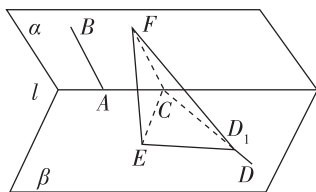
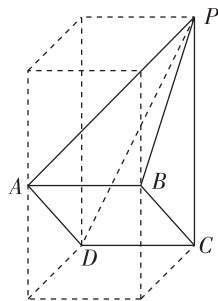


名师密卷·密卷

理科数学

参考答案

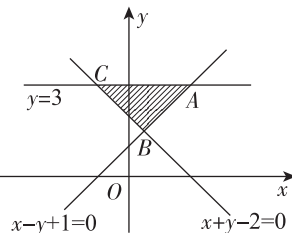
1. B 【解析】 $z = \frac{1+i}{-2i} = \frac{-1+i}{2}$, 在复平面内对应点的坐标为 $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, 所以位于第二象限, 故选 B.
2. B 【解析】 $A = \{x | x^2 + 2x - 3 \geq 0\} = \{x | x \leq -3 \text{ 或 } x \geq 1\}$, $B = \{x | \log_2(x-2) \leq 0\} = \{x | 2 < x \leq 3\}$, 所以 $A \cap B = \{x | 2 < x \leq 3\}$, 故选 B.
3. C 【解析】 $\tan A + \tan B = \frac{\sin A \cos B + \sin B \cos A}{\cos A \cos B} = \frac{\sin(A+B)}{\cos A \cos B} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$, 故选 C.
4. C 【解析】将 2019 年 6 月代号 $t=11$ 带入题中的回归方程, 得 $\hat{y} = 4.75 \times 11 + 51.36 = 103.61$, 故选 C.
5. D 【解析】将 $x=c$, 代入 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, 得 $y = \pm \frac{b^2}{a}$, 所以 $|AB| = \frac{2b^2}{a}$, 由 $|AB| = |F_1 F_2|$, 得 $\frac{2b^2}{a} = 2c$, 所以 $ac = c^2 - a^2$, 两边同时除以 a^2 得: $e^2 - e - 1 = 0$, 解得 $e = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$, 所以 $e = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$, 故选 D.
6. C 【解析】由 $X \sim N(90, \sigma^2)$, 且 $P(70 < X < 110) = 0.8$, 可知成绩不低于 110 分的概率是 0.1, 则 3 名高三学生, 恰有 1 名成绩不低于 110 分的概率是 $P = C_3^1 (0.1)(0.9)^2 = 0.243$. 故选 C.
7. D 【解析】所得函数为 $g(x) = \cos 2(x - \frac{\pi}{6}) = \cos(2x - \frac{\pi}{3})$, 则对称轴方程为: $x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{6} (k \in \mathbf{Z})$, 对称中心为 $(\frac{k\pi}{2} + \frac{5\pi}{12}, 0) (k \in \mathbf{Z})$, 故选 D.
8. A 【解析】 $f(0) = -2$, 排除 B, C, 又 $f(4) = \frac{2(e^4 - 34)}{17} > 0$, 故选 A.
9. C 【解析】满足三视图的几何体为四棱锥 $P-ABCD$, 如右图所示: 则 $S_{ABCD} = 4\sqrt{2}$, $S_{PCB} = 4$, $S_{PCD} = 4$, $S_{PAB} = 2\sqrt{2}$, $S_{PAD} = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{2} \times 2\sqrt{3} = 2\sqrt{6}$, 所以 $S_{P-ABCD} = 8 + 6\sqrt{2} + 2\sqrt{6}$, 故选 C.
10. A 【解析】第一种情况: 在 7 个括号中, 选 2 个括号中的 x^2 , 再从余下的 5 个括号中都选 1, 即得 x^4 , 此时系数为: $C_7^2 C_5^5$; 第二种情况: 在 7 个括号中, 选 3 个括号中的 x^2 , 再从余下的 4 个括号中都选 $-\frac{1}{\sqrt{x}}$, 即得 x^4 , 此时系数为: $C_7^3 C_4^4 (-1)^4$. 所以 x^4 项的系数为 $C_7^2 C_5^5 + C_7^3 C_4^4 (-1)^4 = 56$, 故选 A.
11. A 【解析】如图所示, 在平面 α 内过点 C 作 $CF \parallel AB$, 过点 F 作 $FE \perp \beta$, 垂足为点 E , 连接 CE , 则 $CE \perp l$, 所以 $\angle ECF = 45^\circ$. 过点 E 作 $D_1 E \perp CE$, 交 CD 于点 D_1 , 连接 FD_1 . 不妨设 $CE = a$, 则 $EF = a$, $CF = \sqrt{2}a$. 因为 $\angle ACD = 150^\circ$, 所以 $\angle D_1 CE = 60^\circ$, 所以, 在 $\text{Rt} \triangle D_1 CE$ 中, $ED_1 = \sqrt{3}a$, $CD_1 = 2a$, $\therefore FD_1 = 2a$, $\therefore \cos \angle D_1 CF = \frac{4a^2 + 2a^2 - 4a^2}{2 \times 2a \times \sqrt{2}a} = \frac{\sqrt{2}}{4}$, 故选 A.
12. A 【解析】依题意, 点 A, B 关于圆心 $M(-2, 1)$ 对称, 且 $|AB| = \sqrt{10}$. 设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, 则 $x_1^2 + 4y_1^2 = 4b^2, x_2^2 + 4y_2^2 = 4b^2$, 两式相减并结合 $x_1 + x_2 = -4, y_1 + y_2 = 2$ 得 $-4(x_1 - x_2) + 8(y_1 - y_2) = 0$. 易知, AB 不与 x 轴垂直, 则 $x_1 \neq x_2$, 所以 AB 的斜率 $k_{AB} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \frac{1}{2}$, 因此 AB 直线方程为 $y = \frac{1}{2}(x+2) + 1$, 代入椭圆方程得: $x^2 + 4x + 8 - 2b^2 = 0$, 所以 $x_1 + x_2 = -4, x_1 x_2 = 8 - 2b^2$. 于是 $|AB| = \sqrt{1 + (\frac{1}{2})^2} |x_1 - x_2| =$



$\frac{\sqrt{5}}{2}\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\sqrt{10(b^2-2)}$. 由 $|AB|=\sqrt{10}$, 得 $\sqrt{10(b^2-2)}=\sqrt{10}$, 解得 $b^2=3$. 所以椭圆的方程为 $\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{3}=1$, 故选 A.

13. $\frac{3\sqrt{10}}{10}$ 【解析】因为 $2\mathbf{a}+\mathbf{b}=(3,3)$, 设其夹角为 θ , 故 $\cos\theta=\frac{9}{3\sqrt{2}\cdot\sqrt{5}}=\frac{3\sqrt{10}}{10}$.

14. $\frac{9}{4}$ 【解析】画出不等式组表示的区域, 如图, 求得 $A(2,3), B(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}), C(-1,3)$, 所以 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\times 3\times \frac{3}{2}=\frac{9}{4}$.



15. $3\sqrt{2}-\sqrt{6}$ 【解析】在 $\triangle ABD$ 中, 由正弦定理得 $\frac{AD}{\sin B}=\frac{AB}{\sin \angle ADB}$, 得 $\sin B=\frac{\sqrt{2}}{2}$, 且 $0<B<\frac{\pi}{3}$, 所以 $B=\frac{\pi}{4}$. 在 $\triangle ABD$ 中, 由余弦定理得 $AB^2=BD^2+AD^2-2\times BD\times AD\times \cos \frac{2\pi}{3}$, 即 $BD^2+2BD-2=0$, 解得: $BD=\sqrt{3}-1$. 则 $BC=3BD=3(\sqrt{3}-1)$. 在 $\triangle ABC$ 中, $AC^2=BA^2+BC^2-2\times BA\times BC\times \cos \frac{\pi}{4}$, 所以 $AC^2=24-12\sqrt{3}$, $\therefore AC=\sqrt{6}\cdot(\sqrt{3}-1)=3\sqrt{2}-\sqrt{6}$.

16. $(0, e]$ 【解析】显然 $x>0$, 由 $e^x\geq a\ln x$, 得 $\frac{e^x}{a}\geq \ln x$, 则令 $f(x)=\frac{e^x}{a}, g(x)=\ln x$, 显然 $y=f(x)$ 与 $y=g(x)$ 互为反函数, 所以只需要 $f(x)\geq x$, 即 $\frac{e^x}{x}\geq a$, 令 $h(x)=\frac{e^x}{x}$, 则 $h'(x)=\frac{e^x(x-1)}{x^2}$, 所以 $h(x)\geq h(1)=e$, 即 $a\in(0, e]$.

17. 【解析】(I) 由 $S_n=\frac{4^n-1}{3}$, 得

当 $n=1$ 时, $a_1=S_1=1$; 2 分

当 $n\geq 2$ 时, $a_n=S_n-S_{n-1}=(\frac{4^n-1}{3})-(\frac{4^{n-1}-1}{3})=4^{n-1}$.

经检验当 $n=1$ 时, 也成立. 所以 $a_n=4^{n-1}$ 4 分

(II) 由 (I) 知 $a_n=4^{n-1}$, 故 $b_n=\log_2\sqrt{a_{n+1}}=\log_2 2^n=n$.

所以 $\frac{b_n}{a_n}=\frac{n}{4^{n-1}}$ 6 分

$T_n=1\times(\frac{1}{4})^0+2\times(\frac{1}{4})^1+3\times(\frac{1}{4})^2+4\times(\frac{1}{4})^3+\dots+n\times(\frac{1}{4})^{n-1}$, ①

$\frac{1}{4}T_n=1\times(\frac{1}{4})^1+2\times(\frac{1}{4})^2+3\times(\frac{1}{4})^3+\dots+(n-1)\times(\frac{1}{4})^{n-1}+n\times(\frac{1}{4})^n$, ②

由 ①-②, 得 8 分

$\frac{3}{4}T_n=1+(\frac{1}{4})^1+(\frac{1}{4})^2+(\frac{1}{4})^3+\dots+(\frac{1}{4})^{n-1}-n\times(\frac{1}{4})^n=\frac{1-(\frac{1}{4})^n}{1-\frac{1}{4}}-n\times(\frac{1}{4})^n$,

所以 $T_n=\frac{16}{9}-\frac{3n+4}{9}\times(\frac{1}{4})^{n-1}$ 12 分

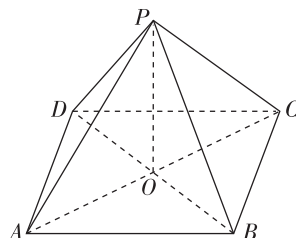
18. 【解析】(I) 证明: 设 $AD=AB=PB=2, AC\cap BD=O$, 连接 OP ,

则因为 $AB=AD$, 且 $\angle BAD=60^\circ$, 所以四边形 $ABCD$ 为菱形,

所以 $AC\perp BD$, 且 $AC=2\sqrt{3}, DB=2, BO=1$.

又 $PC\perp PA, PC=PA$,

所以 $\triangle PCA$ 是等腰直角三角形, $OP\perp AC, PC=PA=\sqrt{6}, OP=\sqrt{3}$.



在 $\triangle POB$ 中, $OP=\sqrt{3},BP=2,OB=1$,有 $OB^2+OP^2=PB^2$, 2分

所以 $OP\perp OB$,即 $BD\perp OP$.

又 $AC\cap OP=O$,所以 $BD\perp$ 平面 PAC 4分

(II)建立直角坐标系(如图),则 $O(0,0,0),A(\sqrt{3},0,0),B(0,1,0),C(-\sqrt{3},0,0),P(0,0,\sqrt{3})$,

则 $\overrightarrow{AP}=(-\sqrt{3},0,\sqrt{3}),\overrightarrow{AB}=(-\sqrt{3},1,0)$,

$\overrightarrow{BP}=(0,-1,\sqrt{3}),\overrightarrow{BC}=(-\sqrt{3},-1,0)$,

设 $\mathbf{m}=(x_1,y_1,z_1)$ 是平面 ABP 的法向量,

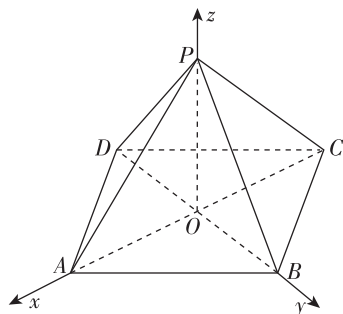
则 $\begin{cases} -\sqrt{3}x_1+\sqrt{3}z_1=0, \\ -\sqrt{3}x_1+y_1=0 \end{cases}$,所以 $\mathbf{m}=(1,\sqrt{3},1)$ 6分

设 $\mathbf{n}=(x_2,y_2,z_2)$ 是平面 CBP 的法向量,

则 $\begin{cases} -y_2+\sqrt{3}z_2=0 \\ -\sqrt{3}x_2-y_2=0 \end{cases}$,所以 $\mathbf{n}=(-1,\sqrt{3},1)$ 8分

$\therefore \cos\langle \mathbf{m}, \mathbf{n} \rangle = \frac{\mathbf{m} \cdot \mathbf{n}}{|\mathbf{m}| \cdot |\mathbf{n}|} = \frac{3}{5}$ 11分

所以二面角 $A-BP-C$ 的余弦值为 $-\frac{3}{5}$ 12分



19.【解析】(I)当 $X\in[100,140)$ 时, $Y=5X-3(140-X)=8X-420$;

当 $X\in[140,150]$ 时, $Y=5\times 140=700$.

所以 $Y=\begin{cases} 8X-420, 100\leq X<140, \\ 700, 140\leq X\leq 150. \end{cases}$ 4分

(II)依题意可得 Y 的分布列为

Y	420	500	580	660	700
P	0.1	0.2	0.3	0.25	0.15

..... 10分

所以 $E(Y)=420\times 0.1+500\times 0.2+580\times 0.3+660\times 0.25+700\times 0.15=586$ 12分

20.【解析】(I)依题意,点 Q 的坐标为 $Q(-2,0)$,可设 $M(x_1,y_1),N(x_2,y_2)$,

直线 MN 的方程为 $x=my+2$,与 $y^2=4x$ 联立得 $y^2-4my-8=0$.

由韦达定理得: $y_1+y_2=4m, y_1\cdot y_2=-8$,

于是 $S_{\triangle MQN}=\frac{1}{2}\times 4\times |y_1-y_2|=2\sqrt{(y_1+y_2)^2-4y_1\cdot y_2}=2\sqrt{16m^2+32}\geq 8\sqrt{2}$,

所以当 $m=0$ 时, $\triangle MQN$ 面积最小值,最小值为 $8\sqrt{2}$ 4分

(II)假设满足条件的直线 l 存在,其方程为 $x=a$,

则以 PM 为直径的圆的方程为 $(x-2)(x-x_1)+y(y-y_1)=0$,

将直线方程 $x=a$ 代入,得 $y^2-y_1y+(a-2)(a-x_1)=0$,

则 $\Delta=y_1^2-4(a-2)(a-x_1)=4[(a-1)x_1+a(2-a)]>0$ 8分

设直线 l 与以 PM 为直径的圆的交点为 $A(a,y_3),B(a,y_4)$,

则 $y_3+y_4=y_1, y_3\cdot y_4=(a-2)(a-x_1)$,于是有

$|AB|=|y_3-y_4|=\sqrt{4[(a-1)x_1+a(2-a)]}=2\sqrt{(a-1)x_1+a(2-a)}$ 10分

当 $a-1=0$,即 $a=1$ 时, $|AB|=2$ 为定值.

故满足条件的直线 l 存在,其方程为 $x=1$ 12分

21.【解析】(I)由 $f'(x)=(2x+1)e^{2x}-\frac{1}{x}-2a$,得

$$f'(1)=3e^2-1-2a=1, \text{解得 } a=\frac{3e^2}{2}-1. \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$$

$$(II) \text{由 } f(x) \geq 2x+1, \text{可得: } e^{2x}-\frac{1+\ln x}{x} \geq 2a+2, \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

$$\text{令 } g(x)=e^{2x}-\frac{1+\ln x}{x}, \text{则 } g'(x)=\frac{2x^2e^{2x}+\ln x}{x^2},$$

$$\text{令 } \varphi(x)=2x^2e^{2x}+\ln x, \text{则 } \varphi'(x)=4xe^{2x}(x+1)+\frac{1}{x}>0,$$

所以 $y=\varphi(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增,

$$\text{又 } \varphi(e^{-1})=\frac{2}{e^2} \cdot e^{\frac{2}{e}}-1<\frac{2}{e^2} \cdot e-1<\frac{2}{e}-1<0, \text{且 } \varphi(1)=2e^2>0.$$

$$\text{所以存在 } x_0 \in (\frac{1}{e}, 1), \text{使得 } \varphi(x_0)=0, \text{即 } 2x_0^2e^{2x_0}+\ln x_0=0, \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

所以在 $(0, x_0)$ 上 $g(x)$ 单调递减, 在 $(x_0, +\infty)$ 上 $g(x)$ 单调递增.

$$\text{故 } g(x)_{\min}=g(x_0)=e^{2x_0}-\frac{1+\ln x_0}{x_0},$$

$$\text{令 } x_0^2e^{2x_0}=t, \text{两边同时取对数得: } 2\ln x_0+2x_0=\ln t(*),$$

$$\text{由 } 2x_0^2e^{2x_0}+\ln x_0=0, \text{得 } \ln x_0+2t=0,$$

$$\text{所以 } \ln x_0+2x_0=\ln t+2t, \text{所以有 } x_0=t, \text{即 } \ln x_0=-2x_0,$$

$$\text{所以 } x_0^2e^{2x_0}=t=x_0, \text{即 } e^{2x_0}=\frac{1}{x_0}.$$

$$\text{所以 } g(x)_{\min}=g(x_0)=e^{2x_0}-\frac{1+\ln x_0}{x_0}=\frac{1}{x_0}-\frac{(1-2x_0)}{x_0}=2. \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

$$\text{故 } 2a+2 \leq 2, \text{得 } a \leq 0. \text{所以 } a \text{ 的取值范围是 } (-\infty, 0]. \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

$$22. \text{【解析】(I) 由曲线 } C \text{ 的极坐标方程为 } \rho^2=\frac{4}{1+3\cos^2\theta}, \text{得}$$

$$\rho^2+3\rho^2\cos^2\theta=4, \text{将 } x^2+y^2=\rho^2, \text{及 } x=\rho\cos\theta \text{ 代入得 } 4x^2+y^2=4,$$

$$\text{即 } \frac{y^2}{4}+x^2=1. \dots\dots\dots 5 \text{ 分}$$

$$(II) \text{点 } P \text{ 的直角坐标为 } (0, 1), \text{将 } \begin{cases} x=t\cos\alpha \\ y=1+t\sin\alpha \end{cases} \text{ 代入 } \frac{y^2}{4}+x^2=1, \text{得}$$

$$(1+3\cos^2\alpha)t^2+2\sin\alpha \cdot t-3=0.$$

$$\text{则 } |PA| \cdot |PB| = \frac{3}{1+3\cos^2\alpha} = \frac{12}{13}, \text{解得 } \cos\alpha = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}, \text{因为 } 0 \leq \alpha < \pi,$$

$$\text{所以 } \alpha = \frac{\pi}{6} \text{ 或 } \alpha = \frac{5\pi}{6}. \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

$$23. \text{【解析】(I) 当 } a=2 \text{ 时, } |x+2|+|x-2| \leq 6, \text{由绝对值的几何意义可得:}$$

$$M=\{x|-3 \leq x \leq 3\}.$$

$$\text{所以不等式 } f(x) \leq 6 \text{ 的解集 } M=\{x|-3 \leq x \leq 3\}. \dots\dots\dots 5 \text{ 分}$$

(II) 若 $x \in (0, 1)$ 时, 不等式 $f(x) < x+4$ 成立, 等价于

$$|x-a| < 2, \text{则 } a-2 < x < a+2, \text{所以 } \begin{cases} a+2 \geq 1 \\ a-2 \leq 0 \end{cases}, \text{解得 } -1 \leq a \leq 2,$$

$$\text{所以实数 } a \text{ 的取值范围是 } [-1, 2]. \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$