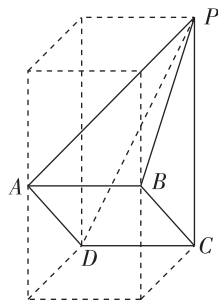


名师密卷·密卷

文科数学 参考答案

1. D 【解析】 $z = (-2i)(1+i) = 2-2i$, 则在复平面内对应点的坐标为 $(2, -2)$, 所以位于第四象限, 故选 D.
2. B 【解析】 $A = \{x | x^2 - x - 2 \leq 0\} = \{x | -1 \leq x \leq 2\}$, $B = \{x | \log_2 x \leq 0\} = \{x | 0 < x \leq 1\}$, 所以 $A \cap B = \{x | 0 < x \leq 1\}$, 故选 B.
3. D 【解析】 $S_9 = 9 = \frac{(a_1 + a_9) \times 9}{2} = 9a_5$, 所以 $a_5 = 1$, 故选 D.
4. C 【解析】由 $\tan(\alpha + \frac{\pi}{3}) = 2 + \sqrt{3}$, 得 $\tan(\alpha + \frac{\pi}{3}) = \frac{\tan\alpha + \sqrt{3}}{1 - \sqrt{3}\tan\alpha} = 2 + \sqrt{3}$, 解得 $\tan\alpha = 2 - \sqrt{3}$, 则 $\sin 2\alpha = \frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha} = \frac{2\tan\alpha}{\tan^2\alpha + 1} = \frac{1}{2}$, 故选 C.
5. A 【解析】 $f(0) = -2$, 故选 A.
6. C 【解析】将 2019 年 6 月代号 $t = 11$ 带入题中的回归方程, 得 $\hat{y} = 4.75 \times 11 + 51.36 = 103.61$, 故选 C.
7. D 【解析】所得函数为 $g(x) = \cos 2(x - \frac{\pi}{6}) = \cos(2x - \frac{\pi}{3})$, 则对称轴方程为: $x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{6} (k \in \mathbb{Z})$, 对称中心为 $(\frac{k\pi}{2} + \frac{5\pi}{12}, 0) (k \in \mathbb{Z})$, 故选 D.
8. A 【解析】由圆 $C: x^2 + y^2 - 10x + 9 = 0$ 得: $(x-5)^2 + y^2 = 16$, 因为双曲线的右焦点为圆 C 的圆心 $(5, 0)$, 所以 $c = 5$, 又双曲线的两条渐近线 $bx \pm ay = 0$ 均和圆 C 相切, 所以 $b = 4$, 所以 $a = 3$, 所以该双曲线的离心率为 $e = \frac{5}{3}$, 故选 A.
9. D 【解析】设侧棱长为 $2a$, 底面三角形边长为 $2b$, 则由侧棱与底面所成角的余弦值为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$, 得 $\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} \times 2b \times \frac{2}{3}}{2a}$, 所以 $a = b$, 即此正三棱锥为正四面体, 所以该正四面体的外接球的半径 $R = \frac{2\sqrt{6}a}{3} \times \frac{3}{4}$, 则 $\frac{R}{2a} = \frac{\sqrt{6}}{4}$, 故选 D.
10. D 【解析】由 G 为 $\triangle ABC$ 所在平面内一点, 且满足 $\overrightarrow{GA}^2 = \overrightarrow{GB}^2 = \overrightarrow{GC}^2$, 所以 G 为 $\triangle ABC$ 的外心. 依题意有 $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$, 所以 $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AG} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AG} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AG}) = \frac{1}{2}(\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}|^2 + \frac{1}{2}|\overrightarrow{AC}|^2) = \frac{3}{2}$, 故选 D.
11. B 【解析】满足三视图的几何体为四棱锥 $P-ABCD$, 如右图所示: 则 $S_{ABCD} = 4\sqrt{2}$, $S_{PCB} = 4$, $S_{PCD} = 4$, $S_{PAB} = 2\sqrt{2}$, $S_{PAD} = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{2} \times 2\sqrt{3} = 2\sqrt{6}$, 所以该几何体的各个侧面中的面积最大值为 $4\sqrt{2}$, 故选 B.
12. D 【解析】设公切线与函数 $f(x) = \ln x$ 切于点 $A(x_1, \ln x_1) (0 < x_1 \leq 1)$, 则切线方程为 $y - \ln x_1 = \frac{1}{x_1}(x - x_1)$; 设公切线与函数 $g(x) = x^2 + a$ 切于点 $B(x_2, x_2^2 + a)$, 则切线方程为 $y - (x_2^2 + a) = 2x_2(x - x_2)$, 所以有 $\begin{cases} \frac{1}{x_1} = 2x_2 \\ \ln x_1 - 1 = -x_2^2 + a \end{cases}$, $\because 0 < x_1 \leq 1, \therefore \frac{1}{x_1} = 2x_2 \geq 1, x_2 \geq \frac{1}{2}$. 又 $a = -\ln 2x_2 + x_2^2 - 1$, 令 $t = x_2 \in [\frac{1}{2}, +\infty)$, 则



$h(t) = -\ln 2t + t^2 - 1 = -\ln 2 - \ln t + t^2 - 1$, 设 $h'(t) = \frac{2t^2 - 1}{t}$, 则 $h(t)$ 在 $(0, \frac{\sqrt{2}}{2})$ 上为减函数, 在 $(\frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty)$ 上为增函数. 所以函数 $f(x) = \ln x (0 < x \leq 1)$ 与函数 $g(x) = x^2 + a$ 有两条公切线, 满足 $h(\frac{\sqrt{2}}{2}) < h(t) \leq h(\frac{1}{2})$, 即 $-\ln \sqrt{2} - \frac{1}{2} < h(t) \leq -\frac{3}{4}$. $\therefore a \in (-\ln \sqrt{2} - \frac{1}{2}, -\frac{3}{4}]$, 故选 D.

13. e^2 【解析】 $f(-2) = f(2) - 1$, 而 $f(2) = e^2 + 1$, 所以 $f(-2) = e^2$.

14. 4 【解析】根据约束条件画出可行域, 在 $A(2, 3)$ 时, z 有最小值, 即 $z_{\min} = 4$.

15. $\frac{3x^2}{16} + \frac{3y^2}{4} = 1$ 【解析】设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, 则 $x_1 + x_2 = 2, y_1 + y_2 = 1, \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = 1$ ①, $\frac{x_2^2}{a^2} + \frac{y_2^2}{b^2} = 1$ ②, $\therefore k_{AB} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = -\frac{b^2(x_1 + x_2)}{a^2(y_1 + y_2)} = -\frac{2b^2}{a^2}$, 又 $k_{AB} = -\frac{1}{2}$, $\therefore \frac{2b^2}{a^2} = \frac{1}{2}$, 即 $a^2 = 4b^2$, 又 $c^2 = a^2 - b^2 = 4$, 解得 $b^2 = \frac{4}{3}, a^2 = \frac{16}{3}$, $\therefore$ 椭圆方程为 $\frac{3x^2}{16} + \frac{3y^2}{4} = 1$.

16. $2^{12} - 34$ 【解析】由题意, 得 $a_2 = a_1 - 1 = 0, a_4 = a_3 + 1, a_6 = a_5 - 1, \dots, a_{20} = a_{19} + 1$, 所以 $S_{\text{奇}} = S_{\text{偶}}$. 又 $a_{2n} = a_{2n-2} + 2^{n-1} + (-1)^n (n \geq 2, \text{且 } n \in \mathbf{N}^*)$, 所以 $a_2 = 0, a_4 = a_2 + 2^1 + (-1)^2, a_6 = a_4 + 2^2 + (-1)^3, a_8 = a_6 + 2^3 + (-1)^4, \dots, a_{2n} = a_{2n-2} + 2^{n-1} + (-1)^n$, 将上式相加, 得 $a_{2n} = 2 + 2^2 + \dots + 2^{n-1} + (-1)^2 + (-1)^3 + \dots + (-1)^n = 2^n - 2 + \frac{1 - (-1)^{n+1}}{2} = 2^n - \frac{3 + (-1)^{n+1}}{2}$, 所以 $S_{\text{偶}} = (2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^9 + 2^{10}) - \frac{1}{2} \times 30 = \frac{2(1 - 2^{10})}{1 - 2} - 15 = 2^{11} - 17$, 所以 $S_{20} = 2(2^{11} - 17) = 2^{12} - 34$.

17. 【解析】(I) 在 $\triangle ABD$ 中, 由正弦定理得

$$\frac{AD}{\sin B} = \frac{AB}{\sin \angle ADB}, \text{ 得 } \sin B = \frac{\sqrt{2}}{2}, \text{ 且 } 0 < B < \frac{\pi}{3},$$

所以 $B = \frac{\pi}{4}$ 4 分

(II) 在 $\triangle ABD$ 中, 由余弦定理得

$$AB^2 = BD^2 + AD^2 - 2 \times BD \times AD \times \cos \frac{2\pi}{3},$$

即 $BD^2 + 2BD - 2 = 0$, 解得: $BD = \sqrt{3} - 1$. 则 $BC = 3BD = 3(\sqrt{3} - 1)$ 8 分

在 $\triangle ABC$ 中, $AC^2 = BA^2 + BC^2 - 2 \times BA \times BC \times \cos \frac{\pi}{4}$,

所以 $AC^2 = 24 - 12\sqrt{3}$, $\therefore AC = \sqrt{6} \cdot (\sqrt{3} - 1) = 3\sqrt{2} - \sqrt{6}$ 12 分

18. 【解析】(I) 证明: 设 $AC \cap BD = O$, 连接 OP ,

则因为 $AB = AD$, 且 $\angle BAD = 60^\circ$, 所以四边形 $ABCD$ 为菱形,

所以 $AC \perp BD$, 且 $AC = 2\sqrt{3}, DB = 2, BO = 1$ 2 分

又 $PC \perp PA, PC = PA$,

所以 $\triangle PCA$ 是等腰直角三角形, $OP \perp AC, PC = PA = \sqrt{6}, OP = \sqrt{3}$.

在 $\triangle POB$ 中, $OP = \sqrt{3}, BP = 2, OB = 1$, 有 $OB^2 + OP^2 = PB^2$, 4 分

所以 $OP \perp OB$, 即 $BD \perp OP$.

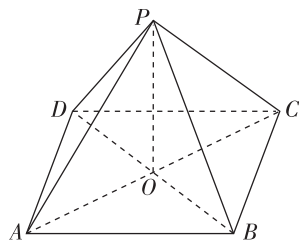
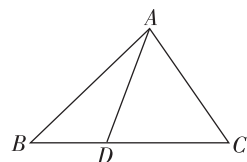
又 $AC \cap OP = O$, 所以 $BD \perp$ 平面 PAC 6 分

(II) 因为 $V_{A-PBC} = V_{P-ACB}$, 8 分

所以 $V_{P-ACB} = \frac{1}{3} \times \sqrt{3} \times \frac{1}{2} \times 2 \times 2 \times \sin 120^\circ = 1$.

所以三棱锥 $C_1 - ABC$ 的体积 1. 12 分

19. 【解析】(I) 当 $X \in [100, 140)$ 时, $Y = 5X - 3(140 - X) = 8X - 420$;



当 $X \in [140, 150]$ 时, $Y = 5 \times 140 = 700$.

所以 $Y = \begin{cases} 8X - 420, & 100 \leq X < 140, \\ 700, & 140 \leq X \leq 150. \end{cases}$ 6 分

(II) 由(I)知, 利润 Y 不少于 620 元, 当且仅当 $130 \leq X \leq 150$.

由频率分布表可知 $130 \leq X \leq 150$ 的频率为 0.4, 所以今年利润不少于 620 元的概率为 0.4. 12 分

20. 【解析】(I) 依题意得, 曲线 C 上的点到点 $F(1, 0)$ 的距离与到直线 $l: x = -1$ 的距离相等. 所以曲线 C 的方程为: $y^2 = 4x$ 4 分

(II) 假设满足条件的直线 l 存在, 其方程为 $x = a$, $P(x_1, y_1)$,

则以 PN 为直径的圆的方程为 $(x-2)(x-x_1) + y(y-y_1) = 0$,

将直线方程 $x = a$ 代入, 得 $y^2 - y_1 y + (a-2)(a-x_1) = 0$,

则 $\Delta = y_1^2 - 4(a-2)(a-x_1) = 4[(a-1)x_1 + a(2-a)] > 0$ 8 分

设直线 l 与以 PN 为直径的圆的交点为 $A(a, y_3), B(a, y_4)$,

则 $y_3 + y_4 = y_1, y_3 \cdot y_4 = (a-2)(a-x_1)$, 于是有

$$|AB| = |y_3 - y_4| = \sqrt{4[(a-1)x_1 + a(2-a)]} = 2\sqrt{(a-1)x_1 + a(2-a)}.$$

当 $a-1=0$, 即 $a=1$ 时, $|AB|=2$ 为定值.

故满足条件的直线 l 存在, 其方程为 $x=1$ 12 分

21. 【解析】(I) 因为 $f'(x) = \frac{1}{x} - k (x > 0)$,

则当 $k \leq 0$ 时, 函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增;

当 $k > 0$ 时, 函数 $f(x)$ 在 $(0, \frac{1}{k})$ 上单调递增, 在 $(\frac{1}{k}, +\infty)$ 上单调递减. 4 分

(II) 因为 x_1, x_2 是方程 $f(x) = 0$ 的两个不同实根, 不妨设 $x_1 < x_2$.

于是, 有 $\begin{cases} \ln x_1 - kx_1 = 0 \\ \ln x_2 - kx_2 = 0 \end{cases}$, 解得 $k = \frac{\ln x_1 + \ln x_2}{x_1 + x_2}$.

另一方面, 由 $\begin{cases} \ln x_1 - kx_1 = 0 \\ \ln x_2 - kx_2 = 0 \end{cases}$, 得 $\ln x_2 - \ln x_1 = k(x_2 - x_1)$,

从而可得, $\frac{\ln x_2 - \ln x_1}{x_2 - x_1} = \frac{\ln x_1 + \ln x_2}{x_1 + x_2}$.

于是, $\ln x_1 + \ln x_2 = \frac{(\ln x_2 - \ln x_1)(x_2 + x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{(1 + \frac{x_2}{x_1}) \ln \frac{x_2}{x_1}}{\frac{x_2}{x_1} - 1}$ 8 分

又 $0 < x_1 < x_2$, 设 $t = \frac{x_2}{x_1}$, 则 $t > 1$. 因此, $\ln x_1 + \ln x_2 = \frac{(1+t) \ln t}{t-1}, t > 1$.

要证 $\ln x_1 + \ln x_2 > 2$, 即证: $\frac{(1+t) \ln t}{t-1} > 2, t > 1$. 即: 当 $t > 1$ 时, 有 $\ln t > \frac{2(t-1)}{t+1}$.

设函数 $h(t) = \ln t - \frac{2(t-1)}{t+1}, t \geq 1$, 则 $h'(t) = \frac{1}{t} - \frac{2(t+1) - 2(t-1)}{(t+1)^2} = \frac{(t-1)^2}{t(t+1)^2} \geq 0$,

所以, $h(t)$ 为 $(1, +\infty)$ 上的增函数. 注意到, $h(1) = 0$, 因此, $h(t) \geq h(1) = 0$.

于是, 当 $t > 1$ 时, 有 $\ln t > \frac{2(t-1)}{t+1}$. 所以, 有 $\ln x_1 + \ln x_2 > 2$ 成立. 12 分

22. 【解析】(I) 由曲线 C 的极坐标方程为 $\rho^2 = \frac{4}{1+3\cos^2\theta}$, 得

$\rho^2 + 3\rho^2 \cos^2\theta = 4$, 将 $x^2 + y^2 = \rho^2$, 及 $x = \rho \cos\theta$ 代入得 $4x^2 + y^2 = 4$,

即 $\frac{y^2}{4} + x^2 = 1$ 5 分

(II) 点 P 的直角坐标为 $(0, 1)$, 将 $\begin{cases} x = t \cos \alpha \\ y = 1 + t \sin \alpha \end{cases}$ 代入 $\frac{y^2}{4} + x^2 = 1$, 得

$$(1+3\cos^2\alpha)t^2+2\sin\alpha\cdot t-3=0.$$

$$\text{则 } |PA| \cdot |PB| = \frac{3}{1+3\cos^2\alpha} = \frac{12}{13}, \text{ 解得 } \cos\alpha = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}, \text{ 因为 } 0 \leq \alpha < \pi,$$

$$\text{所以 } \alpha = \frac{\pi}{6} \text{ 或 } \alpha = \frac{5\pi}{6}. \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

23.【解析】(Ⅰ)当 $a=2$ 时, $|x+2|+|x-2| \leq 6$, 由绝对值的几何意义可得:

$$M = \{x | -3 \leq x \leq 3\}. \dots\dots\dots 5 \text{ 分}$$

所以不等式 $f(x) \leq 6$ 的解集 $M = \{x | -3 \leq x \leq 3\}$.

(Ⅱ)若 $x \in (0, 1)$ 时, 不等式 $f(x) < x+4$ 成立, 等价于

$$|x-a| < 2, \text{ 则 } a-2 < x < a+2, \text{ 所以 } \begin{cases} a+2 \geq 1 \\ a-2 \leq 0 \end{cases}, \text{ 解得}$$

$$-1 \leq a \leq 2, \text{ 所以实数 } a \text{ 的取值范围是 } [-1, 2]. \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$