

名师密卷·密卷

理科数学

第 I 卷

一、选择题:本大题共 12 小题,每小题 5 分,在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

(1)复数 $z = \frac{1+i}{-2i}$ 在复平面内对应的点位于 ()

- (A)第一象限 (B)第二象限 (C)第三象限 (D)第四象限

(2)已知集合 $A = \{x | x^2 + 2x - 3 \geq 0\}$, $B = \{x | \log_2(x-2) \leq 0\}$, 则 $A \cap B =$ ()

- (A) $\{x | 1 \leq x \leq 3\}$ (B) $\{x | 2 < x \leq 3\}$ (C) $\{x | 2 \leq x < 3\}$ (D) $\{x | 2 \leq x \leq 3\}$

(3)已知 $A+B = \frac{\pi}{3}$, $\cos A \cos B = \frac{3}{4}$, 则 $\tan A + \tan B =$ ()

- (A) $\frac{\sqrt{3}+1}{3}$ (B) $\frac{\sqrt{3}-1}{4}$ (C) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ (D) $\frac{\sqrt{3}+1}{4}$

(4)某公司由于改进了经营模式,经济效益与日俱增.统计了 2018 年 10 月到 2019 年 4 月的纯收益 y (单位:万元)的数据,如下表:

月份	十	十一	十二	一	二	三	四
月份代号 t	3	4	5	6	7	8	9
纯收益 y	66	69	73	81	89	90	91

得到 y 关于 t 的线性回归方程为 $\hat{y} = 4.75t + 51.36$. 请预测该公司 2019 年 6 月的纯收益为 ()

- (A)94.11 万元 (B)98.86 万元 (C)103.61 万元 (D)108.36 万元

(5)已知 F_1, F_2 分别是双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左、右焦点,过右焦点 F_2 且垂直于 x 轴的直线与双曲线交于 A, B 两点,若 $|AB| = |F_1F_2|$, 则双曲线离心率的值为 ()

- (A) $\frac{\sqrt{5}+2}{2}$ (B) $\sqrt{5}+1$ (C) $\sqrt{2}+1$ (D) $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$

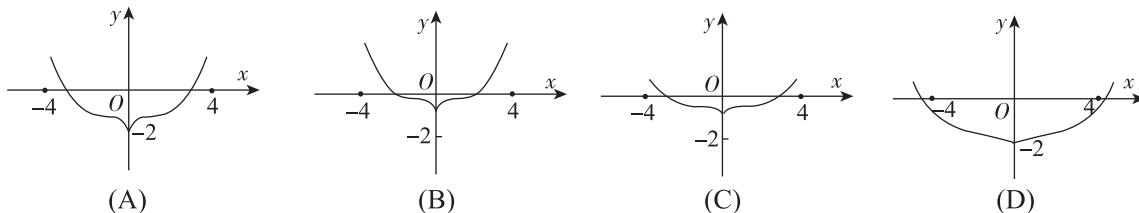
(6)已知某市高三一次模拟考试数学成绩 $X \sim N(90, \sigma^2)$, 且 $P(70 < X < 110) = 0.8$, 则从该市任选 3 名高三学生,恰有 1 名成绩不低于 110 分的概率是 ()

- (A)0.2 (B)0.1 (C)0.243 (D)0.027

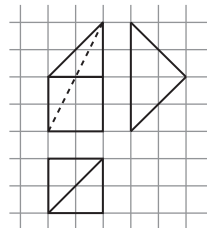
(7)把函数 $y = \cos 2x$ 的图象上所有点向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度,则所得图象 ()

- (A)关于 $x = \frac{\pi}{3}$ 对称 (B)对称中心为 $(\frac{5\pi}{6}, 0)$
(C)关于 $x = -\frac{\pi}{6}$ 对称 (D)对称中心为 $(-\frac{\pi}{12}, 0)$

(8)函数 $f(x) = \frac{2e^{|x|}}{x^2+1} - 4$ 的图象大致为 ()



- (9) 如图, 网格纸上小正方形的边长为 1, 粗线画出的是某多面体的三视图, 则该几何体的表面积为 ()



- (A) $8+8\sqrt{6}$
 (B) $8+6\sqrt{6}+2\sqrt{2}$
 (C) $8+6\sqrt{2}+2\sqrt{6}$
 (D) $8+8\sqrt{2}$

- (10) $(1+x^2-\frac{1}{\sqrt{x}})^7$ 展开式中的 x^4 项的系数为 ()

- (A) 56 (B) -56 (C) 14 (D) -14

- (11) 已知二面角 $\alpha-l-\beta$ 为 45° , $AB \subset \alpha$, $AB \perp l$, A 为垂足, $CD \subset \beta$, $C \in l$, $\angle ACD = 150^\circ$, 则异面直线 AB 与 CD 所成角的余弦值为 ()

- (A) $\frac{\sqrt{2}}{4}$ (B) $\frac{1}{4}$ (C) $\frac{\sqrt{3}}{4}$ (D) $\frac{1}{2}$

- (12) 已知圆 $C: (x+2)^2 + (y-1)^2 = \frac{5}{2}$ 与椭圆 $\Gamma: x^2 + 4y^2 = 4b^2$ 相交于 A, B 两点, 若 AB 是圆 C 的直径, 则椭圆 Γ 的方程为 ()

- (A) $\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{3} = 1$ (B) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ (C) $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} = 1$ (D) $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$

第 II 卷

本卷包括必考题和选考题两部分. 第 13 题~第 21 题为必考题, 每个试题考生都必须作答. 第 22 题~第 23 题为选考题, 考生根据要求作答.

二、填空题: 本大题共 4 小题, 每小题 5 分.

- (13) 若向量 $a = (1, 2)$, $b = (1, -1)$, 则 $2a + b$ 与 a 夹角的余弦值等于 _____.

- (14) 不等式组 $\begin{cases} x+y-2 \geq 0 \\ x-y+1 \leq 0 \\ y-3 \leq 0 \end{cases}$, 则表示区域的面积为 _____.

- (15) 在 $\triangle ABC$ 中, $2\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{DC}$, $\angle ADB = \frac{2\pi}{3}$, $|\overrightarrow{AD}| = 2$, $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{6}$, 则 $|\overrightarrow{AC}| =$ _____.

- (16) 已知 $a > 0$, 若关于 x 的不等式 $e^x \geq a \ln x$ 恒成立, 则实数 a 的取值范围为 _____.

三、解答题: 解答应写出文字说明, 证明过程或演算步骤.

- (17) (本小题满分 12 分)

已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , $S_n = \frac{4^n - 1}{3} (n \in \mathbf{N}^*)$.

(I) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

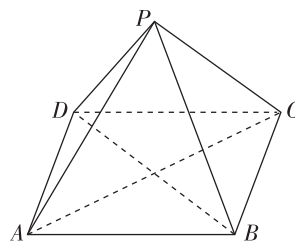
(II) 设 $b_n = \log_2 \sqrt{a_{n+1}}$, 求数列 $\{\frac{b_n}{a_n}\}$ 的前 n 项和 T_n .

(18)(本小题满分 12 分)

如图,在四棱锥 $P-ABCD$ 中,已知 $ABCD$ 是平行四边形, $\angle DAB = 60^\circ$, $AD = AB = PB$, $PC \perp PA$, $PC = PA$.

(I) 求证: $BD \perp$ 平面 PAC ;

(II) 求二面角 $A-PB-C$ 的余弦值.



(19)(本小题满分 12 分)

端午节(每年农历五月初五),是中国传统节日,有吃粽子的习俗.某超市在端午节这一天,每售出 1 kg 粽子获利润 5 元,未售出的粽子每 1 kg 亏损 3 元.根据历史资料,得到销售情况与市场需求量的频率分布表,如下图所示.该超市为今年的端午节预购进 140 kg 粽子.以 X (单位:kg, $100 \leq X \leq 150$) 表示今年的市场需求量, Y (单位:元)表示今年的利润.

市场需求量(kg)	$[100, 110)$	$[110, 120)$	$[120, 130)$	$[130, 140)$	$[140, 150]$
频率	0.1	0.2	0.3	0.25	0.15

(I) 将 Y 表示为 X 的函数;

(II) 在频率分布表的市场需求量分组中,以各组的区间中间值代表该组的各个值,需求量落入该区间的频率作为需求量取该区间中间值的概率(例如:若需求量 $X \in [110, 120)$,则取 $X = 115$,且 $X = 115$ 的概率等于需求量落入 $[110, 120)$ 的频率 0.2),求 Y 的数学期望.

(20)(本小题满分 12 分)

已知抛物线 $C: y^2 = 4x$,过 $P(2, 0)$ 的直线与抛物线 C 相交于 M, N 两点.

(I) 若点 Q 是点 P 关于坐标原点 O 的对称点,求 $\triangle MQN$ 面积的最小值;

(II) 是否存在垂直于 x 轴的直线 l ,使得 l 被以 PM 为直径的圆截得的弦长恒为定值? 若存在,求出 l 的方程和定值;若不存在,说明理由.

(21)(本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x) = xe^{2x} - \ln x - 2ax$.

(I) 若函数 $y = f(x)$ 在 $x = 1$ 处的切线的斜率为 1, 求 a 的值;

(II) 若 $f(x) \geq 2x + 1$, 求 a 的取值范围.

请考生从第 22、23 题中任选一题作答, 多答, 按首题进行评分.

(22)(本小题满分 10 分)【选修 4-4: 坐标系与参数方程】

在平面直角坐标系 xOy 中, 直线 l 的参数方程为 $\begin{cases} x = t \cos \alpha \\ y = 1 + t \sin \alpha \end{cases}$ (t 为参数, $0 \leq \alpha < \pi$). 以坐标原点 O 为极点, x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系, 曲线 C 的极坐标方程为 $\rho^2 = \frac{4}{1 + 3 \cos^2 \theta}$.

(I) 写出曲线 C 的直角坐标方程;

(II) 设点 P 的极坐标为 $(1, \frac{\pi}{2})$, 直线 l 与曲线 C 交于 A, B 两点, 若 $|PA| \cdot |PB| = \frac{12}{13}$, 求 α 的值.

(23)(本小题满分 10 分)【选修 4-5: 不等式选讲】

函数 $f(x) = |x + 2| + |x - a|$ ($a \in \mathbf{R}$).

(I) 当 $a = 2$ 时, 不等式 $f(x) \leq 6$ 的解集 M ;

(II) 若 $x \in (0, 1)$ 时, 不等式 $f(x) < x + 4$ 成立, 求 a 的取值范围.