

2020 年普通高等学校招生全国统一考试

数学模拟测试参考答案

1. B 本题考查 Venn 图. 因为 $A \cap B = \{-2, 0, 2, 4\}$, 所以阴影部分表示的集合为 $\{-1, 1, 3\}$, 该集合共有 3 个元素.
2. A 本题考查复数的运算、复数的概念. 依题意, $z = \frac{2+ai}{1-i} = \frac{(2+ai)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{2-a+(a+2)i}{2} = \frac{2-a}{2} + \frac{(a+2)i}{2}$, 因为 $z \in \mathbf{R}$, 所以 $a+2=0$, 解得 $a=-2$.
3. D 本题考查正切函数图象的对称中心. 令 $2x - \frac{\pi}{4} = \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}$, 得 $x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{4}, k \in \mathbf{Z}$, 故只有 D 项符合.
4. D 本题考查统计图表与用样本估计总体. 私人类电动汽车充电桩保有量增长率最高的年份是 2016 年, 这 5 次统计的公共类电动汽车充电桩保有量的中位数是 21.4 万台, 因为 $\frac{4.9+14.1+21.4+30+44.7}{5} = 23.02$, 故 A、B、C 项错误, D 项正确.
5. D 本题考查对数的运算与估算. 记初始线段长度为 a , “一次构造”后的折线的长度为 $\frac{4a}{3}$, “二次构造”后的折线的长度为 $(\frac{4}{3})^2 a, \dots$, “ n 次构造”后的折线的长度为 $(\frac{4}{3})^n a$, 则要使得到的折线的长度达到原来的 1000 倍, 应满足 $(\frac{4}{3})^n a \geq 1000a, (\frac{4}{3})^n \geq 1000$, 两边同时取对数得 $n \lg \frac{4}{3} \geq \lg 1000 = 3$, 得 $n(2 \lg 2 - \lg 3) \geq 3, n \geq \frac{3}{2 \lg 2 - \lg 3}$. 代入数据得 $n \geq \frac{3}{0.6020 - 0.4771} \approx 24.02$, 故至少需要通过构造的次数是 25.
- 【失分陷阱】**考生不能由复杂的背景抽象出数学模型列出不等式, 考生的数学运算素养不够导致计算错误, 最后一步得出结论时四舍五入导致错误. 解答本题错误的原因主要是抽象概括能力不够与数学运算素养不扎实.
- 【满分秘籍】**正确的由实际问题抽象出数学模型, 平时训练扎实的数学运算素养.
6. B 本题考查程序框图. 第一次循环, $M=104, N=4, a=5$;
第二次循环, $M=109, N=20, a=6$;
第三次循环, $M=115, N=120, a=7$;
此时 $M > N$ 不成立, 输出 $a=7$.
7. C 本题考查直线与圆的位置关系. 圆 C 的圆心的坐标为 $(1, -2)$, 将其代入直线 $ax+y-1=0$ 中得 $a=3$, 则以点 $(1, -1)$ 为中点的弦的弦长为 $2\sqrt{2^2-1^2} = 2\sqrt{3}$.
8. D 本题考查函数的性质. $f(-x) = -x \sin(-x) = x \sin x = f(x)$, ①正确; 令 $f(x) = 0$, 得 $x=0$ 或 $\sin x = 0$, 解得 $x=0$ 或 $x = \pm \pi$, ②正确; $f'(x) = \sin x + x \cos x$, 当 $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ 时, $f'(x) = \sin x + x \cos x > 0$, 故 $f(x)$ 在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 上单调递增, ③正确.
9. A 本题考查圆锥、圆柱的体积与侧面积计算. 设圆锥 SC 的底面半径为 r , 高为 $3r$, 圆柱 OM 的底面半径为

$2r$, 高为 h , 依题意有 $\frac{1}{3}\pi r^2 \cdot 3r = \pi(2r)^2 h$, 解得 $h = \frac{r}{4}$. 故圆锥 SC 的侧面积为 $\pi rl = \sqrt{10}\pi r^2$, 圆柱 OM 的侧

面积为 $2\pi \cdot 2r \cdot \frac{r}{4} = \pi r^2$, 故圆锥 SC 和圆柱 OM 的侧面积之比为 $\sqrt{10} : 1$.

10. B 本题考查三角恒等变换与新定义. 由题知集合 $\{-\frac{\pi}{10}, -\frac{\pi}{5}, \frac{3\pi}{10}, \frac{2\pi}{5}\}$ 相对于 x_0 的“余弦方差”为 $\Omega =$

$$\frac{\cos^2(-\frac{\pi}{10}-x_0) + \cos^2(-\frac{\pi}{5}-x_0) + \cos^2(\frac{3\pi}{10}-x_0) + \cos^2(\frac{2\pi}{5}-x_0)}{4}$$

$$= \frac{\frac{1+\cos(\frac{\pi}{5}+2x_0)}{2} + \frac{1+\cos(\frac{2\pi}{5}+2x_0)}{2} + \frac{1+\cos(\frac{3\pi}{5}-2x_0)}{2} + \frac{1+\cos(\frac{4\pi}{5}-2x_0)}{2}}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$

11. B 本题考查函数与方程的综合. 由 $2f(f(m))+1=2^{f(m)+1}$, 可得 $f(f(m))=2^{f(m)}-\frac{1}{2}$.

若 $f(m) > 0$, 则 $\ln[f(m)] - 2 = 2^{f(m)} - \frac{1}{2}$, $\therefore \ln x - 2 < x < 2^x - \frac{1}{2}$, $\therefore$ 方程无解, 故 $f(m) \leq 0$.

当 $m \leq 0$ 时, 由 $f(m) = 2^m - \frac{1}{2} \leq 0$, 解得 $m \leq -1$;

当 $m > 0$ 时, 由 $f(m) = \ln m - 2 \leq 0$, 解得 $0 < m \leq e^2$.

综上所述, 当 $m \in (-\infty, -1] \cup (0, e^2]$ 时, $f(m) \leq 0$, 满足 $2f(f(m))+1=2^{f(m)+1}$.

12. D 本题考查立体几何的截面问题与体积的最值. 设截面 $EFGH$ 交 AA_1 于点 P , $AP =$

$a (0 < a < 5)$, 则 $\frac{AP}{AA_1} = \frac{PF}{A_1B_1}$, 得 $PF = \frac{4a}{5}$, 则四边形 $EFGH$ 的面积为 $4^2 - [(\frac{4a}{5})^2 + (4 - \frac{4a}{5})^2] = \frac{32}{25}(5a - a^2)$, 四棱锥 $A_1 - EFGH$ 的体积为 $\frac{1}{3} \times \frac{32}{25}(5a - a^2) \cdot (5 - a) =$

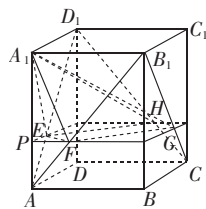
$$\frac{32}{75}(a^3 - 10a^2 + 25a),$$

$$\text{令 } f(a) = \frac{32}{75}(a^3 - 10a^2 + 25a),$$

$f'(a) = \frac{32}{75}(3a^2 - 20a + 25) = \frac{32}{75}(3a - 5)(a - 5)$, 则当 $0 < a < \frac{5}{3}$ 时, $f'(a) > 0$, $f(a)$ 单调递增; 当 $\frac{5}{3} < a < 5$

时, $f'(a) < 0$, $f(a)$ 单调递减, 故当 $a = \frac{5}{3}$ 时, $f(a)$ 取得最大值, 最大值为 $\frac{32}{75}[(\frac{5}{3})^3 - 10 \times \frac{25}{9} + 25 \times \frac{5}{3}] =$

$$\frac{640}{81}.$$



【解题方法】棱锥的体积计算应从公式 $V = \frac{1}{3}Sh$ 入手, 因此无论题干背景怎么复杂, 解题的关键是找到锥体的

底面积与高. 截面问题的关键是找到公共点, 可利用线面平行或面面平行的性质定理由一个公共点引出平行直线. 对于最值问题常见的两种处理方法是均值不等式或函数与导数, 若用均值不等式处理, 应构造定值, 同时注意等号取得条件; 若用函数与导数处理, 应注意将变量减少, 利用换元或题干中的条件化成一个变量, 再利用函数与导数的相关知识处理.

13. $2\ln 2 - 1$ 本题考查导数的几何意义. $\therefore f'(x) = 2^x \cdot \ln 2 - \frac{1}{x^2}$, $\therefore f'(1) = 2\ln 2 - 1$. 由导数的几何意义知曲

线 $f(x)=2^x+\frac{1}{x}$ 在 $x=1$ 处的切线斜率为 $2\ln 2-1$.

14. $\frac{2}{3}$ 本题考查平面向量的基本定理. 连接 AE , $\overrightarrow{AF}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE})=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD})=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{4}\overrightarrow{AD}$, 则 $m=\frac{1}{2}, n=\frac{3}{4}, \frac{m}{n}=\frac{2}{3}$.

15. $4\sqrt{2}$ 本题考查双曲线的性质. $\because k_{PA} \cdot k_{PB}=1$, 设 $P(x_0, y_0)$, $\therefore \frac{y_0}{x_0+2} \cdot \frac{y_0}{x_0-2}=\frac{y_0^2}{x_0^2-4}=1$.

$\therefore$ 点 P 在双曲线 C 上, $\therefore \frac{x_0^2}{4}-\frac{y_0^2}{b^2}=1, \frac{y_0^2}{x_0^2-4}=\frac{b^2}{4}, \therefore \frac{b^2}{4}=1, b=2, \therefore$ 双曲线 C 的焦距为 $2\sqrt{4+b^2}=4\sqrt{2}$.

16. $\frac{25\sqrt{3}}{6}$ 本题考查角平分线定理与三角形的面积. $\therefore \frac{AD}{CD}=\frac{3}{2}, \therefore \frac{AB}{BC}=\frac{3}{2}$.

设 $AB=3t, BC=2t(t>0)$, $\therefore \frac{1}{2}AB \cdot BD \sin 60^\circ + \frac{1}{2}BC \cdot BD \sin 60^\circ = \frac{1}{2}AB \cdot BC \sin 120^\circ$,

$\therefore 6t+4t=6t^2$, 解得 $t=\frac{5}{3}$. $\therefore AB=5, BC=\frac{10}{3}$, $\triangle ABC$ 的面积为 $\frac{1}{2} \times 5 \times \frac{10}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{25\sqrt{3}}{6}$.

【知识拓展】关于角平分线类型的题目的常见处理方法有:

①利用角平分线定理 $\frac{AB}{BC}=\frac{AD}{CD}$, 得出 AB, BC, AD, CD 的关系;

②利用三角形面积 $S_{\triangle ABD}+S_{\triangle BCD}=S_{\triangle ABC}$, 得到 $\frac{1}{2}AB \cdot BD \sin \frac{\angle ABC}{2} + \frac{1}{2}BC \cdot BD \sin \frac{\angle ABC}{2} = \frac{1}{2}AB \cdot AC \sin \angle ABC$, 进而得出相关边长的关系.

17. 解: 本题考查频率分布直方图与古典概型.

(1)由频率分布直方图知 $(0.005+0.01+a+0.03+0.035) \times 10=1$, 解得 $a=0.02$, 所以这 100 个人的平均年龄为 $(0.005 \times 35+0.035 \times 45+0.03 \times 55+0.02 \times 65+0.01 \times 75) \times 10=54.5$ 5 分

(2)年龄在 $[50, 60)$ 的有 $0.03 \times 10 \times 100=30$ (人), 年龄在 $[60, 70)$ 的有 $0.02 \times 10 \times 100=20$ (人). 用分层抽样的方法在年龄为 $[50, 60)$ 、 $[60, 70)$ 的人中抽取 5 人, 则年龄在 $[50, 60)$ 的应抽取 3 人, 记为 a, b, c , 年龄在 $[60, 70)$ 的应抽取 2 人, 记为 A, B .

在这 5 人中随机抽取 2 人接受采访, 共有如下 10 个基本事件:

$(a, b), (a, c), (a, A), (a, B), (b, c), (b, A), (b, B), (c, A), (c, B), (A, B)$.

接受采访的 2 人中年龄在 $[50, 60)$ 的恰有 1 人包含如下 6 个基本事件:

$(a, A), (a, B), (b, A), (b, B), (c, A), (c, B)$. 故所求事件的概率 $P=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$ 12 分

18. 解: 本题考查等比数列的证明与数列求和.

(1)因为 $2S_n - a_{n+1} = n - 1$, 所以 $2S_{n-1} - a_n = n - 2 (n \geq 2)$,

所以 $2a_n - a_{n+1} + a_n = 1$, 即 $a_{n+1} = 3a_n - 1 (n \geq 2)$, 所以 $a_{n+1} - \frac{1}{2} = 3(a_n - \frac{1}{2}) (n \geq 2)$.

当 $n=1$ 时, $2a_1 - a_2 = 0, a_2 = 2$, 则 $a_2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2} = 3(a_1 - \frac{1}{2})$, $\therefore a_1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \neq 0$,

$\therefore$ 数列 $\{a_n - \frac{1}{2}\}$ 是等比数列. 5 分

(2)由(1)知数列 $\{a_n - \frac{1}{2}\}$ 是以 $\frac{1}{2}$ 为首项,3为公比的等比数列,

所以 $a_n - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \times 3^{n-1}$,即 $a_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times 3^{n-1}$.因为 $b_n = 4^n$,

所以 $4a_nb_n = 4 \times 4^n \times (\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times 3^{n-1}) = 2 \times 4^n + 8 \times 12^{n-1}$,

所以 $T_n = 2(4^1 + 4^2 + \cdots + 4^n) + 8(12^0 + 12^1 + \cdots + 12^{n-1})$

$$= 2 \times \frac{4(1-4^n)}{1-4} + 8 \times \frac{1-12^n}{1-12} = \frac{1}{3} \times 2^{2n+3} + \frac{8}{11} \times 12^n - \frac{112}{33}. \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

19. 解: 本题考查线面垂直的证明与点到面的距离.

(1)因为 $AD \perp$ 平面 ABM , $AM \subset$ 平面 ABM , 所以 $AD \perp AM$.

因为 $\frac{\sqrt{2}}{2}BM = AB = AM = 4$, 所以 $AB = AM = 4, BM = 4\sqrt{2}$,

所以 $AB \perp AM$. 因为 $AD \cap AB = A$, 所以 $AM \perp$ 平面 $ABCD$. $\dots\dots\dots 5 \text{ 分}$

(2)因为底面 $ABCD$ 是直角梯形, $AD \perp CD$, 所以 $CD \parallel AB$,

$$\text{则 } V_{C-AME} = V_{D-AME} = \frac{1}{3} S_{\triangle AME} \cdot AD = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 4 \times 2 \times 4 = \frac{16}{3}.$$

因为 $AD \perp CD$, 所以 $AC = \sqrt{AD^2 + CD^2} = 5$, 由(1)知 $AM \perp AC$,

$$\text{则 } S_{\triangle AMC} = \frac{1}{2} \times AM \times AC = \frac{1}{2} \times 4 \times 5 = 10.$$

设 E 到平面 ACM 的距离为 h , 由 $V_{C-AME} = V_{E-AMC}$ 得 $\frac{1}{3} \times 10 \times h = \frac{16}{3}$,

解得 $h = \frac{8}{5}$, 即 E 到平面 ACM 的距离为 $\frac{8}{5}$. $\dots\dots\dots 12 \text{ 分}$

20. 解: 本题考查直线与椭圆的位置关系.

$$(1) \text{ 设 } A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), \text{ 则 } \begin{cases} \frac{x_1^2}{6} + \frac{y_1^2}{2} = 1 \\ \frac{x_2^2}{6} + \frac{y_2^2}{2} = 1 \end{cases}, \text{ 两式相减得 } \frac{x_1^2 - x_2^2}{6} + \frac{y_1^2 - y_2^2}{2} = 0,$$

$$\text{则 } k_{AB} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = -\frac{2(x_1 + x_2)}{6(y_1 + y_2)} = -\frac{2 \times 2}{6 \times 1} = -\frac{2}{3}, \text{ 故直线 } l \text{ 的方程为 } y - \frac{1}{2} = -\frac{2}{3}(x - 1),$$

$$\text{即 } 4x + 6y - 7 = 0. \dots\dots\dots 5 \text{ 分}$$

(2)由题知 $F(-2, 0)$, 故可设直线 l 的方程为 $y = k(x + 2)$.

$$\text{当直线 } l \text{ 的斜率 } k = 0 \text{ 时, } |AB| = 2\sqrt{6}, |FN| = 2, \text{ 此时 } \frac{|FN|}{|AB|} = \frac{\sqrt{6}}{6}.$$

$$\text{直线 } l \text{ 的斜率 } k \text{ 不为 } 0 \text{ 时, 联立 } \begin{cases} \frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{2} = 1 \\ y = k(x + 2) \end{cases}, \text{ 可得 } (1 + 3k^2)x^2 + 12k^2x + 12k^2 - 6 = 0,$$

$$\text{设 } A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), \text{ 由韦达定理知 } x_1 + x_2 = \frac{-12k^2}{1 + 3k^2}, x_1x_2 = \frac{12k^2 - 6}{1 + 3k^2},$$

$$\text{则 } |AB| = \sqrt{1 + k^2} \cdot \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2} = \sqrt{1 + k^2} \times \sqrt{\left(\frac{-12k^2}{1 + 3k^2}\right)^2 - 4 \cdot \frac{12k^2 - 6}{1 + 3k^2}} = \frac{2\sqrt{6}(1 + k^2)}{1 + 3k^2}.$$

设 AB 的中点为 $M(x_0, y_0)$, 则 $x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{-6k^2}{1+3k^2}$, 又 $y_0 = k(x_0 + 2) = \frac{2k}{1+3k^2}$,

故直线 MN 的方程为 $y - \frac{2k}{1+3k^2} = -\frac{1}{k}(x + \frac{6k^2}{1+3k^2})$, 令 $y=0$, 得 $x_N = \frac{-4k^2}{1+3k^2}$,

则 $|FN| = |\frac{-4k^2}{1+3k^2} + 2| = \frac{2(k^2+1)}{1+3k^2}$, 所以 $\frac{|FN|}{|AB|} = \frac{\sqrt{6}}{6}$.

综上所述, $\frac{|FN|}{|AB|}$ 为定值. 12 分

21. 解: 本题考查函数的单调性以及利用导数研究函数的零点.

(1) 函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$, $f'(x) = \frac{a}{x} - 1 = \frac{a-x}{x}$,

当 $a \leq 0$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减;

当 $a > 0$ 时, 由 $f'(x) > 0$, 得 $0 < x < a$, 由 $f'(x) < 0$, 得 $x > a$,

则 $f(x)$ 在 $(0, a)$ 上单调递增, $f(x)$ 在 $(a, +\infty)$ 上单调递减. 4 分

(2) 当 $a=e$ 时, $f(x) = e \ln x - x$, 则由 $f(x) = \frac{(b-1)x}{x+1}$, 可得 $e \ln x + \frac{e \ln x}{x} - x = b$.

则方程 $f(x) = \frac{(b-1)x}{x+1}$ 有两个不等实数根等价于函数 $y = e \ln x + \frac{e \ln x}{x} - x (x \geq 1)$ 的图象与直线 $y=b$ 有两个不同交点,

设 $h(x) = e \ln x + \frac{e \ln x}{x} - x (x \geq 1)$, 则 $h'(x) = \frac{e}{x} + \frac{e(1-\ln x)}{x^2} - 1 = \frac{ex + e - e \ln x - x^2}{x^2}$,

令 $\varphi(x) = ex + e - e \ln x - x^2$, $\varphi'(x) = e - \frac{e}{x} - 2x = \frac{ex - e - 2x^2}{x}$,

由 $ex - e - 2x^2 < 0$, 可知 $\varphi'(x) < 0$, 所以 $\varphi(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上为减函数,

由 $\varphi(e) = 0$, 得当 $0 < x < e$ 时, $\varphi(x) > 0$, 当 $x > e$ 时, $\varphi(x) < 0$,

即当 $1 \leq x < e$ 时, $h'(x) > 0$, 当 $x > e$ 时, $h'(x) < 0$,

则函数 $h(x)$ 在 $[1, e)$ 上单调递增, 在 $(e, +\infty)$ 上单调递减,

所以函数 $h(x)$ 在 $x=e$ 处取得极大值 $h(e)=1$, 又 $h(1)=-1$,

$h(e^3) = 3e + \frac{3}{e^2} - e^3 < 4e - e^3 < -1$, 所以当 $a=e, x \in [1, +\infty)$ 时,

方程 $f(x) = \frac{(b-1)x}{x+1}$ 有两个不等实数根, 可得 $b \in [-1, 1)$ 12 分

【解后反思】 导数背景下的函数零点个数问题, 应该根据单调性和零点存在定理来说明. 由函数零点个数求参数范围常用方法有分离参数, 借助函数的单调性考虑函数的图象与极值求解, 或讨论函数的单调性, 结合函数的极值和区间端点处的函数的正负求解. 含参数的不等式的有解问题, 可转化为恒成立问题来处理, 后者以导数为工具讨论函数的单调性从而得到函数的最值, 最后由最值的正负得到不等式成立.

22. 解: 本题考查参数方程与极坐标方程的转化、直线参数方程的几何意义.

(1) 因为 $x = \frac{1-\cos 2\theta}{1+\cos 2\theta} = \frac{2\sin^2 \theta}{2\cos^2 \theta} = \tan^2 \theta$, 所以 $y^2 = 4x$.

因为 $1+\cos 2\theta \neq 0$, 所以 $\theta \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$, 所以 $y \in \mathbf{R}$,

故曲线 C 的普通方程为 $y^2=4x$.

由 $2\rho\sin(\theta-\frac{\pi}{6})+\sqrt{3}=0$, 可得 $x-\sqrt{3}y-\sqrt{3}=0$ 5 分

(2) 将曲线 $C: y^2=4x$ 化为极坐标, 可得 $\rho\sin^2\theta=4\cos\theta$, 将 $\theta=-\frac{\pi}{6}$ 代入可得

$\rho_A\sin^2\frac{\pi}{6}=4\cos\frac{\pi}{6}$, 解得 $\rho_A=8\sqrt{3}$, 同理可得 $\rho_B=1$,

所以 $|AB|=|\rho_A-\rho_B|=8\sqrt{3}-1$ 10 分

23. 解: 本题考查绝对值不等式的解与恒成立问题.

$$(1) \text{ 当 } a=-1 \text{ 时, } f(x)=|x-5|+|x+2|=\begin{cases} -2x+3, & x\leq -2 \\ 7, & -2<x<5 \\ 2x-3, & x\geq 5 \end{cases},$$

当 $x\leq -2$ 时, $f(x)=-2x+3\leq 11$, 解得 $x\geq -4$, 此时 $-4\leq x\leq -2$;

当 $-2<x<5$ 时, $f(x)=7\leq 11$, 此时 $-2<x<5$;

当 $x\geq 5$ 时, $f(x)=2x-3\leq 11$, 解得 $x\leq 7$, 此时 $5\leq x\leq 7$;

综上所述, 不等式 $f(x)\leq 11$ 的解集为 $[-4, 7]$ 5 分

(2) 关于 x 的不等式 $f(x)\leq g(x)$ 的解集包含 $[-2, -1]\Leftrightarrow |x+\frac{a^2+4}{a}|+|x+2|\leq 8-|x+3|$ 在 $x\in[-2, -1]$ 上恒成立.

因为 $a<0$, $\frac{a^2+4}{a}<0$, 所以当 $x\in[-2, -1]$ 时, 不等式 $-x-\frac{a^2+4}{a}+x+2\leq 5-x$ 恒成立,

即 $-\frac{a^2+4}{a}\leq 3-x$ 在 $[-2, -1]$ 上恒成立, 即 $-\frac{a^2+4}{a}\leq 4$, 又 $a<0$, $\frac{a^2+4}{-a}\geq 4$, 所以 $\frac{a^2+4}{-a}=4$, 所以 $a=-2$,

故 a 的取值集合是 $\{-2\}$ 10 分

2020 年普通高等学校招生全国统一考试

数学模拟测试参考答案

1. D 本题考查集合的运算. 因为 $A = \{0, 1, 2, 3\}$, $B = \{2, 3, 4, 5\}$, 所以 $A \cup B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$.
2. C 本题考查复数的模. 因为 $z = (1+2i)(2-i) = 4+3i$, 所以 $|z| = \sqrt{4^2+3^2} = 5$.
3. C 本题考查向量的垂直求值. 由题知, $a - \lambda b = (1-\lambda, 2+\lambda)$, 又因为 $(a - \lambda b) \perp a$, 所以 $1-\lambda+4+2\lambda=0$, 解得 $\lambda = -5$.
4. A 本题考查充分、必要条件. 由 $\frac{x-2}{x+2} \leq 0$, 得 $-2 < x \leq 2$, 所以“ $\frac{x-2}{x+2} \leq 0$ ”是“ $-2 \leq x \leq 2$ ”的充分不必要条件.
5. C 本题考查茎叶图. 由茎叶图可知, 第一场得分的中位数为 $\frac{5}{2}$, 众数为 0, 平均数为 $\frac{35}{6}$,

方差约为 45.6, 第二场得分的众数为 0, 平均数为 $\frac{19}{3}$, 方差约为 43.2, 所以选项 C 的说法是错误的.

6. C 本题考查双曲线的离心率. 令 $c = \sqrt{a^2+b^2}$, 由题知, $\frac{c}{a} = \frac{5}{3}$, 设 $a = 3k$, 所以 $c = 5k, b = 4k$, 所以 $\frac{|PF_1|}{|PF_2|} = \frac{b+c}{c-b} = \frac{4k+5k}{5k-4k} = 9$.

7. B 本题考查函数的图象. 因为 $f(-x) = f(x)$, 所以 $f(x)$ 为偶函数, 排除 C, D 项, 又因为 $f(1) = \frac{1-e}{1+e} \ln(\sqrt{2}-1) > 0$, 所以排除 A 项.

8. C 本题考查数学史与立体几何. 由 $V = \frac{1}{6} \pi d^3$, 解得 $\pi = \frac{6V}{d^3}$. 选项 A 化简得 $\frac{V}{d^3} \approx \frac{9}{16}$, 所以 $\pi \approx \frac{6 \times 9}{16} = 3.375$; 选项 B 化简得 $\frac{V}{d^3} \approx \frac{1}{2}$, 所以 $\pi \approx \frac{6}{2} = 3$; 选项 C 化简得 $\frac{V}{d^3} \approx \frac{157}{300}$, 所以 $\pi \approx \frac{6 \times 157}{300} = 3.14$; 选项 D 化简得 $\frac{V}{d^3} \approx \frac{8}{15}$, 所以 $\pi \approx \frac{6 \times 8}{15} = 3.2$. 所以选项 C 的公式最精确.

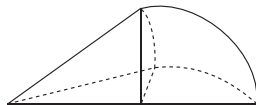
9. A 本题考查三角恒等变换. 因为 $2\cos \alpha - \cos \beta = \frac{3}{2}$, $2\sin \alpha + \sin \beta = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 所以 $4\cos^2 \alpha - 4\cos \alpha \cos \beta + \cos^2 \beta = \frac{9}{4}$, $4\sin^2 \alpha + 4\sin \alpha \sin \beta + \sin^2 \beta = \frac{3}{4}$, 两式相加得 $5 - 4(\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta) = 3$, 解得 $\cos(\alpha + \beta) = \frac{1}{2}$.

10. A 本题考查三视图. 根据三视图可知, 该几何体是由 $\frac{1}{4}$ 个圆锥和 $\frac{1}{8}$ 个球组成的,

如图所示, 其中球的半径为 3, 圆锥的底面半径也为 3, 高为 4, 母线长为 5, 故该几

何体的表面积为 $2 \times \frac{1}{2} \times 3 \times 4 + 2 \times \frac{1}{4} \times \pi \times 3^2 + \frac{1}{8} \times 4 \times \pi \times 3^2 + \frac{1}{4} \times \pi \times 3 \times 5 = 12 + \frac{9\pi}{2} + \frac{9\pi}{2} + \frac{15\pi}{4} = 12 +$

$\frac{51\pi}{4}$.



11. B 本题考查解三角形. 因为 $\sin(A-B+C) - \sin(A-B-C) = \frac{2}{3} - \sin(A+B-C)$, 即 $\sin(A-B+C) - \sin(A-B-C) + \sin(A+B-C) = \frac{2}{3}$,

所以 $2\sin A \cos(C-B) + \sin 2A = \frac{2}{3}$, 所以 $2\sin A \cos(C-B) + 2\sin A \cos A = \frac{2}{3}$,

所以 $2\sin A[\cos(C-B)-\cos(B+C)]=\frac{2}{3}$, 所以 $4\sin A\sin B\sin C=\frac{2}{3}$,

所以 $\sin A\sin B\sin C=\frac{1}{6}$. 设 $\triangle ABC$ 的外接圆的半径为 R , 即 $R=3$,

$\triangle ABC$ 的面积 $S=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}(2R\sin A)(2R\sin B)\sin C=2R^2\sin A\sin B\sin C=2\times 3^2\times \frac{1}{6}=3$.

【思路点拨】 本题考查利用三角形内角和为 180° 转化三角恒等变换, 渗透了逻辑推理和数学运算素养, 利用转化与化归思想把已知条件转化为“ $4\sin A\sin B\sin C=\frac{2}{3}$ ”是难点, 利用正弦定理把三角形的面积转化为三个内角正弦值和外接圆的半径表示是关键.

12. B 本题考查直线与椭圆的位置关系. 不妨设直线 AB 的方程为 $y=kx+m$, 代入椭圆方程得 $(1+4k^2)x^2+8kmx+4(m^2-1)=0$. 设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, 则 $x_1+x_2=-\frac{8km}{1+4k^2}, x_1x_2=\frac{4(m^2-1)}{1+4k^2}$.

设 $C(x_3, y_3)$, 因为 O 为 $\triangle ABC$ 的重心, 所以 $x_3=-(x_1+x_2)=\frac{8km}{1+4k^2}, y_3=-(y_1+y_2)=-[k(x_1+x_2)+2m]=-\frac{2m}{1+4k^2}$, 代入椭圆方程得 $4m^2=4k^2+1, |AB|=\sqrt{1+k^2}|x_1-x_2|$,

点 O 到直线 AB 的距离 $d=\frac{|m|}{\sqrt{1+k^2}}$, 所以 $\triangle OAB$ 的面积 $S_1=\frac{1}{2}\times |AB|\times d=\frac{1}{2}\times |m|\times$

$\sqrt{(-\frac{8km}{1+4k^2})^2-4\times \frac{4(m^2-1)}{1+4k^2}}=\frac{2|m|}{1+4k^2}\sqrt{1+4k^2-m^2}$.

因为 $4m^2=4k^2+1$, 所以 $S_1=\frac{2|m|}{4m^2}\sqrt{3m^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$, 因为 O 为 $\triangle ABC$ 的重心, 所以 $\triangle ABC$ 的面积 $S=3S_1=\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

(另解: 不妨设 $A(2, 0)$, 因为 O 为 $\triangle ABC$ 的重心, 所以 B, C 横坐标为 -1 , 可得 $|BC|=\sqrt{3}$, 所以 $\triangle ABC$ 的面积为 $S=\frac{1}{2}\times 3\times \sqrt{3}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$.)

13. -6 本题考查函数的性质. 由题知, $g(2)=f(2)+2=g(-2)=-4$, 解得 $f(2)=-6$.

14. 78 本题考查等差数列基本量的求解. 设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d , 因为 $S_{11}=66$, 所以 $11a_6=66$, 解得 $a_6=6$, 又因为 $a_3a_6+a_9=27$, 所以 $(a_6-3d)a_6+(a_6+3d)=27$, 解得 $d=1$, 所以 $a_n=n$, 又因为 $S_{12}=S_{11}+a_{12}$, 所以 $S_{12}=66+12=78$.

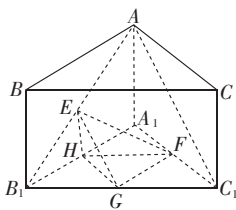
15. $\frac{2\pi}{3}$ 本题考查三角函数的性质. 因为点 $(\frac{2\pi}{3}, 0)$ 和 $(\frac{7\pi}{6}, 0)$ 是函数 $f(x)$ 图象上相邻的两个对称中心, 所以 $\frac{\pi}{\omega}=\frac{7\pi}{6}-\frac{2\pi}{3}=\frac{\pi}{2}$, 解得 $\omega=2$, 所以 $2\times \frac{2\pi}{3}+\varphi=k\pi$, 即 $\varphi=k\pi-\frac{4\pi}{3}(k\in \mathbf{Z})$, 又因为 $0<\varphi<\pi$, 所以 $\varphi=\frac{2\pi}{3}$.

16. $\frac{\sqrt{3}}{4}$ 本题考查异面直线所成角. 因为平面 $\alpha//$ 平面 $A_1B_1C_1$,

平面 $\alpha\cap$ 平面 $A_1B_1C_1=l$, 平面 $A_1B_1C_1\cap$ 平面 $A_1B_1C_1=A_1B_1$,

所以 $l//A_1B_1$, 取 A_1B_1, B_1C_1 的中点分别为 H, G ,

连接 EH, EG, GH, GF, AC_1 , 如图所示, 则 $GF//A_1B_1$, 所以 $GF//l$, 所以异面直线 EF 与 l 所成的角为 $\angle GFE$ 或其补角, 又因为 $AB=2\sqrt{3}, AA_1=2$, 所以 $AC_1=4, EH=1, HF=GF=\sqrt{3}$, 所



$$\text{以 } EG=EF=2, \text{ 所以 } \cos \angle GFE = \frac{\frac{GF}{2}}{\frac{EF}{2}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{2}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

【解题方法】本题以三棱柱为载体,综合考查异面直线所成角的概念.解答的基本方法是通过平移直线,把异面直线平移到两条相交直线上,明确异面直线所成角的概念,应用三角函数知识求解,充分利用图形特征,则可事半功倍.例如本题利用图形易得 $l \parallel A_1 B_1$,这是本题的题眼.

17. 解: 本题考查线面平行及多面体的体积.

(1) 证明: 因为 $BC \parallel AD, AD=2BC, E$ 为线段 AD 的中点, 所以 $BC \parallel AE$, 连接 EC , 因为 $AB \perp AD$, 所以四边形 $ABCE$ 为矩形, 连接 BE 交 AC 于点 O , 连 GO , 因为 G 为线段 PB 的中点, 所以 $GO \parallel PE$, 因为 $GO \not\subset$ 平面 $PEF, PE \subset$ 平面 PEF , 所以 $GO \parallel$ 平面 PEF , 由题易知, $AC \parallel$ 平面 PEF , 又因为 $GO \subset$ 平面 $GAC, AC \subset$ 平面 $GAC, AC \cap GO = O$, 所以平面 $PEF \parallel$ 平面 GAC , 又因为 $AG \subset$ 平面 GAC , 所以直线 $AG \parallel$ 平面 PEF . ……

…………… 6 分

(2) 因为 $AD=2BC=2PA=2, AB=1$, 所以四棱锥 $P-ABCD$ 的体积 $S = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times (1+2) \times 1 \times 1 = \frac{1}{2}$, 三

棱锥 $G-ABC$ 的体积 $S = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 1 \times 1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{12}$, 三棱锥 $P-DEF$ 的体积 $S = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 1 \times \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{12}$,

故所求多面体 $AGCPEF$ 的体积为 $\frac{1}{2} - \frac{1}{12} - \frac{1}{12} = \frac{1}{3}$. …… 12 分

18. 解: 本题考查数列通项公式及前 n 项和.

(1) 因为 $3S_n = (1-4^{-n})a_{n+1}$, 所以当 $n \geq 2$ 时, $3S_{n-1} = (1-4^{-(n-1)})a_n$, 所以 $3a_n = (1-4^{-n})a_{n+1} - (1-4^{-(n-1)})a_n$,

整理得 $(1-4^{-n})(a_{n+1}-4a_n)=0$, 所以 $a_{n+1}=4a_n, (n \geq 2)$,

当 $n=1$ 时, $3S_1 = (1-4^{-1})a_2, a_1=4$, 所以 $a_2=16$, 所以 $a_2=4a_1$,

所以数列 $\{a_n\}$ 是首项和公比均为 4 的等比数列, 所以 $a_n = 4 \times 4^{n-1} = 4^n$, 即 $a_n = 4^n$. …… 5 分

(2) 由(1)知, $a_n = 4^n$, 所以 $b_n = (-1)^{n+1} \cdot (\log_2 4^n)^2 = (-1)^{n+1} \cdot (\log_2 2^{2n})^2 = 4(-1)^{n+1} \cdot n^2$

当 n 为奇数时, $T_n = 4(1-2^2+3^2-\cdots-(n-1)^2+n^2) = 4[1+5+9+(2n-1)] = 4 \frac{\frac{n+1}{2}(1+2n-1)}{2} = 2n(n+1)$;

当 n 为偶数时, $T_n = 4(1-2^2+3^2-\cdots+(n-1)^2-n^2) = 2(n-1)n-4n^2 = -2n(n+1)$.

综上所述, 数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 $T_n = (-1)^{n+1} 2n(n+1)$. …… 12 分

【名师点睛】等差数列、等比数列的通项公式及前 n 项和问题, 是高考的常考内容, 解题过程中要注意应用函数与方程思想, 构建方程(或方程组)求基本量, 例如此题, 从已知出发, 构建 a_1, d 的方程组求数列通项公式, 分奇偶求数列的前 n 项和.

19. 解: 本题考查线性回归方程.

(1) 由题中数据计算得 $\bar{t} = \frac{1}{5}(1+2+3+4+5) = 3$,

$\bar{y} = \frac{1}{5}(165+177+201+238+290) = 214.2$,

$\sum_{i=1}^5 (t_i - \bar{t})(y_i - \bar{y}) = -2 \times (-49.2) + (-1) \times (-37.2) + 0 \times (-13.2) + 1 \times 23.8 + 2 \times 75.8 = 311$,

$$\sum_{i=1}^5 (t_i - \bar{t})^2 = (-2)^2 + (-1)^2 + 0^2 + 1^2 + 2^2 = 10,$$

由参考数据知, $\sum_{i=1}^5 (y_i - \bar{y})^2 = 10290.8$, $\sqrt{10290.8} \approx 320.79$,

$$\text{所以 } r = \frac{\sum_{i=1}^5 (t_i - \bar{t})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^5 (t_i - \bar{t})^2 \sum_{i=1}^5 (y_i - \bar{y})^2}} = \frac{311}{320.79} \approx 0.97, \text{ 因为 } y \text{ 与 } t \text{ 的相关系数近似为 } 0.97, \text{ 说明 } y \text{ 与 } t \text{ 的线性}$$

相关程度相当高, 所以可以用线性回归模型拟合 y 与 t 的关系. 6 分

$$(2) \text{ 由 (1) 知, } \hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^5 (t_i - \bar{t})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^5 (t_i - \bar{t})^2} = \frac{311}{10} = 31.1, \hat{a} = \bar{y} - \hat{b}\bar{t} = 214.2 - 31.1 \times 3 = 120.9, \text{ 故所求回归方程为 } \hat{y} = 31.1t + 120.9,$$

将 2021 年对应的 $t=7$ 代入回归方程得 $\hat{y} = 31.1 \times 7 + 120.9 = 338.6$,

所以预测 2021 年全国硕士研究生报考人数约为 338.6 万人. 12 分

20. 解: 本题考查函数最值及恒成立求参数范围.

$$(1) f'(x) = e^x - 2ax - 1,$$

$$\text{所以 } g(x) = e^x - 2ax - 1, g'(x) = e^x - 2a,$$

① 当 $a \leq 0$ 时, $g'(x) > 0$, 所以 $g(x) = e^x - 2ax - 1$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增, 不合题意;

② 当 $a > 0$ 时, $x \in (-\infty, \ln 2a)$, $g'(x) < 0$, $x \in (\ln 2a, +\infty)$, $g'(x) > 0$,

所以函数 $g(x)$ 在区间 $(-\infty, \ln 2a)$ 上单调递减, 在区间 $(\ln 2a, +\infty)$ 上单调递增,

$g(x) \geq g(\ln 2a) = 2a(1 - \ln 2a) - 1 = 0$, 令 $\mu(x) = x - x \ln x - 1$, 则 $\mu'(x) = -\ln x$, 所以 $\mu(x)$ 在区间 $(0, 1)$ 上单调递增, 在区间 $(1, +\infty)$ 上单调递减, 所以 $\mu(x) \leq \mu(1) = 0$, 所以由 $2a(1 - \ln 2a) - 1 = 0$, 解得 $a = \frac{1}{2}$, 即实数 a 的值为 $\frac{1}{2}$ 6 分

(2) 因为 $\forall x > 0, f(x) \geq (1-a)x^2 - (1+a)x + 1$ 恒成立, 所以 $e^x - x^2 + ax - 1 \geq 0$,

$$\text{即 } -a \leq \frac{e^x - x^2 - 1}{x} \text{ 对任意 } x > 0 \text{ 恒成立, 令 } \varphi(x) = \frac{e^x - x^2 - 1}{x},$$

$$\text{则 } \varphi'(x) = \frac{(x-1)(e^x - x - 1)}{x^2}, \text{ 由 (1) 知, } e^x - x - 1 \geq 0,$$

当且仅当 $x=0$ 时, 等号成立, 所以函数 $\varphi(x)$ 在区间 $(0, 1)$ 上单调递减, 在区间 $(1, +\infty)$ 上单调递增, 所以 $\varphi(x) \geq \varphi(1) = e - 2$, 所以 $-a \leq e - 2$, 即 $a \geq 2 - e$.

所以实数 a 的取值范围为 $[2 - e, +\infty)$ 12 分

21. 解: 本题考查抛物线的性质.

$$(1) \text{ 因为 } |PF| = 10, \text{ 所以 } 8 + \frac{p}{2} = 10, \text{ 解得 } p = 4, \text{ 所以 } F(0, 2),$$

$$\text{因为 } t^2 = 8 \times 8, \text{ 且 } t < 0, \text{ 所以 } t = -8, \text{ 所以 } P(-8, 8),$$

$$\text{故直线 } PF \text{ 的方程为 } y - 2 = \frac{8-2}{-8-0}(x-0), \text{ 化简得 } 3x + 4y - 8 = 0. \text{ 4 分}$$

(2) 由 (1) 知, 抛物线方程为 $x^2 = 8y$, 点 $F(0, 2)$. 设 $M(x_1, y_1), N(x_2, y_2)$, 又因为 $y' = \frac{1}{4}x$, 所以直线 m 的方程为 $y - y_1 = \frac{1}{4}x_1(x - x_1)$, 整理得 $y = \frac{1}{4}x_1x - y_1$, 同理可得直线 n 的方程为 $y = \frac{1}{4}x_2x - y_2$. 设 $G(x_3, y_3)$,

$$\text{联立} \begin{cases} y_3 = \frac{1}{4}x_1x_3 - y_1 \\ y_3 = \frac{1}{4}x_2x_3 - y_2 \end{cases}, \text{得直线 } l \text{ 的方程为 } y_3 = \frac{1}{4}xx_3 - y, \text{ 又因为直线 } l \text{ 过点 } (0, 4), \text{ 所以 } y_3 = -4, \text{ 即点 } G$$

在定直线 $y = -4$ 上, 所以 $|PG|$ 的最小值为 $8 - (-4) = 12$ 12 分

【解题思路】解决直线与抛物线的综合问题时, 需要注意:

- (1) 观察、应用题设中的每一个条件, 明确确定直线、抛物线的条件;
- (2) 强化有关直线与抛物线联立得出一元二次方程后的运算能力, 重视根与系数之间的关系、弦长、斜率、三角形的面积等问题;
- (3) 注重平面几何的知识, 利用数形结合的思想处理问题.

22. 解: 本题考查坐标系与参数方程.

(1) 由题知, 曲线 C 的直角坐标方程为 $x^2 + y^2 = 4$, 直线 l 的直角坐标方程为 $\sqrt{3}x - y + 2m = 0$, 因为直线 l 与曲线 C 至多只有一个公共点, 所以 $\frac{|2m|}{\sqrt{3+1}} = |m| \geq 2$, 所以实数 m 的取值范围为 $(-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$.

..... 5 分

(2) 设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), P(u, v)$, 由 (1) 知, $m \in (-2, 2)$, 由 $\begin{cases} \sqrt{3}x - y + 2m = 0 \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases}$, 解得 $4x^2 + 4\sqrt{3}mx + 4m^2 - 4 = 0$, 所以 $2u = x_1 + x_2 = -\sqrt{3}m, 2v = y_1 + y_2 = \sqrt{3}(x_1 + x_2) + 4m = m$, 所以 $2u = -2\sqrt{3}v$, 即 $u = -\sqrt{3}v$, 故点 P 的轨迹方程为 $x + \sqrt{3}y = 0 (-1 < y < 1)$ 10 分

23. 解: 本题考查不等式证明.

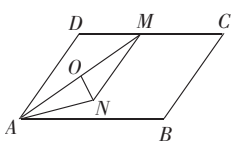
(1) 因为 $a^2 + b^2 = 2$, 所以 $ab \leq 1$, 所以 $ab \leq \sqrt{ab} \leq 1$, 又因为 $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$, 所以 $ab \leq \frac{a+b}{2}$, 即 $a+b \geq 2ab$, 当且仅当 $a=b$ 时等号成立. 5 分

(2) $a^4 + b^4 = (a^2 + b^2)^2 - 2a^2b^2 = 4 - 2a^2b^2$, 由 (1) 知 $ab \leq 1$, 所以 $a^2b^2 \leq 1$, 所以 $4 - 2a^2b^2 \geq 4 - 2 = 2$, 即 $a^4 + b^4 \geq 2$, 当且仅当 $a=b$ 时等号成立. 10 分

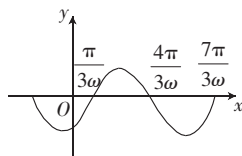
答案

2020 年普通高等学校招生全国统一考试

数学模拟测试参考答案

1. A 本题考查复数的运算及几何意义. 由 $z = \frac{3+i}{1-i} = \frac{(3+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{2+4i}{2} = 1+2i$, 所以复数 z 在复平面内对应点的坐标为 $(1, 2)$, 所以 z 在复平面内的对应点位于第一象限.
2. D 本题考查集合的运算. 因为 $1-x > 0$, 所以 $x < 1$, 所以 $A = (-\infty, 1)$, 所以 $\complement_U A = [1, +\infty)$. 因为 $x > 0$, 所以 $B = (0, +\infty)$, 所以 $(\complement_U A) \cap B = [1, +\infty)$.
3. C 本题考查指、对、幂数的大小比较. 因为 $a = \log_3 0.3 < 0$, $b = 3^{-4.1} \in (0, 1)$, $c = (\frac{8}{27})^{-\frac{1}{3}} = \frac{3}{2} > 1$, 所以 $a < b < c$.
4. D 本题考查双曲线的性质. 等轴双曲线 $y^2 - x^2 = 4$ 过第一象限的渐近线方程为 $y = x$, 因为 $|OP| = 2\sqrt{2}$, 所以点 P 的坐标为 $(2, 2)$.
5. A 本题考查三角恒等变换. $\because \sin 2\theta = -\frac{3}{4}$, $\therefore \sin \theta \cos \theta = -\frac{3}{8}$,
则 $\tan \theta + \frac{1}{\tan \theta} = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} + \frac{\cos \theta}{\sin \theta} = \frac{1}{\sin \theta \cos \theta} = -\frac{8}{3}$.
6. A 本题考查函数的图象与性质. 因为函数 $f(x)$ 为非奇非偶函数, 所以函数图象不关于 y 轴对称, 排除选项 C, D, 当 $x \rightarrow +\infty$ 时, 函数值 $f(x) \rightarrow +\infty$, 故排除选项 B.
7. B 本题考查中国传统文化与古典概型. 设事件 $A =$ “从打击乐器和弹拨乐器中任取两音, 含有弹拨乐器”, 从打击乐器和弹拨乐器中任取两音的基本事件有: (金, 石), (金, 木), (金, 革), (金, 丝), (石, 木), (石, 革), (石, 丝), (木, 革), (木, 丝), (革, 丝); 含有弹拨乐器的基本事件有: (金, 丝), (石, 丝), (木, 丝), (革, 丝). 所以 $P(A) = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$.
8. C 本题考查逻辑推理. 由题意乙说: “丁应该是第一名”, 丁说: “我不赞同乙的判断”, 说明这两位同学有一个判断正确, 另一个判断不正确, 所以甲、丙判断不正确, 所以获得这次演讲比赛第一名的人就是丙.
9. B 本题考查平面向量的数量积. 取 AM 的中点为 O , 连接 ON , 因为 $AN = NM$, 所以 $ON \perp AM$. 因为 $\angle DAB = 60^\circ$, 所以 $\angle ADM = 120^\circ$, 所以 $\overrightarrow{AM}^2 = (\overrightarrow{DM} - \overrightarrow{DA})^2 = 4 + 16 - 2 \times 2 \times 4 \times (-\frac{1}{2}) = 28$, 则 $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AM} \cdot (\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{ON}) = \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{ON} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AM}^2 = \frac{1}{2} \times 28 = 14$.
- 
10. B 本题考查多面体与球. 因为 $AB \perp AP$, $CB \perp AP$, $CB \cap AB = B$, 所以 $PA \perp$ 底面 ABC , 因为点 P 到底面 ABC 的距离为 1, 所以 $AP = 1$. 因为 $CB \perp AP$, $CB \perp AB$, $AB \cap PA = A$, 所以 $BC \perp$ 平面 PAB , 故 $BC \perp PB$, $\angle PBC = \angle PAC = 90^\circ$, 即该球的直径为 CP , $CP = \sqrt{AB^2 + CB^2 + AP^2} = \sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2} = 3$, 所以球的半径为 $R = \frac{3}{2}$, $S = 4\pi R^2 = 9\pi$.
11. A 本题考查三角函数的图象与性质. 由题意知 $g(x) = \cos(\omega x - \frac{5}{6}\pi)$ ($\omega > 0$), 其大致图象如图,
因为函数 $g(x)$ 在 $(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$ 上没有零点, 所以 $\frac{3}{2}\pi - \frac{\pi}{2} \leq \frac{T}{2} = \frac{\pi}{\omega}$, 所以 $\omega \leq 1$.

①当 $\frac{3\pi}{2} \leq \frac{\pi}{3\omega}$ 时, 得 $0 < \omega \leq \frac{2}{9}$; ②当 $\begin{cases} \frac{\pi}{3\omega} \leq \frac{\pi}{2} \\ \frac{4\pi}{3\omega} \geq \frac{3\pi}{2} \end{cases}$ 时, 得 $\frac{2}{3} \leq \omega \leq \frac{8}{9}$. 其他情况无解或解不在范围内. 综合得 ω 的取值范围是 $(0, \frac{2}{9}] \cup [\frac{2}{3}, \frac{8}{9}]$.



12. C 本题考查等差数列的应用. 因为 $a_{2n+1} + a_{2n} = 6n - 1$, 所以 $S_{40} = a_1 + a_2 + \cdots + a_{40} = a_1 + (a_2 + a_3) + \cdots + (a_{38} + a_{39}) + a_{40} = a_1 + 5 + 11 + 17 + \cdots + 113 + a_{40} = a_1 + a_{40} + \frac{19(5+113)}{2} = a_1 + a_{40} + 1121$.

因为 $a_{2n+1} + a_{2n-1} = 3$, 所以 $a_{39} = 3 - a_1$, 又因为 $a_{2n} - a_{2n-1} = 6n - 4$, 所以 $a_{40} = 119 - a_1$, 所以 $S_{40} = a_1 + a_2 + \cdots + a_{40} = a_1 + a_{40} + 1121 = a_1 + 119 - a_1 + 1121 = 119 + 1121 = 1240$.

【解题技巧】 本题为等差数列的综合应用, 有一定的思维量, 解决此题可用多种方法.

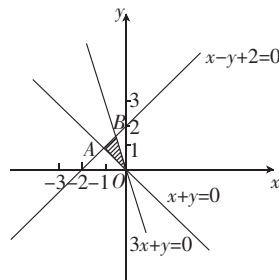
方法一: 先根据 $a_{2n+1} + a_{2n} = 6n - 1 (n \in \mathbf{N}_+)$, 利用并项求和得 $S_{40} = a_1 + a_{40} + 1121$, 再通过计算、观察得相邻奇数项的和为定值 3, 从而得出 $a_{40} = 119 - a_1$, 最后抵消 a_1 算出 S_{40} ;

方法二: 对递推公式进行变形得相邻奇数项的和为 $a_{2n+1} + a_{2n-1} = 3$, 相邻偶数项的和为 $a_{2n+2} + a_{2n} = 12n + 1$, 把前 40 项的和进行分组, 分为奇数项的和与偶数项的和即可求解.

13. $\frac{3}{2}$ 本题考查简单的线性规划. 先作出约束条件所表示的平面区域, 如图所示,

联立 $\begin{cases} x - y + 2 = 0 \\ 3x + y = 0 \end{cases}$, 解得 $B(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$, 当目标函数过点 B 时取最大值, 所以

$$z_{\max} = 3 \times (-\frac{1}{2}) + 2 \times \frac{3}{2} = \frac{3}{2}.$$



14. $\frac{1}{2}$ 本题考查求等比数列的基本量. 因为 $S_3 = \frac{7}{4}$, $a_3 = \frac{1}{4}$, 所以

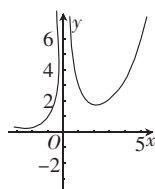
$$\begin{cases} a_1(1+q+q^2) = \frac{7}{4} \\ a_1q^2 = \frac{1}{4} \end{cases}, \text{解得 } q = \frac{1}{2} \text{ 或 } q = -\frac{1}{3} \text{ (不合题意, 舍去)}.$$

15. $[\frac{e^2}{4}, +\infty)$ 本题考查函数与导数. 因为 $f'(x) = [f'(0)]^2 e^x - 2kx$, 所以 $f'(0) = [f'(0)]^2$,

解得 $f'(0) = 1$ 或 $f'(0) = 0$ (不合题意, 舍去), 所以 $f(x) = e^x - kx^2$, 由 $y = f(x)$ 至少有两个零点, 所以 $e^x - kx^2 = 0$ 至少有两根, 因为 $x = 0$ 不是方程的根, 所以方程可化为 $k = \frac{e^x}{x^2}$, 记

$g(x) = \frac{e^x}{x^2}$, 因为 $g'(x) = \frac{e^x x^2 - 2xe^x}{(x^2)^2} = \frac{e^x(x-2)}{x^3}$, 所以 $g(x)$ 在区间 $(0, 2)$ 单调递减, 在区间 $(-\infty, 0)$ 和 $(2, +\infty)$ 单调递增, 函数 $g(x)$ 大致图象如图, 所以当 $k \geq g(2) = \frac{e^2}{4}$ 时, 函数 $f(x)$ 至少有 2 个零点, 所以实数 k

的取值范围是 $[\frac{e^2}{4}, +\infty)$.



【知识拓展】

一、分离变量法

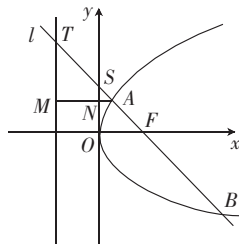
是通过将两个变量构成的不等式(方程)变形到不等号(等号)两端, 使两端变量各自相同, 解决有关不等式恒成立、不等式存在(有)解和方程有解中参数取值范围的一种方法. 可以避开对参数的分类讨论, 大大提高解题的准确度.

二、数形结合法

“数”与“形”反映了事物两个方面的属性. 我们认为, 数形结合, 主要指的是数与形之间的一一对应关系. 数形结合就是把抽象的数学语言、数量关系与直观的几何图形、位置关系结合起来, 通过“以形助数”或“以数解形”即通过抽象思维与形象思维的结合, 可以使复杂问题简单化, 抽象问题具体化, 从而起到优化解题途径的目的.

16. $\frac{4}{3}p$ 2 本题考查抛物线的定义与平面几何知识. 过点 A 作准线的垂线, 垂足为

M, AM 与 y 轴交于点 N , 因为 $|FA| = 2|AS|$, 所以 $\frac{|SA|}{|SF|} = \frac{1}{3}$, 所以 $|AN| = \frac{1}{3}|OF| = \frac{p}{3}$, 所以 $|AM| = \frac{4}{3}p$, 根据抛物线的定义知 $|AF| = |AM| = \frac{4}{3}p$. 因为 $|AS| = \frac{1}{2}|AF| = \frac{2}{3}p$, 所以 $|SF| = 2p$, 所以 $|TS| = 2p$. 根据抛物线的性质:


$$\frac{1}{|AF|} + \frac{1}{|BF|} = \frac{2}{2p}, \text{ 所以 } \frac{3}{4p} + \frac{1}{|BF|} = \frac{1}{p}, \text{ 解得 } |BF| = 4p, \text{ 所以 } \frac{|FB|}{|TS|} = \frac{4p}{2p} = 2.$$

【温馨提示】2019 年全国 II 卷出现了两空题,2020 年全国 I、II、III 卷都有一定概率出现两空题,故此题设置两空.

17. 解: 本题考查解三角形.

(1) 因为 $\frac{AB}{\sin \angle ADB} = \frac{AD}{\sin \angle ABD}$, 所以 $\sin \angle ABD = \frac{5 \times \frac{\sqrt{3}}{2}}{7} = \frac{5\sqrt{3}}{14}$, 因为 $AD < AB$, 所以 $\angle ABD < \angle ADB$, 所

以 $\cos \angle ABD = \frac{11}{14}$. 因为 $\sin \angle BAD = \sin(120^\circ - \angle ABD)$,

所以 $\sin \angle BAD = \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{11}{14} + \frac{1}{2} \times \frac{5\sqrt{3}}{14} = \frac{4}{7}\sqrt{3}$ 6 分

(2) 因为 $\frac{BD}{\sin \angle BAD} = \frac{AB}{\sin \angle ADB}$, 所以 $BD = \frac{7 \times \frac{4\sqrt{3}}{7}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 8$, 所以 $16 = 64 + DC^2 - 8\sqrt{3}DC$, 解得 $DC = 4\sqrt{3}$

..... 12 分

18. 解: 本题考查用频率估计概率、独立性检验.

(1) 由调查数据, 男学生愿意投入到新生接待工作的比率为 $\frac{60}{80} = 0.75$, 所以男学生愿意投入到新生接待工作的概率估计值是 0.75;

女学生愿意投入到新生接待工作的比率为 $\frac{40}{80} = 0.5$, 所以女学生愿意投入到新生接待工作的概率估计值是 0.5. 所以男生愿意投入到新生接待工作的概率更大. 6 分

(2) 因为 K^2 的观测值 $k = \frac{160 \times (60 \times 40 - 40 \times 20)^2}{80 \times 80 \times 100 \times 60} = \frac{32}{3} \approx 10.667 > 6.635$,

所以有 99% 的把握认为愿意参加新生接待工作与性别有关, 12 分

19. 解: 本题考查线面平行, 点面距.

(1) 连接 A_1C_1 , 设 $B_1D_1 \cap A_1C_1 = O_1$, 连接 O_1C , 因为四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$, O, O_1 分别为 AC, A_1C_1 的中点, 所以 $OC \parallel A_1O_1, OC = A_1O_1$, 所以四边形 A_1OCO_1 为平行四边形, 所以 $A_1O \parallel O_1C$, 因为 $A_1O \not\subset$ 平面 $B_1CD_1, O_1C \subset$ 平面 B_1CD_1 , 所以 $A_1O \parallel$ 平面 B_1CD_1 6 分

(2) 连接 B_1O, AB_1, BA_1 , 因为 $AB=AA_1=2, A_1O \perp$ 平面 $ABCD$, 所以 $BO=AO=OA_1=\sqrt{2}$, 所以 $BA_1=2$.
 因为 $V_{O-ABB_1A_1}=2V_{O-ABA_1}=2V_{A_1-ABO}=2 \times \frac{1}{3} \times \sqrt{2} \times \frac{1}{2} \times \sqrt{2}^2 = \frac{2\sqrt{2}}{3}$, $S_{\square ABB_1A_1}=2 \times \frac{\sqrt{3}}{4} \times 2^2 = 2\sqrt{3}$, 设点 O
 到平面 ABB_1A_1 的距离为 h_1 , 所以 $\frac{1}{3} \times 2\sqrt{3} \times h_1 = \frac{2\sqrt{2}}{3}$, 所以 $h_1 = \frac{\sqrt{6}}{3}$, 因为 O 为 AC 的中点, 所以点 C 到平
 面 ABB_1A_1 的距离 $h=2h_1 = \frac{2\sqrt{6}}{3}$ 12 分

20. 解: 本题考查椭圆综合.

(1) 椭圆经过 $T(2,0)$, 即 $b=2$, $\triangle TF_1F_2$ 的周长为 $8\sqrt{2}+12$, 故 $a+c=6+4\sqrt{2}$, 又因为 $a^2=b^2+c^2$, 所以 $a=$
 $6, c=4\sqrt{2}$, 故椭圆 C 的方程为 $\frac{y^2}{36} + \frac{x^2}{4} = 1$ 4 分

(2) 设 $P(x_1, y_1), Q(x_2, y_2), A(x_0, y_0)$, 联立 $\begin{cases} \frac{y^2}{36} + \frac{x^2}{4} = 1 \\ y = kx + m \end{cases}$, 化简得 $(k^2+9)x^2 + 2kmx + m^2 - 36 = 0$, 所以 x_0
 $= \frac{x_1+x_2}{2} = -\frac{km}{k^2+9}, y_0 = \frac{9m}{k^2+9}$, 于是直线 OA 的斜率 $k_{OA} = -\frac{9}{k}$, 由 $\begin{cases} y = -\frac{9}{k}x \\ 9x^2 + y^2 = 36 \end{cases}$, 得 $x_B = \frac{\pm 2k}{\sqrt{k^2+9}}$, 因为
 直线 l 过点 $(2,6)$, 所以将点 $(2,6)$ 代入直线 l 的方程得 $m=6-2k$, 所以 $x_0 = \frac{k(2k-6)}{k^2+9}$, 因为 $|OB|=2|OA|$,
 所以 $\frac{\pm 2k}{\sqrt{k^2+9}} = 2 \times \frac{k(2k-6)}{k^2+9}$, 解得 $k=4 \pm \sqrt{7}$, 因为 l 与 C 交于 P, Q 两点, 所以 $\Delta = 4k^2m^2 - 4(m^2-36)(k^2+$
 $9) > 0$, 即 $m^2 < 4(k^2+9)$, 结合 $m=6-2k$ 和 $m \neq 0$, 解得 $k > 0$ 且 $k \neq 3$, 所以 k 的取值都适合, 所以 $m = \pm 2\sqrt{7}$
 -2 12 分

21. 解: 本题考查函数的极值与证明不等式.

(1) 因为 $f'(x) = a(1 - \frac{1}{x}) + 2x - 2 = \frac{(x-1)(2x+a)}{x}$, 所以当 $a = -2e$ 时, $f'(x) = \frac{2(x-1)(x-e)}{x}$. 当 $0 < x$
 < 1 时, $f'(x) > 0$; 当 $1 < x < e$ 时, $f'(x) < 0$; 当 $x > e$ 时, $f'(x) > 0$. 故函数 $y=f(x)$ 在 $(0,1)$ 和 $(e, +\infty)$ 上单
 调递增, 在 $(1,e)$ 上单调递减, 所以当 $x=1$ 时, 函数有极大值 $f(1) = -2e-1$, 当 $x=e$ 时, 函数有极小值 $f(e)$
 $= -e^2$ 5 分

(2) 由 $f(x_1) - f'(\frac{x_1+x_2}{2})x_1 < f(x_2) - f'(\frac{x_1+x_2}{2})x_2$, 可得 $f(x_1) - f(x_2) < f'(\frac{x_1+x_2}{2})(x_1-x_2)$, 即 $a(x_1$
 $-\ln x_1) + x_1^2 - 2x_1 - a(x_2 - \ln x_2) - x_2^2 + 2x_2 < (x_1+x_2+a-2-\frac{2a}{x_1+x_2})(x_1-x_2)$, 化简可得 $a \ln \frac{x_1}{x_2} >$
 $\frac{2a(x_1-x_2)}{x_1+x_2}$, 因为 $a > 0$, 所以 $\ln \frac{x_1}{x_2} > \frac{2(x_1-x_2)}{x_1+x_2}$, 即 $\ln \frac{x_1}{x_2} > \frac{2(\frac{x_1}{x_2}-1)}{\frac{x_1}{x_2}+1}$, 设 $t = \frac{x_1}{x_2} > 1$, 构造函数 $h(t) = \ln t -$
 $\frac{2(t-1)}{t+1}$, $h'(t) = \frac{(t-1)^2}{t(t+1)^2} > 0$, 则 $h(t) > h(1) = 0$, 则有 $\ln \frac{x_1}{x_2} > \frac{2(\frac{x_1}{x_2}-1)}{\frac{x_1}{x_2}+1}$, 从而有 $f(x_1) - f'(\frac{x_1+x_2}{2})x_1 <$
 $f(x_2) - f'(\frac{x_1+x_2}{2})x_2$ 12 分

【解题技巧】 本题为导数的综合, 当证明结果较繁时我们一般可以利用分析法对其进行化简, 找出要证明问

题的本质;对于双变量问题,可以利用构造函数法,把双变量转化为单变量,再利用导数去探讨它的相关性质.

22. 解: 本题考查极坐标与参数方程.

(1) 由已知曲线 C 的普通方程为 $(x-2)^2 + y^2 = 4$, 即 $x^2 + y^2 = 4x$, 因为 $x = \rho \cos \theta$, $\rho^2 = x^2 + y^2$, 可得 $\rho^2 = 4\rho \cos \theta$, 化简为 $\rho = 4 \cos \theta$, 所以曲线 C 的极坐标方程为 $\rho = 4 \cos \theta$.

直线 l 的参数方程: $\begin{cases} x = -1 + t \cos \alpha, \\ y = -3\sqrt{3} + t \sin \alpha \end{cases} \quad (t \text{ 为参数}, 0 \leq \alpha < \pi).$ 4 分

(2) 设 A, B 对应的参数分别为 t_A, t_B ,

将直线 l 的参数方程代入 C 并整理, 得 $t^2 - 6t(\sqrt{3} \sin \alpha + \cos \alpha) + 32 = 0$,

所以 $t_A + t_B = 6(\sqrt{3} \sin \alpha + \cos \alpha)$, $t_A \cdot t_B = 32$.

又 A 为 MB 的中点, 所以 $t_B = 2t_A$,

因此 $t_A = 2(\sqrt{3} \sin \alpha + \cos \alpha) = 4 \sin(\alpha + \frac{\pi}{6})$, $t_B = 8 \sin(\alpha + \frac{\pi}{6})$,

所以 $t_A \cdot t_B = 32 \sin^2(\alpha + \frac{\pi}{6}) = 32$, 即 $\sin^2(\alpha + \frac{\pi}{6}) = 1$.

因为 $0 \leq \alpha < \pi$, 所以 $\frac{\pi}{6} \leq \alpha + \frac{\pi}{6} < \frac{7\pi}{6}$,

从而 $\alpha + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$, 即 $\alpha = \frac{\pi}{3}$, $\tan \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$ 10 分

23. 解: 本题考查绝对值不等式的解法.

(1) 因为 $a=1$, $f(x) \leq 6$, 所以 $|x+1| + |x-2| \leq 5$,

因为 $|x+1| + |x-2| = \begin{cases} 2x-1, & x > 2 \\ 3, & -1 \leq x \leq 2 \\ 1-2x, & x < -1 \end{cases}$. 当 $\begin{cases} x > 2 \\ 2x-1 \leq 5 \end{cases}$, 解得 $2 < x \leq 3$; 当 $\begin{cases} -1 \leq x \leq 2 \\ 3 \leq 5 \end{cases}$, 解得 $-1 \leq x \leq 2$, 当

$\begin{cases} x < -1 \\ 1-2x \leq 5 \end{cases}$, 解得 $-2 \leq x < -1$, 所以不等式的解集为 $[-2, 3]$ 5 分

(2) 因为 $2a \leq x < -1$, $f(x) \leq 2x+6$, 所以 $-x-1+x-2a+1 \leq 2x+6$, 所以 $-a-3 \leq x$, 因为不等式 $f(x) \leq 2x+6$ 要有解, 所以 $-a-3 < -1$, 即 $a > -2$, 所以实数 a 的取值范围是 $(-2, -\frac{1}{2})$ 10 分

答案