ , 易知 θ 为锐角, 所以 $\cos \theta = \frac{|\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2|}{|\mathbf{n}_1| |\mathbf{n}_2|} = \frac{|-3|}{\sqrt{5} \times \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{15}}{5}$ 12 分

19. 解: 本题考查独立性检验和分布列、期望.

(1) $\because K^2$ 的观测值 $k = \frac{160 \times (60 \times 40 - 40 \times 20)^2}{80 \times 80 \times 100 \times 60} = \frac{32}{3} \approx 10.667 > 6.635$,

$\therefore$ 有 99% 的把握认为愿意参加新生接待工作与性别有关. 5 分

(2) 根据分层抽样方法得, 男生有 $10 \times \frac{3}{5} = 6$ 人, 女生有 $10 \times \frac{2}{5} = 4$ 人,

所以选取的 10 人中, 男生有 6 人, 女生有 4 人.

X 的可能取值有 0, 1, 2, 3.

$$P(X=0) = \frac{C_6^3 C_4^0}{C_{10}^3} = \frac{20}{120} = \frac{1}{6}, P(X=1) = \frac{C_6^2 C_4^1}{C_{10}^3} = \frac{60}{120} = \frac{1}{2},$$

$$P(X=2) = \frac{C_6^1 C_4^2}{C_{10}^3} = \frac{36}{120} = \frac{3}{10}, P(X=3) = \frac{C_6^0 C_4^3}{C_{10}^3} = \frac{4}{120} = \frac{1}{30},$$

$\therefore X$ 的分布列是

X	0	1	2	3
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{30}$

$$\therefore E(X) = 0 \times \frac{1}{6} + 1 \times \frac{1}{2} + 2 \times \frac{3}{10} + 3 \times \frac{1}{30} = \frac{6}{5}. \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

20. 解: 本题考查函数的极值与证明不等式.

(1) 因为 $f'(x) = a(1 - \frac{1}{x}) + 2x - 2 = \frac{(x-1)(2x+a)}{x}$, 所以当 $a = -2e$ 时, $f'(x) = \frac{2(x-1)(x-e)}{x}$. 当 $0 < x < 1$ 时, $f'(x) > 0$; 当 $1 < x < e$ 时, $f'(x) < 0$; 当 $x > e$ 时, $f'(x) > 0$. 故函数 $y = f(x)$ 在 $(0, 1)$ 和 $(e, +\infty)$ 上单调递增, 在 $(1, e)$ 上单调递减, 所以当 $x = 1$ 时, 函数有极大值 $f(1) = -2e - 1$, 当 $x = e$ 时, 函数有极小值 $f(e) = -e^2$ 5 分

(2) 由 $f(x_1) - f'(\frac{x_1+x_2}{2})x_1 < f(x_2) - f'(\frac{x_1+x_2}{2})x_2$, 可得 $f(x_1) - f(x_2) < f'(\frac{x_1+x_2}{2})(x_1 - x_2)$, 即 $a(x_1 - \ln x_1) + x_1^2 - 2x_1 - a(x_2 - \ln x_2) - x_2^2 + 2x_2 < (x_1 + x_2 + a - 2 - \frac{2a}{x_1+x_2})(x_1 - x_2)$, 化简可得 $a \ln \frac{x_1}{x_2} >$

$\frac{2a(x_1 - x_2)}{x_1 + x_2}$. 因为 $a > 0$, 所以 $\ln \frac{x_1}{x_2} > \frac{2(x_1 - x_2)}{x_1 + x_2}$, 即 $\ln \frac{x_1}{x_2} > \frac{2(\frac{x_1}{x_2} - 1)}{\frac{x_1}{x_2} + 1}$, 设 $t = \frac{x_1}{x_2} > 1$, 构造函数 $h(t) = \ln t -$

$\frac{2(t-1)}{t+1}$, $h'(t) = \frac{(t-1)^2}{t(t+1)^2} > 0$, 则 $h(t) > h(1) = 0$, 则有 $\ln \frac{x_1}{x_2} > \frac{2(\frac{x_1}{x_2} - 1)}{\frac{x_1}{x_2} + 1}$, 从而有 $f(x_1) - f'(\frac{x_1+x_2}{2})x_1 <$

$f(x_2) - f'(\frac{x_1+x_2}{2})x_2$ 12 分

【解题技巧】 本题为导数的综合题, 当证明结果较复杂时我们一般可以利用分析法对其进行化简, 找出要证明问题的本质. 对于双变量问题, 可以利用构造函数法, 把双变量转化为单变量, 再利用导数去探讨它的相关性质.

21. 解: 本题考查椭圆中的面积问题.

(1) 因为 $B_1(0, 1)$, 所以 $b = 1$, 因为 $\triangle A_1 B_1 B_2$ 为等边三角形, 所以 $a = \sqrt{3}b$, 所以 $a = \sqrt{3}$,

所以椭圆的标准方程为 $\frac{x^2}{3} + y^2 = 1$ 4 分

(2) 设四边形 $B_2 M N B_1$ 的面积为 S .

①当直线 MN 的斜率不存在时,可得 $M(1, -\frac{\sqrt{6}}{3}), N(1, \frac{\sqrt{6}}{3})$, 所以 $S = \frac{1}{2} \times (2 + \frac{2\sqrt{6}}{3}) \times 1 = 1 + \frac{\sqrt{6}}{3}$ 6 分

②当直线 MN 的斜率存在时,设直线 MN 的斜率为 k ,则直线 MN 的方程为 $y = k(x-1)$, 设 $M(x_1, y_1), N(x_2, y_2)$. 联立 $\begin{cases} \frac{x^2}{3} + y^2 = 1 \\ y = k(x-1) \end{cases}$, 化简得 $(3k^2 + 1)x^2 - 6k^2x + 3k^2 - 3 = 0$, 所以 $x_1 + x_2 = \frac{6k^2}{3k^2 + 1}, x_1x_2 = \frac{3k^2 - 3}{3k^2 + 1}$, $|y_1 - y_2| = |k(x_1 - x_2)| = \frac{2\sqrt{3}|k|\sqrt{2k^2 + 1}}{3k^2 + 1}$. 因为 $x_1 > 0, x_2 > 0$, 所以 $|k| > 1$, 面积 $S = S_{\triangle NOB_1} + S_{\triangle OMN} + S_{\triangle MOB_2} = \frac{1}{2} \times (x_1 + x_2) \times 1 + \frac{1}{2} \times |y_1 - y_2| \times 1 = \frac{3k^2}{3k^2 + 1} + \frac{\sqrt{3}|k|\sqrt{2k^2 + 1}}{3k^2 + 1} = \frac{3}{3 + \frac{1}{k^2}} + \frac{\sqrt{3} \times \sqrt{2 + \frac{1}{k^2}}}{3 + \frac{1}{k^2}}$. 令 $t = \sqrt{2 + \frac{1}{k^2}}$, 则 $S = \frac{\sqrt{3}t + 3}{t^2 + 1}, t \in (\sqrt{2}, \sqrt{3})$, 令 $m = t + \sqrt{3}$, 则 $S = \frac{\sqrt{3}m}{m^2 - 2\sqrt{3}m + 4} = \frac{\sqrt{3}}{m + \frac{4}{m} - 2\sqrt{3}}, m \in (\sqrt{2} + \sqrt{3}, 2\sqrt{3})$, 因为 $S(m)$ 在定义域内单调递减, 所以 $\frac{3}{2} < S < 1 + \frac{\sqrt{6}}{3}$. 综上, 四边形 B_2MNB_1 面积的取值范围是 $(\frac{3}{2}, 1 + \frac{\sqrt{6}}{3}]$ 12 分

22. 解: 本题考查极坐标与参数方程.

(1) 由已知, 曲线 C 的普通方程为 $(x-2)^2 + y^2 = 4$, 即 $x^2 + y^2 = 4x$, 因为 $x = \rho \cos \theta, \rho^2 = x^2 + y^2$, 可得 $\rho^2 = 4\rho \cos \theta$, 化简为 $\rho = 4 \cos \theta$, 所以曲线 C 的极坐标方程为 $\rho = 4 \cos \theta$.

直线 l 的参数方程为 $\begin{cases} x = -1 + t \cos \alpha, \\ y = -3\sqrt{3} + t \sin \alpha \end{cases}$ (t 为参数, $0 \leq \alpha < \pi$). 4 分

(2) 设 A, B 对应的参数分别为 t_A, t_B ,

将直线 l 的参数方程代入 C 并整理, 得 $t^2 - 6t(\sqrt{3} \sin \alpha + \cos \alpha) + 32 = 0$,

所以 $t_A + t_B = 6(\sqrt{3} \sin \alpha + \cos \alpha), t_A \cdot t_B = 32$.

又 A 为 MB 的中点, 所以 $t_B = 2t_A$,

因此 $t_A = 2(\sqrt{3} \sin \alpha + \cos \alpha) = 4 \sin(\alpha + \frac{\pi}{6}), t_B = 8 \sin(\alpha + \frac{\pi}{6})$,

所以 $t_A \cdot t_B = 32 \sin^2(\alpha + \frac{\pi}{6}) = 32$, 即 $\sin^2(\alpha + \frac{\pi}{6}) = 1$.

因为 $0 \leq \alpha < \pi$, 所以 $\frac{\pi}{6} \leq \alpha + \frac{\pi}{6} < \frac{7\pi}{6}$,

从而 $\alpha + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$, 即 $\alpha = \frac{\pi}{3}, \tan \alpha = \sqrt{3}$ 10 分

23. 解: 本题考查绝对值不等式的解法.

(1) 因为 $a = 1, f(x) \leq 6$, 所以 $|x+1| + |x-2| \leq 5$,

$|x+1| + |x-2| = \begin{cases} 2x-1, & x > 2 \\ 3, & -1 \leq x \leq 2 \\ 1-2x, & x < -1 \end{cases}$. 由 $\begin{cases} x > 2 \\ 2x-1 \leq 5 \end{cases}$, 解得 $2 < x \leq 3$; 由 $\begin{cases} -1 \leq x \leq 2 \\ 3 \leq 5 \end{cases}$, 解得 $-1 \leq x \leq 2$; 由 $\begin{cases} x < -1 \\ 1-2x \leq 5 \end{cases}$, 解得 $-2 \leq x < -1$. 所以原不等式的解集为 $[-2, 3]$ 5 分

(2) 因为 $2a \leq x < -1, f(x) \leq 2x+6$, 所以 $-x-1+x-2a+1 \leq 2x+6$, 所以 $-a-3 \leq x$, 因为不等式 $f(x) \leq 2x+6$ 有解, 所以 $-a-3 < -1$, 即 $a > -2$, 所以实数 a 的取值范围是 $(-2, -\frac{1}{2})$ 10 分

答案