



名校联盟 2020届高考复习全程精练

全国 I 卷 · 冲刺金卷 · 理科数学

参考答案

(一)

1. D 【解析】依题意, $A = \{x | 4x^2 - 3x \leq 0\} = \{x | 0 \leq x \leq \frac{3}{4}\}$, $B = \{x | y = \sqrt{2x-1}\} = \{x | x \geq \frac{1}{2}\}$ 故 $A \cap B = [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}]$.

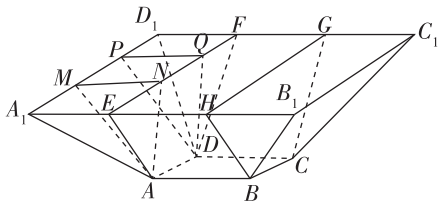
2. B 【解析】依题意, $z = \frac{2+5i}{7-3i} = \frac{(2+5i)(7+3i)}{(7-3i)(7+3i)} = \frac{14+6i+35i-15}{58} = -\frac{1}{58} + \frac{41i}{58}$, 则在复平面内, 复数 z 所对应的点为 $(-\frac{1}{58}, \frac{41}{58})$, 位于第二象限.

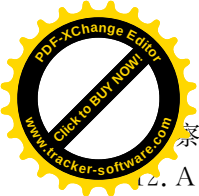
3. B 【解析】依题意, 该地区在职特级教师、高级教师、中级教师的比例为 $1:9:20$, 则随机抽取 60 人, 高级教师有 $60 \times \frac{9}{30} = 18$ 人.

4. C 【解析】依题意, $|MO| = a$, $|NO| = b$, 故 $|MN| = \sqrt{a^2 + b^2} = 3b$, 则 $a^2 + b^2 = 9b^2$, 故 $a^2 = 8b^2$, 即 $\frac{a}{b} = 2\sqrt{2}$, 故双曲线 C 的渐近线方程为 $y = \pm 2\sqrt{2}x$.

5. C 【解析】运行该程序, 第一次, $y=8, n=2, x=8$; 第二次, $y=3, n=3, x=3$; 第三次, $y=\log_2 3, n=4, x=\log_2 3$; 第四次, $y=\log_2(\log_2 3), n=5, x=\log_2(\log_2 3)$; 第五次, $y=2^{\log_2(\log_2 3)} = \log_2 3, n=6, x=\log_2 3$; 第六次, $y=\log_2(\log_2 3), n=7, x=\log_2(\log_2 3)$; 第七次 $y=2^{\log_2(\log_2 3)} = \log_2 3, n=8, x=\log_2 3$, 此时输出 x 的值为 $\log_2 3$.

6. B 【解析】进行分割如图所示, 故 $V = 2(V_{A-A_1MNE} + V_{AMN-DPQ} + V_{D-PQFD_1}) + V_{BCGH-ADFE} = 2 \times (\frac{1}{3} \times 15 \times 6 \times 65 \times 2 + \frac{1}{2} \times 65 \times 15 \times 8) + \frac{(8+20) \times 65}{2} \times 40 = 52000$ 立方尺.





察可知,实数 m 的取值范围为 $[2-2\sqrt{2}, 2]$.

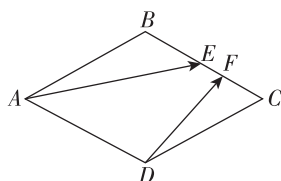
12. A 【解析】依题意, $a_{n+1} + (-1)^n a_n = 2n - 1$, 故当 n 为奇数时, $\begin{cases} a_{n+1} - a_n = 2n - 1, \\ a_n + a_{n+2} = 2, \end{cases}$ 当 n 为偶数时, $\begin{cases} a_{n+1} + a_n = 2n - 1, \\ a_n - a_{n+2} = 2n + 1, \end{cases}$ $S_{2018} = a_1 + a_2 + \dots + a_{2018} - (1 + 2 + \dots + 2018) = 1$, 即 $a_1 + a_2 + \dots + a_{2018} = \frac{2018 \times (1 + 2018)}{2} + 1 = 1009 \times 2019 + 1$, 又 $a_1 + a_2 + \dots + a_{2018} = (a_1 + a_3 + a_5 + \dots + a_{2017}) + (a_2 + a_4 + a_6 + \dots + a_{2018}) = (a_1 + 2 \times 504) + (a_2 + \frac{504 \times (16 + 2016 \times 4)}{2}) = (a_1 + 2 \times 504) + [1 + a_1 + 252 \times (16 + 2016 \times 4)] = 1 + 2a_1 + 1008 \times 2021$, 所以, $1009 \times 2019 + 1 = 1 + 2a_1 + 1008 \times 2021$, $a_1 = \frac{1009 \times 2019 - 1008 \times 2021}{2} = \frac{1008 \times 2019 + 2019 - 1008 \times 2021}{2} = \frac{3}{2}$.

13. 33 【解析】如图, $\overrightarrow{AE} \cdot$

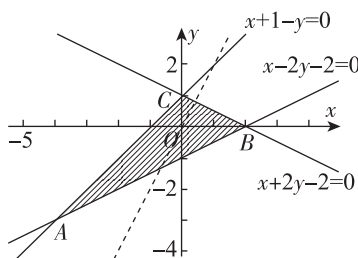
$$\overrightarrow{DF} = (\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2} \overrightarrow{BC}) \cdot$$

$$(\overrightarrow{AB} - \frac{1}{3} \overrightarrow{BC}) = \overrightarrow{AB}^2 +$$

$$\frac{1}{6} \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} - \frac{1}{6} \overrightarrow{BC}^2 = 33.$$



14. -5 【解析】作出不等式组所表示的平面区域如图中阴影部分所示; 观察可知, 当直线 $z = 2x - y$ 过点 A 时, $z = 2x - y$ 有最小值; 联立 $\begin{cases} x+1=y, \\ x=2y+2, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} x=-4, \\ y=-3, \end{cases}$ 故 $z = 2x - y$ 的最小值为 -5.

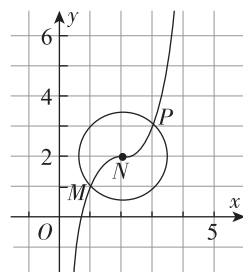


15. $[\frac{\pi}{9} + \frac{k\pi}{3}, \frac{5\pi}{18} + \frac{k\pi}{3}] (k \in \mathbb{Z})$ 【解析】依题意, $A = 3$, $\frac{T}{4} = \frac{4\pi}{3} - \frac{\pi}{3} = \pi$, 即 $T = 4\pi$, 故 $\omega = \frac{1}{2}$, $f(x) = 3\sin(\frac{1}{2}x + \varphi)$; 将 $(\frac{\pi}{3}, 3)$ 代入 $f(x)$ 中, 可知 $\frac{1}{2} \times \frac{\pi}{3} + \varphi = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$, 故 $\varphi = \frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$; 不妨设 $k = 0$, 故函数 $f(x) = 3\sin(\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{3})$; 将函数

$f(x)$ 的图象上所有点的横坐标缩短到原来的一半,

后, 得到 $y = 3\sin(6x + \frac{\pi}{3})$, 再向右平移 $\frac{\pi}{4}$ 个单位长度, 得到 $g(x) = 3\sin[6(x - \frac{\pi}{4}) + \frac{\pi}{3}] = 3\sin(6x - \frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{3}) = 3\cos(6x + \frac{\pi}{3})$; 令 $\pi + 2k\pi \leq 6x + \frac{\pi}{3} \leq 2\pi + 2k\pi (k \in \mathbb{Z})$, 解得 $\frac{\pi}{9} + \frac{k\pi}{3} \leq x \leq \frac{5\pi}{18} + \frac{k\pi}{3} (k \in \mathbb{Z})$, 故函数 $g(x)$ 的单调递增区间为 $[\frac{\pi}{9} + \frac{k\pi}{3}, \frac{5\pi}{18} + \frac{k\pi}{3}] (k \in \mathbb{Z})$.

16. $y = x$ 【解析】依题意, $f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 6 = (x - 2)^3 + 2$, 故函数 $f(x)$ 的对称中心为 $(2, 2)$, 因为 $|MN| = |NP| = \sqrt{2}$, 故 $N(2, 2)$, 设 $M(m, n)$, $P(4 - m, 4 - n)$, 故



$$\begin{cases} (m-2)^3 + 2 = n, \\ (m-2)^2 + (n-2)^2 = 2, \end{cases} \text{ 作}$$

出图形如图所示, 结合图象, 解得 $M(1, 1)$ 或 $M(3, 3)$, 故直线 l 的方程为 $y = x$.

17. 【解析】(I) 因为 $\tan \angle AMB = \frac{\sin \angle AMB}{\cos \angle AMB}$

$$= -2\sqrt{2}, \text{ 且 } \sin^2 \angle AMB + \cos^2 \angle AMB = 1,$$

$$\text{联立两式, 解得 } \sin \angle AMB = \frac{2\sqrt{2}}{3},$$

$$\cos \angle AMB = -\frac{1}{3},$$

$$\text{故 } \sin \angle ABM = \sin(\angle AMB + A) = \frac{2\sqrt{2}}{3} \times \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{4 - \sqrt{2}}{6},$$

$$\text{由正弦定理 } \frac{AM}{\sin \angle ABM} = \frac{AB}{\sin \angle AMB},$$

$$\text{所以 } AM = \frac{AB \cdot \sin \angle ABM}{\sin \angle AMB} = \sqrt{2} - \frac{1}{2}. \dots\dots 6 \text{ 分}$$

(II) 因为 $\angle AMB + \angle CMB = \pi$,

$$\text{故 } \cos \angle CMB = \cos(\pi - \angle AMB) = -\cos \angle AMB = \frac{1}{3}, \text{ 所以 } \sin \angle CMB = \frac{2\sqrt{2}}{3},$$

$$\text{在 } \triangle ABM \text{ 中, 由正弦定理 } \frac{BM}{\sin A} = \frac{AB}{\sin \angle AMB},$$

$$\text{故 } BM = \frac{AB \cdot \sin A}{\sin \angle AMB} = \frac{3}{2},$$



在 $\triangle BCM$ 中,由余弦定理 $BC^2 = BM^2 + CM^2 - 2BM \cdot CM \cdot \cos \angle CMB$,

$$\text{得 } \frac{17}{4} = \frac{9}{4} + CM^2 - 2 \times \frac{3}{2} \times CM \times \frac{1}{3},$$

解得 $CM=2$ 或 $CM=-1$ (舍去).

所以 $\triangle BCM$ 的面积 $S = \frac{1}{2}BM \cdot CM \cdot \sin \angle CMB$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{3}{2} \times 2 \times \frac{2\sqrt{2}}{3} = \sqrt{2}. \quad \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

18.【解析】(I)依题意, $BD=2$,

在 $\triangle BCD$ 中, $CD=4$, $\angle BCD=30^\circ$,

由余弦定理可求得, $BC=2\sqrt{3}$,

$\therefore CD^2 = BD^2 + BC^2$, 即 $BC \perp BD$,

又平面 $SBD \perp$ 平面 BCD , 平面 $SBD \cap$ 平面 $BCD = BD$, $BC \subset$ 平面 BCD ,

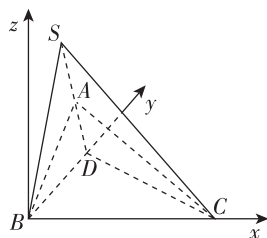
$\therefore BC \perp$ 平面 $SBD \Rightarrow BC \perp SD$,

等边 $\triangle SBD$ 中, $SA=AD$,

则 $BA \perp SD$, 且 $BC \cap BA = B$,

$\therefore SD \perp$ 平面 BCA , $\therefore SD \perp CA$. $\dots\dots\dots 5 \text{ 分}$

(II)以 B 为坐标原点, BC, BD 所在直线为 x 轴, y 轴, 过点 B 作平面 BCD 的垂线为 z 轴, 建立如图所示的空间直角坐标系,



则 $B(0, 0, 0)$, $C(2\sqrt{3}, 0, 0)$, $D(0, 2, 0)$, $S(0, 1, \sqrt{3})$,

故 $\overrightarrow{CD} = (-2\sqrt{3}, 2, 0)$, $\overrightarrow{SD} = (0, 1, -\sqrt{3})$,

设平面 SCD 的一个法向量为 $m = (x, y, z)$,

$$\text{则 } \begin{cases} m \cdot \overrightarrow{CD} = 0, \\ m \cdot \overrightarrow{SD} = 0, \end{cases} \text{ 即 } \begin{cases} -2\sqrt{3}x + 2y = 0, \\ y - \sqrt{3}z = 0, \end{cases}$$

取 $x=1$, 则 $y=\sqrt{3}$, $z=1$,

所以 $m = (1, \sqrt{3}, 1)$,

设 $\overrightarrow{DA} = \lambda \overrightarrow{DS} (0 \leq \lambda \leq 1) = (0, -\lambda, \sqrt{3}\lambda)$,

故 $A(0, 2-\lambda, \sqrt{3}\lambda)$, 则 $\overrightarrow{BA} = (0, 2-\lambda, \sqrt{3}\lambda)$,

$$\text{故 } \sin \theta = |\cos \langle m, \overrightarrow{BA} \rangle| = \frac{|m \cdot \overrightarrow{BA}|}{|m| \cdot |\overrightarrow{BA}|} =$$

$$\frac{|2\sqrt{3} - \sqrt{3}\lambda + \sqrt{3}\lambda|}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{(2-\lambda)^2 + 3\lambda^2}} = \frac{4\sqrt{195}}{65},$$

解得 $\lambda = \frac{1}{4}$ 或 $\frac{3}{4}$, 则 $AD = \frac{1}{2}$ 或 $\frac{3}{2}$. $\dots\dots\dots 12 \text{ 分}$

19.【解析】(I)依题意,完善列联表如下所示:

	男性消费者	女性消费者	总计
选择方案一	150	80	230
选择方案二	150	120	270
总计	300	200	500

$\dots\dots\dots 1 \text{ 分}$

$$K^2 = \frac{500 \times (150 \times 120 - 150 \times 80)^2}{230 \times 270 \times 300 \times 200} \approx 4.831 <$$

6.635, $\dots\dots\dots 3 \text{ 分}$

故没有 99% 的把握认为消费者的性别与方案的选择有关. $\dots\dots\dots 4 \text{ 分}$

(II)(i) X 的所有可能取值为 0, 2, 3, 4,

$$\text{则 } P(X=0) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{5} \times \frac{1}{5} = \frac{1}{100},$$

$$P(X=2) = 2 \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{5} \times \frac{4}{5} = \frac{8}{100},$$

$$P(X=3) = \frac{3}{4} = \frac{75}{100},$$

$$P(X=4) = \frac{1}{4} \times \frac{4}{5} \times \frac{4}{5} = \frac{16}{100}, \quad \dots\dots\dots 7 \text{ 分}$$

故 X 的分布列为:

X	0	2	3	4
P	$\frac{1}{100}$	$\frac{8}{100}$	$\frac{75}{100}$	$\frac{16}{100}$

$$\text{所以 } E(X) = 0 \times \frac{1}{100} + 2 \times \frac{8}{100} + 3 \times \frac{75}{100} + 4 \times \frac{16}{100}$$

$$= \frac{305}{100} = 3.05. \quad \dots\dots\dots 9 \text{ 分}$$

(ii) 小明选择方案一获得奖品的概率为 $P_1 =$

$$P(X \geq 3) = \frac{75}{100} + \frac{16}{100} = \frac{91}{100} = 0.91,$$

小明选择方案二获得奖品的概率为 $P_2 =$

$$P(X \geq 3) = 2 \times \frac{1}{5} \times \frac{4}{5} \times \frac{4}{5} + \frac{4}{5} \times \frac{4}{5} = \frac{112}{125} = \frac{896}{1000} = 0.896,$$

因为 $P_2 < P_1$, 所以小明选择方案一更有可能获得奖品. $\dots\dots\dots 12 \text{ 分}$

20.【解析】(I)因为 $|PQ| = |QF_2|$, 故 $|QF_1| + |QF_2| = |QF_1| + |QP| = |PF_1| = 4 > |F_1F_2| = 2$,

故点 Q 的轨迹是以 F_1, F_2 为焦点, 长轴长为 4 的椭圆(不包含长轴的端点),

故点 Q 的轨迹 E 的方程为 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1 (x \neq \pm 2)$.

$\dots\dots\dots 4 \text{ 分}$



(II) 由(I)知, $F_1(-1, 0)$, 设直线 MN 的方程为: $x = ky - 1, M(x_1, y_1), N(x_2, y_2)$,

$$\text{联立} \begin{cases} x = ky - 1, \\ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1, \end{cases} \text{ 消去 } x \text{ 得 } (4 + 3k^2)y^2 - 6ky - 9 = 0,$$

$$\therefore \begin{cases} y_1 + y_2 = \frac{6k}{3k^2 + 4}, \\ y_1 y_2 = -\frac{9}{3k^2 + 4}, \end{cases}$$

$$\therefore S_{\triangle F_2 MN} = \frac{1}{2} \cdot |F_1 F_2| \cdot |y_1 - y_2| = \frac{12\sqrt{k^2 + 1}}{3k^2 + 4},$$

$$\text{令 } \sqrt{k^2 + 1} = t, \text{ 则 } t \geq 1, \therefore S_{\triangle F_2 MN} = \frac{12}{3t + \frac{1}{t}},$$

$$\text{令 } f(t) = 3t + \frac{1}{t}, \text{ 则 } f'(t) = 3 - \frac{1}{t^2},$$

当 $t \in [1, +\infty)$ 时, $f'(t) > 0$,

$f(t) = 3t + \frac{1}{t}$ 在 $[1, +\infty)$ 上单调递增,

$$\therefore S_{\triangle F_2 MN} = \frac{12}{3t + \frac{1}{t}} \leq 3, \text{ 当 } t = 1 \text{ 时取等号},$$

即当 $k = 0$ 时, $\triangle F_2 MN$ 面积的最大值为 3.

..... 12 分

21. 【解析】(I) 依题意, $f(x) = x^2 - x - \ln x, x \in (0, +\infty)$,

$$f'(x) = 2x - 1 - \frac{1}{x} = \frac{2x^2 - x - 1}{x} = \frac{(2x + 1)(x - 1)}{x},$$

当 $x \in (0, 1)$ 时, $f'(x) < 0$, 当 $x \in (1, +\infty)$ 时,

$f'(x) > 0$, 故 $[f(x)]_{\min} = f(1) = 0$,

故 $f(x) \geq 0$ 4 分

(II) $g(x) = x^2 - 8x + m \ln x, x \in (0, +\infty)$,

$$g'(x) = 2x - 8 + \frac{m}{x} = \frac{2x^2 - 8x + m}{x},$$

故 $x_1, x_2 (x_1 < x_2)$ 是方程 $2x^2 - 8x + m = 0$ 在 $(0, +\infty)$ 上两个不等的正实根,

$$\text{所以 } 0 < m < 8, \text{ 由 } \begin{cases} x_1 + x_2 = 4, \\ x_1 x_2 = \frac{m}{2}, \\ x_1 < x_2, \end{cases}$$

$$\text{可得 } \begin{cases} 0 < x_1 < 2, \\ m = 2x_1(4 - x_1), \end{cases}$$

从而问题转化为当 $x_1 \in (0, 1) \cup (1, 2)$ 时,

$$\frac{m \ln x_1}{1 - x_1} > t(4 - x_1)(1 + x_1) \text{ 恒成立},$$

$$\text{即证: } \frac{2x_1(4 - x_1) \ln x_1}{1 - x_1} > t(4 - x_1)(1 + x_1) \text{ 成立},$$

$$\text{即证: } \frac{2x_1 \ln x_1}{1 - x_1} > t(x_1 + 1);$$

$$\text{即证: } \frac{2x_1 \ln x_1}{1 - x_1} - t(x_1 + 1) > 0,$$

$$\text{即证: } \frac{x_1}{1 - x_1} [2 \ln x_1 + \frac{t(x_1^2 - 1)}{x_1}] > 0 \text{ ①},$$

$$\text{令 } h(x) = 2 \ln x + \frac{t(x^2 - 1)}{x} (x \in (0, 1) \cup (1, 2))$$

$$\text{则 } h'(x) = \frac{tx^2 + 2x + t}{x^2} (x \in (0, 1) \cup (1, 2)),$$

1) 当 $t \geq 0$ 时, $h'(x) > 0$, 则 $h(x)$ 在 $(0, 1), (1, 2)$ 上均为增函数且 $h(1) = 0$, ①式在 $x_1 \in (0, 1) \cup (1, 2)$ 上不成立.

2) 当 $t < 0$ 时, $\Delta = 4 - 4t^2$, 若 $\Delta \leq 0$, 即 $t \leq -1$ 时, $h'(x) \leq 0$, 所以 $h(x)$ 在 $(0, 1) \cup (1, 2)$ 上均为减函数且 $h(1) = 0$, $\frac{x_1}{1 - x_1}, 2 \ln x_1 + \frac{t(x_1^2 - 1)}{x_1}$ 在区间 $(0, 1)$ 及 $(1, 2)$ 上同号, 故①式成立.

若 $\Delta > 0$, 即 $-1 < t < 0$ 时, $y = tx^2 + 2x + t$ 的对称轴 $x = -\frac{1}{t} > 1$,

令 $n = \min(-\frac{1}{t}, 2)$, 则当 $1 < x < n$ 时, $h(x) > 0$, 不符合题意.

综上可知: $t \in (-\infty, -1]$ 满足题意. 12 分

22. 【解析】(I) 依题意, 曲线 C 的普通方程为 $x^2 + (y - 3)^2 = 9$, 即 $x^2 + y^2 - 6y = 0$,

$$\text{把公式 } \begin{cases} x = \rho \cos \alpha \\ y = \rho \sin \alpha \end{cases} \text{ 代入可得: } \rho^2 = 6\rho \sin \alpha,$$

故曲线 C 的极坐标方程为 $\rho = 6 \sin \alpha$,

$$\text{设 } N(\rho, \varphi), \text{ 则 } M(\rho, \varphi - \frac{\pi}{2}),$$

$$\text{则有 } \rho = 6 \sin(\varphi - \frac{\pi}{2}) = -6 \cos \varphi,$$

故点 N 的轨迹 C' 的极坐标方程为 $\rho = -6 \cos \varphi$.

..... 5 分

(II) 曲线 $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x (y > 0)$ 的极坐标方程为 $\theta =$

$$\frac{5\pi}{6} (\rho > 0),$$

$$D \text{ 到曲线 } \theta = \frac{5\pi}{6} \text{ 的距离为 } d = 6 \sin \frac{\pi}{6} = 3,$$

$$\text{曲线 } \theta = \frac{5\pi}{6} \text{ 与曲线 } C \text{ 交点 } A(3, \frac{5\pi}{6}),$$

$$\text{曲线 } \theta = \frac{5\pi}{6} \text{ 与曲线 } C' \text{ 交点 } B(3\sqrt{3}, \frac{5\pi}{6}),$$

$$\therefore |AB| = 3\sqrt{3} - 3,$$



故 $\triangle ABD$ 的面积 $S = \frac{1}{2} \times |AB| \times d = \frac{9\sqrt{3}-9}{2}$.

..... 10分

23. 【解析】(I)依题意, $|x-1| + |3x+5| > 8$,

当 $x < -\frac{5}{3}$ 时, 原式化为 $1-x-3x-5 > 8$,

解得 $x < -3$, 故 $x < -3$,

当 $-\frac{5}{3} \leq x \leq 1$ 时, 原式化为 $1-x+3x+5 > 8$,

解得 $x > 1$, 故无解,

当 $x > 1$ 时, 原式化为 $x-1+3x+5 > 8$,

解得 $x > 1$, 故 $x > 1$,

综上所述, 不等式 $f(x) > 8$ 的解集为 $(-\infty, -3) \cup (1, +\infty)$ 5分

(II)依题意, $|x-1| + |3x+5| + m \leq 2x^2 + |3x+5|$, 则 $|x-1| \leq 2x^2 - m$,

即 $-2x^2 + m \leq x-1 \leq 2x^2 - m$,

即 $\begin{cases} 2x^2 + x - (m+1) \geq 0, \\ 2x^2 - x + (1-m) \geq 0, \end{cases}$

则只需 $\begin{cases} 1+8(m+1) \leq 0, \\ 1-8(1-m) \leq 0, \end{cases}$ 解得 $m \leq -\frac{9}{8}$,

$\therefore$ 实数 m 的取值范围是 $(-\infty, -\frac{9}{8}]$ 10分

(二)

1. A 【解析】 $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, 故子集个数为 $2^5 = 32$, 非空真子集个数为 30.

2. C 【解析】 $z = \frac{1+3i}{1+i} = \frac{(1+3i)(1-i)}{2} = 2+i$, 故 $|z| = \sqrt{5}$.

3. B 【解析】 $\sin(\frac{3\pi}{2} + \alpha) = \sin \frac{3\pi}{2} \cos \alpha + \cos \frac{3\pi}{2} \sin \alpha = -\cos \alpha = \frac{1}{3}$, 故 $\cos \alpha = -\frac{1}{3}$.

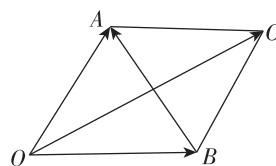
4. A 【解析】由题知, $AC = x$, $AB = y$, $BC = z$, 由勾股定理可知 $x^2 + z^2 = y^2$, 故选 A.

5. A 【解析】第 4 局甲胜, 且前 3 局胜 2 局, 故所求概率为 $P = \frac{2}{3} \cdot C_3^2 (\frac{2}{3})^2 \cdot \frac{1}{3} = \frac{8}{27}$.

6. D 【解析】双曲线 C_1 的一条渐近线方程为 $bx - ay = 0$, 点 $(2, 0)$ 到渐近线的距离为 1, 即 $\frac{|2b|}{\sqrt{a^2+b^2}} = 1 \Rightarrow a^2 = 3b^2$, 即 $\frac{b}{a} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

7. B 【解析】如图, $\vec{OA} = 2\vec{a}$, $\vec{OB} = \vec{b}$, 则 $|\vec{OA}| = |\vec{OB}|$, $2\vec{a} + \vec{b} = \vec{OC}$, $2\vec{a} - \vec{b} = \vec{BA}$. 故 $|\vec{OC}| = \sqrt{3}|\vec{AB}|$. 在 $\triangle OAC$ 中, 由余弦定理得: $\angle OAC = 120^\circ$, 故

$\angle AOB = 60^\circ$.



8. C 【解析】 $\omega x + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$, 则 $x = \frac{\frac{\pi}{3} + k\pi}{\omega}, k \in \mathbb{Z}$. 因为 $f(x) = \sin(\omega x + \frac{\pi}{6})$ 的图象在 $(0, \pi)$ 上有

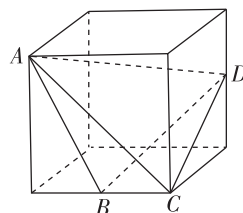
且仅有两条对称轴,

则 $\begin{cases} \frac{\frac{\pi}{3} + (k-1)\pi}{\omega} \leq 0, \\ \frac{\frac{\pi}{3} + k\pi}{\omega} > 0, \\ \frac{\frac{\pi}{3} + (k+1)\pi}{\omega} < \pi, \\ \frac{\frac{\pi}{3} + (k+2)\pi}{\omega} \geq \pi, \end{cases}$ 则 $\begin{cases} k - \frac{2}{3} \leq 0, \\ k + \frac{1}{3} > 0, \\ \omega > k + \frac{4}{3}, \\ \omega \leq k + \frac{7}{3}, \end{cases}$ 解得 $\omega \in (\frac{4}{3}, \frac{7}{3}]$.

9. B 【解析】由题意得, $x_2 \ln x_1 < x_1 \ln x_2$, 化简得 $\frac{\ln x_1}{x_1} < \frac{\ln x_2}{x_2}$, 故 $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ 在 $(0, m)$ 上为增函数. $f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2} \geq 0 \Rightarrow 0 < x \leq e$, 故 m 的最大值为 e .

10. B 【解析】令 $x=1$, 得: $3^n = 243 \Rightarrow n=5$. 由于 $[\frac{1}{2} \cdot \frac{(1+2x)^6}{6}]' = (1+2x)^5 = a_0 + a_1x + \dots + a_5x^5 = (a_0x)' + (\frac{a_1x^2}{2})' + \dots + (\frac{a_5x^6}{6})'$, 即 $[\frac{(1+2x)^6}{12}]' = (a_0x + \frac{a_1x^2}{2} + \dots + \frac{a_5x^6}{6})'$, $\therefore \frac{(1+2x)^6}{12} = a_0x + \frac{a_1x^2}{2} + \dots + \frac{a_5x^6}{6} + C$. 令 $x=0$, 解得 $C = \frac{1}{12}$, 令 $x=1$, 得 $\frac{a_0}{1} + \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{3} + \dots + \frac{a_5}{6} = \frac{182}{3}$.

11. C 【解析】该几何体嵌入棱长为 2 的正方体, 即四面体 $A-BCD$, 计算得: $AB = \sqrt{5}$, $AC = 2\sqrt{2}$, $AD = 3$, $BD = \sqrt{6}$, $CD = \sqrt{5}$. 故最长的棱为 $AD = 3$.



12. A 【解析】令 $t = f(x_2)$, 则 $S(x_1, x_2) = [x_1 -$



$f(x_2)]^2 + [x_2 - f(x_1)]^2$ 为两点 $(x_1, f(x_1))$, $(t, e^t + a)$ 距离的平方. 画出 $y = f(x)$ 与 $y = e^x + a$ 的图象. 设 $A(1+a, 0)$, $B(0, 1+a)$, 两函数图象在 A, B 处的切线斜率都为 1, $k_{AB} = -1$. 当 $a > -1$ 时, 可知 $|AB|^2$ 为 $S(x_1, x_2)$ 最小值. 即 $4 \geq [\sqrt{2}(a+1)]^2$, 解得 $-1 < a \leq \sqrt{2} - 1$, 当 $a \leq -1$ 时, 显然成立, 故 $a \leq \sqrt{2} - 1$.

13. $[\frac{1}{3}, 1]$ 【解析】 $f(x)$ 是偶函数, 故 $g(x) = \lg(\sqrt{x^2+a} + x)$ 为奇函数, $g(0) = 0 \Rightarrow a = 1$. 对 $0 < x_1 < x_2 \Rightarrow 0 < g(x_1) < g(x_2) \Rightarrow 0 < x_1 g(x_1) < x_2 g(x_2)$, 即 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上为增函数. $\therefore f(2x-1) \leq f(x) \Leftrightarrow |2x-1| \leq |x| \Leftrightarrow (2x-1)^2 \leq x^2 \Leftrightarrow \frac{1}{3} \leq x \leq 1$.

14. $(-1, 2]$ 【解析】目标函数化为 $y = 2x + z$, $z = 2$ 时, 可知: 最优解在直线 $2x - y + 2 = 0$ 上, 而 $(0, 2)$ 在可行域内, 且满足 $2x - y + 2 = 0$. 故可知: 实数 k 的取值范围是 $(-1, 2]$.

15. $2\sqrt{2}$ 【解析】设 $\odot M$ 分别切 AB, F_1A 延长线, F_1B 延长线于 P, Q, R , 则四边形 F_1RMQ 是正方形. 而 $|F_1R| = |F_1B| + |BP|$, $|F_1Q| = |F_1A| + |AP|$, 故 $|F_1R| + |F_1Q| = |F_1A| + |F_1B| + |AB| = 4a = 4\sqrt{2} \Rightarrow |F_1R| = r_M = 2\sqrt{2}$.

16. $4\sqrt{105}$ 【解析】在 $\triangle ABD$ 中, $BD^2 = 5^2 + 8^2 - 2 \times 5 \times 8 \cos A$ ①. 在 $\triangle CBD$ 中, $BD^2 = 6^2 + 7^2 - 2 \times 6 \times 7 \cos C$ ②. 由 ① ② 得: $21 \cos C - 20 \cos A = -1$ (*), $S_{ABCD} = \frac{1}{2} \times 5 \times 8 \sin A + \frac{1}{2} \times 6 \times 7 \sin C \Rightarrow 21 \sin C + 20 \sin A = S_{ABCD}$ (**). (*) (**) 两式平方相加得: $21^2 + 20^2 - 840 \cos(A+C) = 1 + S_{ABCD}^2$, $\therefore 1 + S_{ABCD}^2 \leq 21^2 + 20^2 + 840 = 1681$, $\therefore S_{ABCD}$ 的最大值为 $\sqrt{1680} = 4\sqrt{105}$.

17. 【解析】(I) 由 $a_1 a_2 + a_2 a_3 + \dots + a_n a_{n+1} = \frac{1}{3} n(n+1)(n+2)$ (*) 得:

$a_1 a_2 + a_2 a_3 + \dots + a_{n-1} a_n = \frac{1}{3} (n-1)n(n+1)$ (**), 两式相减得: $a_n a_{n+1} = n(n+1)(n \geq 2)$ 3 分

当 $n=1$ 时, $a_1 a_2 = 2$ 满足此式, 故对 $n \in \mathbf{N}^*$, 有 $a_n a_{n+1} = n(n+1)$, 化为: $\frac{a_n}{n} \cdot \frac{a_{n+1}}{n+1} = 1$.

令 $b_n = \frac{a_n}{n}$, 则 $b_1 = 1$, 且 $b_n b_{n+1} = 1$ 与 $b_{n-1} b_n = 1$ 相

减得: $b_n(b_{n+1} - b_{n-1}) = 0, b_n \neq 0$,

故 $b_{n+1} = b_{n-1}$. 即 $b_{2k-1} = b_{2k-3} = \dots = b_1 = 1$,

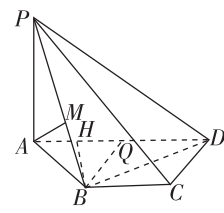
故 n 为奇数时, $b_n = 1 \Rightarrow a_n = n$. 又 $b_2 = 1$,

故 $b_{2k} = b_{2k-2} = \dots = b_2 = 1$,

故 n 为偶数时, $b_n = 1 \Rightarrow a_n = n$, 故 $a_n = n$ 8 分

$$\begin{aligned} \text{(II)} \quad & \frac{1}{a_1 a_2} + \frac{1}{a_2 a_3} + \dots + \frac{1}{a_n a_{n+1}} = \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \dots \\ & + \frac{1}{n \times (n+1)} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \\ & = 1 - \frac{1}{n+1} < 1. \quad \dots \dots \dots 12 \text{ 分} \end{aligned}$$

18. 【解析】(I) 作 $AM \perp PB$ 于 M , 则由平面 $PAB \perp$ 平面 $PBD \Rightarrow AM \perp$ 平面 $PBD \Rightarrow AM \perp BD$.



取 AD 中点为 Q , 则 $BC \parallel QD$

$\Rightarrow BQ = CD = 1 = QD = QA \Rightarrow \angle ABD = 90^\circ$.

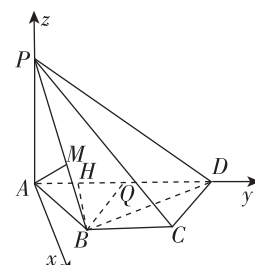
又 $\angle PBA$ 为锐角, $\therefore$ 点 M, B 不重合.

$$\begin{cases} DB \perp AB \\ DB \perp AM \end{cases} \Rightarrow DB \perp \text{平面 } PAB \Rightarrow DB \perp PA,$$

又因为 $PA \perp AD$, 所以 $PA \perp$ 平面 $ABCD$

..... 5 分

(II) 取 AQ 中点 H , 以点 A 为原点, 以 $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AP}$ 方向分别为 x 轴、 y 轴、 z 轴正方向建立如图所示的空间直角坐标系,



则 $A(0, 0, 0), B(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, 0), C(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2}, 0),$

$D(0, 2, 0), P(0, 0, 2)$.

由(I)的证明知: 平面 PAB 的法向量为 $\overrightarrow{BD} =$

$$(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2}, 0).$$

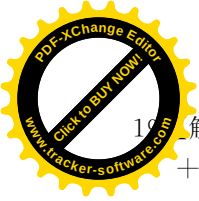
设平面 PCD 的一个法向量为 $\mathbf{m} = (x, y, z)$,

$$\text{则} \begin{cases} \mathbf{m} \cdot \overrightarrow{PD} = 0 \\ \mathbf{m} \cdot \overrightarrow{CD} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2y - 2z = 0, \\ -\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y = 0, \end{cases}$$

令 $x=1 \Rightarrow \mathbf{m} = (1, \sqrt{3}, \sqrt{3})$,

$$\cos \langle \mathbf{m}, \overrightarrow{BD} \rangle = \frac{\mathbf{m} \cdot \overrightarrow{BD}}{|\mathbf{m}| \cdot |\overrightarrow{BD}|} = \frac{-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{7}} = \frac{\sqrt{7}}{7}.$$

..... 12 分



19.【解析】(I) 过点 Q 作 $x^2=2py$ 的切线, 方程为 $y+1=k(x+2)$, 即 $y=kx+2k-1$, 代入 $x^2=2py$ $\Rightarrow x^2-2pkx-2p(2k-1)=0$, $\Delta=0$, 化为 $pk^2+4k-2=0$, $k_1k_2=-1 \Rightarrow \frac{-2}{p}=-1 \Rightarrow p=2$

..... 4 分

(II) $MN: y=x+1$ 代入 $x^2=4y=4(x+1) \Rightarrow x^2-4x-4=0$,

故 $|MN|=\sqrt{2} \cdot |x_M-x_N|=\sqrt{2} \cdot \sqrt{32}=8$.

$CD: y=x+c$ 代入 $x^2=4y=4(x+c) \Rightarrow$

$x^2-4x-4c=0 \Rightarrow |CD|=\sqrt{2} \cdot |x_C-x_D|=\sqrt{2} \cdot \sqrt{16+16c}=4\sqrt{2} \cdot \sqrt{1+c}$,

且由 $\Delta=16+16c>0 \Rightarrow -1<c<1$, 由平行线之间的距离公式可得: 梯形 $MNDC$ 的高为 $\frac{|c-1|}{\sqrt{2}}$

$=\frac{1-c}{\sqrt{2}}$,

故 $S_{MNDC}=\frac{1}{2} \times (8+4\sqrt{2} \times \sqrt{1+c}) \times \frac{1-c}{\sqrt{2}}=(1-c)(2\sqrt{2}+2\sqrt{1+c})$, 8 分

令 $\sqrt{1+c}=t$, 则 $S_{MNDC}=(2-t^2)(2\sqrt{2}+2t)(t \in (0, \sqrt{2}))$.

$S'=(2t)(2\sqrt{2}+2t)+(2-t^2) \cdot 2=-6t^2-4\sqrt{2}t+4=-6(t+\sqrt{2})(t-\frac{\sqrt{2}}{3})$.

在 $(0, \frac{\sqrt{2}}{3})$ 上, $S'>0$, 在 $(\frac{\sqrt{2}}{3}, \sqrt{2})$ 上, $S'<0$.

故当 $t=\frac{\sqrt{2}}{3}$ 时, S 取最大值为 $\frac{128\sqrt{2}}{27}$ 12 分

20.【解析】(I) 当 $x<a$ 时, $y=(70-40)x+(56-a-40) \cdot (a-x)=(14+a)x+16a-a^2$,

当 $x \geq a$ 时, $y=30a$,

$y=\begin{cases} (14+a)x+16a-a^2, & x<a \\ 30a, & x \geq a \end{cases} (x \in \mathbf{N}^*)$,

当 $a=16$ 时, $y=\begin{cases} 30x, & x<16 \\ 480, & x \geq 16 \end{cases} (x \in \mathbf{N}^*)$ 4 分

(II) 若出栏 112 只, 则 $a=16$,

由 (I) 知, 当 $a=16$ 时, $y=\begin{cases} 30x, & x<16 \\ 480, & x \geq 16 \end{cases} (x \in \mathbf{N}^*)$,

记 Y_1 表示养鸡厂当天在一个饭店获得的利润.

Y_1 可取 420, 450, 480,

$P(Y_1=420)=0.15, P(Y_1=450)=0.2$,

$P(Y_1=480)=0.65$,

Y_1 的分布列为:

Y_1	420	450	480
P	0.15	0.2	0.65

$E(Y_1)=420 \times 0.15+450 \times 0.2+480 \times 0.65=465$, 8 分

若出栏 119 只, 则 $a=17$,

记 Y_2 表示养鸡厂当天在一个饭店获得的利润.

当 $a=17$ 时, $y=\begin{cases} 31x-17, & x<17 \\ 510, & x \geq 17 \end{cases} (x \in \mathbf{N}^*)$,

Y_2 可取 417, 448, 479, 510,

$P(Y_2=417)=0.15, P(Y_2=448)=0.2$,

$P(Y_2=479)=0.25, P(Y_2=510)=0.4$,

Y_2 的分布列为:

Y_2	417	448	479	510
P	0.15	0.2	0.25	0.4

$E(Y_2)=417 \times 0.15+448 \times 0.2+479 \times 0.25+510 \times 0.4=475.9$.

综上可知, $7E(Y_1)<7E(Y_2)$, 则养鸡厂出栏 119 只时, 利润最大. 12 分

21.【解析】(I) $f'(x)=2e^{2x}=1 \Rightarrow x=-\frac{\ln 2}{2}$,

$f(-\frac{\ln 2}{2})=\frac{1}{2}-a$.

$f(x)$ 在 $(-\frac{\ln 2}{2}, \frac{1}{2}-a)$ 处的切线方程为 $y-(\frac{1}{2}-a)=x+\frac{\ln 2}{2}$, 即 $y=x+\frac{\ln 2}{2}+\frac{1}{2}-a$.

$g'(x)=e^x=1 \Rightarrow x=0, g(0)=1-b$.

$g(x)$ 在 $(0, 1-b)$ 处的切线方程为 $y-(1-b)=x \Rightarrow y=x+1-b$,

故 $\frac{\ln 2}{2}+\frac{1}{2}-a=1-b \Rightarrow b-a=\frac{1}{2}-\frac{\ln 2}{2}$ 4 分

(II) $h(x)=e^{2x}-a-(e^x-b)-mx+\frac{\ln 2}{2}-\frac{1}{2}=e^{2x}-e^x-mx, h'(x)=2e^{2x}-e^x-m$,

令 $t=e^x$, 则 $y=2t^2-t-m$,

$m>1$ 时, $2t^2-t-m=0$ 有两根 t_1, t_2 且 $t_1<0<t_2$.

$h'(x)=2(e^x-t_1)(e^x-t_2)=0$, 得: $x=\ln t_2$.

在 $(-\infty, \ln t_2)$ 上, $h'(x)<0$, 在 $(\ln t_2, +\infty)$ 上, $h'(x)>0$.

此时, $h(\ln t_2)<h(0)=0$. 又 $x \rightarrow -\infty$ 时, $h(x) \rightarrow +\infty, x \rightarrow +\infty$ 时, $h(x) \rightarrow +\infty$.

故在 $(-\infty, \ln t_2)$ 和 $(\ln t_2, +\infty)$ 上, $h(x)$ 各有 1 个零点, 6 分

$m=1$ 时, $h'(x)=2(e^x+\frac{1}{2})(e^x-1), h(x)$ 最小值



与 $h(0)=0$, 故 $h(x)$ 仅有 1 个零点.

$0 < m < 1$ 时, $h'(x) = 2(e^x - t_1)(e^x - t_2)$. 其中 $t_1 < 0 < t_2$, 同 $m > 1$, $h(x)$ 在 $(-\infty, \ln t_2)$ 与 $(\ln t_2, +\infty)$ 上, $h(x)$ 各有 1 个零点, 8 分
 $m=0$ 时, $h(x) = e^{2x} - e^x$, 仅有 1 个零点,

$-\frac{1}{8} < m < 0$ 时, 对方程 $2t^2 - t - m = 0$, $\Delta = 1 + 8m > 0$. 方程有两个正根: t_1, t_2 ,

$h'(x) = 2(e^x - t_1)(e^x - t_2)$. 在 $(-\infty, \ln t_1)$ 上, $h'(x) > 0$, 在 $(\ln t_1, \ln t_2)$ 上, $h'(x) < 0$, 在 $(\ln t_2, +\infty)$ 上, $h'(x) > 0$.

由 $\begin{cases} t_1 + t_2 = \frac{1}{2} \\ 0 < t_1 < t_2 \end{cases} \Rightarrow 0 < t_1 < \frac{1}{4} < t_2 < \frac{1}{2}$, 故 $\ln t_2 < 0$,

$h(\ln t_2) < h(0) = 0$, $h(\ln t_1) = t_1^2 - t_1 - m \ln t_1 = t_1^2 - t_1 - (2t_1^2 - t_1) \ln t_1 = t_1[(t_1 - 1) + (1 - 2t_1) \ln t_1]$.

$\because t_1 - 1 < 0, 1 - 2t_1 > 0, \ln t_1 < 0$, 故 $h(\ln t_1) < 0$. 故在 $(-\infty, \ln t_1)$ 上, $h(x) < h(\ln t_1) < 0$, 在 $(\ln t_1, \ln t_2)$ 上, $h(x) < 0$, 在 $(\ln t_2, +\infty)$ 上, $h(x)$ 有 1 个零点: $x=0$.

$m \leq -\frac{1}{8}$ 时, $h'(x) = 2e^{2x} - e^x - m \geq 0$ 恒成立, $h(x)$ 为增函数, $h(x)$ 仅有 1 个零点: $x=0$

..... 10 分
 综上得: $m \leq 0$ 或 $m=1$ 时, $h(x)$ 有 1 个零点, $0 < m < 1$ 或 $m > 1$ 时, $h(x)$ 有 2 个零点. 12 分

22. 【解析】(I) 直线 l 的普通方程为: $\sqrt{3}x - y + 1 - 2\sqrt{3} = 0$;

椭圆 C 的直角坐标方程为: $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$ 5 分

(II) 将直线 l 的参数方程代入椭圆 C 的直角坐标方程整理得: $(3 + \sin^2 \varphi)t^2 + (12\cos \varphi + 8\sin \varphi)t - 32 = 0$, 由题意得: $t_1 + t_2 = 0$,

故 $12\cos \varphi + 8\sin \varphi = 0 \Rightarrow k = \tan \varphi = -\frac{3}{2}$,
 所以直线 l 的斜率为 $-\frac{3}{2}$ 10 分

23. 【解析】(I) $|x - a| + |x - 2| \geq |(x - a) - (x - 2)| = |a - 2|$,

当且仅当 $(x - a)(x - 2) \leq 0$ 时取等,
 故 $f(x)$ 最小值为 $|a - 2|$,
 $\therefore |a - 2| \geq 3 \Leftrightarrow a \geq 5$ 或 $a \leq -1$ 4 分

(II) 由不等式解集的意义可知: $x=2$ 时, $f(2)=2$, 即 $|2 - a| = 2$, 解得: $a=0$ 或 4 .
 $a=0$ 时, $y=f(x)$ 与 $y=x$ 图象可知: 不合题意舍去.

$a=4$ 时, 比较 $y=f(x)$ 与 $y=x$ 图象,

由 $y=x$ 与 $y=2x-6$ 解得: $x=6$,

即 $m=6$,

综上, $a=4, m=6$ 10 分

(三)

1. D 【解析】 $A = \{x | 2^x > 2\} = \{x | x > 1\}$, $\therefore \complement_{\mathbf{R}} A = \{x | x \leq 1\}$, $B = \{y | y = x^2, x \in \mathbf{R}\} = \{y | y \geq 0\}$, 所以 $(\complement_{\mathbf{R}} A) \cap B = \{x | 0 \leq x \leq 1\}$.

2. B 【解析】 $z = \frac{\frac{1}{2}i}{1 - \frac{1}{2}i} = \frac{i}{2 - i} = \frac{i(2 + i)}{5} = \frac{-1 + 2i}{5}$,

$$|z| = \sqrt{\left(-\frac{1}{5}\right)^2 + \left(\frac{2}{5}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{5}.$$

3. C 【解析】由 $S_9 - S_7 = 30$, 得 $a_8 + a_9 = 30$, 所以 $2a_1 + 15d = 30$, 又 $a_1 + d = 2$, 所以 $d = 2, a_1 = 0$, 所以 $a_n = 0 + 2(n - 1) = 2n - 2$, 所以 $a_{2019} = 2 \times 2019 - 2 = 4036$.

4. B 【解析】设小三角形的边长为 1, 每个小三角形的面积为 $\frac{\sqrt{3}}{4}$, 六个小三角形的面积之和为 $6 \times \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$, 又长方形的宽为 3, 长为 $4 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$, 所以长方形的面积为 $6\sqrt{3}$, 故此点取自阴影部分 T 的概率是 $\frac{\frac{3\sqrt{3}}{2}}{6\sqrt{3}} = \frac{1}{4}$.

5. A 【解析】设 $F(c, 0)$, 所以 $c = \sqrt{a^2 + b^2}$, 直线 OB 的方程为 $y = -\frac{b}{a}x$, 直线 BF 的方程为 $y = \frac{b}{a}(x - c)$, 解得 $B(\frac{c}{2}, -\frac{bc}{2a})$, $\overrightarrow{BO} = (-\frac{c}{2}, \frac{bc}{2a})$, 又直线 OA 的方程为 $y = \frac{b}{a}x$, 则 $A(c, \frac{bc}{a})$, $\overrightarrow{BA} = (\frac{c}{2}, \frac{3bc}{2a})$, 又因为 $\overrightarrow{BO} \cdot \overrightarrow{BA} < 0$, 所以 $-\frac{c^2}{4} + \frac{3b^2c^2}{4a^2} < 0$, $\therefore \frac{b^2}{a^2} < \frac{1}{3}$, $\therefore e^2 < \frac{4}{3}$, $\therefore 1 < e < \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

6. B 【解析】根据三视图, 此几何体为一个半球挖去一个正四棱锥后剩余的几何体, 正四棱锥的底面边长为 $\sqrt{2}$, 高为 1, 所以四棱锥的体积为 $\frac{1}{3} \times \sqrt{2} \times \sqrt{2} \times 1 = \frac{2}{3}$, 半球的体积为 $\frac{2}{3} \times \pi \times 1^3 = \frac{2\pi}{3}$, 故该几何体的体积为 $\frac{2\pi - 2}{3}$.

7. B 【解析】根据题意, $f(x) = (x^2 - 2|x|)e^{|x|}$ 显然为



函数,排除 C;代入 $x=1$,则 $f(1)=-e<-1$,排除 A,D. 故选 B.

8. B 【解析】因为 $a>b>0, ab=1, a>1, 0<b<1$,
 $\therefore \frac{b}{2^a}<1, \log_2(a+b)>\log_2 2\sqrt{ab}=1, 2^{a+\frac{1}{b}}>a+\frac{1}{b}$

$>a+b, \therefore a+\frac{1}{b}>\log_2(a+b), \therefore x<1, z>y>1$.

因为 $\log_x 2x=1+\log_x 2<1, \log_y 2y=1+\log_y 2>1$,
 $\log_z 2z=1+\log_z 2>1$, 则只要比较 $\log_y 2, \log_z 2$ 的
 大小即可, $\therefore \log_2 y<\log_2 z, \therefore \log_y 2=\frac{1}{\log_2 y}>\frac{1}{\log_2 z}$
 $=\log_z 2$, 所以 $\log_y 2y>\log_z 2z>\log_x 2x$.

9. D 【解析】根据题意, $T=0, n=1; T=8, n=2; T=$
 $8+4, n=3; T=8+4+4, n=4; T=8+4+4+8, n=$
 $5; T=8+4+4+8+0, n=6; T=8+4+4+8+0$
 $+12, n=7; T=8+4+4+8+0+12-4, n=8; T=$
 $8+4+4+8+0+12-4+16, n=9; T=8+4+4+8$
 $+0+12-4+16-8, n=10; T=8+4+4+8+0$
 $+12-4+16-8+20, n=11$, 故输出的结果为 $T=$
 $8+4+4+8+0+12-4+16-8+20=60$.

10. A 【解析】因为 A,B 关于 x 轴对称, 所以 A,B 纵
 坐标为 $\pm\sqrt{2}$, 横坐标为 1, 代入 $y^2=2px(p>0)$,
 可得 $y^2=2x$. 设点 $P(x_1, y_1), Q(x_2, y_2)$. 则
 $\begin{cases} y_1^2=2x_1 \\ y_2^2=2x_2 \end{cases}$, 则 $(y_1-y_2)(y_1+y_2)=2(x_1-x_2)$,
 $\therefore k_{PQ}=\frac{2}{y_1+y_2}$, 又 $\because P, Q$ 关于直线 l 对称. $\therefore k_{PQ}$
 $=-1$, 即 $y_1+y_2=-2, \therefore \frac{y_1+y_2}{2}=-1$, 又 $\because PQ$
 的中点一定在直线 l 上, $\therefore \frac{x_1+x_2}{2}=\frac{y_1+y_2}{2}+2=$
 $1. \therefore$ 线段 PQ 的中点坐标为 $(1, -1)$.

11. B 【解析】根据 $C_1M=\frac{1}{2}A_1B_1$, 可知 $AC\perp BC$, 球
 心应为四边形 A_1ABB_1 的中心, 又因为 $AC=BC$
 $=CC_1$, 所以球半径为 $R=\sqrt{\frac{2AC^2}{4}+\frac{AC^2}{4}}=\sqrt{3}$,
 $\therefore AC=2$. 取 BC 中点 D , 连接 MN, ND, AD ,
 $\because M, N$ 分别是 A_1B_1, A_1C_1 的中点, $\therefore MN\parallel$
 $\frac{1}{2}B_1C_1$. 又 $BD\parallel\frac{1}{2}B_1C_1, \therefore MN\parallel BD$, 则四边形
 $BDNM$ 为平行四边形, 因此 $ND\parallel BM$,
 $\therefore \angle AND$ (或其补角) 为异面直线 BM 与 AN 所
 成的角. 因为 $AC=BB_1=BC=2$, 则 $BM=ND=$
 $\sqrt{6}, AN=\sqrt{5}, AD=\sqrt{5}$, 在 $\triangle ADN$ 中, 由余弦定理
 得 $\cos\angle AND=\frac{ND^2+AN^2-AD^2}{2ND\cdot AN}=\frac{\sqrt{30}}{10}$, 故异

面直线 BM 与 AN 所成角的余弦值为 $\frac{\sqrt{30}}{10}$.

12. D 【解析】设 $f(x)=\sqrt{a^2+b^2}\sin(\omega x+\varphi)(\omega>0)$,
 $\therefore \frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}\leq\frac{T}{2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{2\pi}{\omega}=\frac{\pi}{\omega}$, 即 $0<\omega\leq 3$, 又

$f(\frac{\pi}{2})=f(\frac{2\pi}{3})=-f(\frac{\pi}{6}), \therefore x=\frac{\frac{\pi}{2}+\frac{2\pi}{3}}{2}=\frac{7\pi}{12}$ 为

$f(x)=\sqrt{a^2+b^2}\sin(\omega x+\varphi)$ 的一条对称轴, 且

$\frac{\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6}}{2}=\frac{\pi}{3}$, 则 $(\frac{\pi}{3}, 0)$ 为 $f(x)=\sqrt{a^2+b^2}\sin(\omega x$

$+\varphi)$ 的一个对称中心, 由于 $0<\omega\leq 3$, 所以 $x=\frac{7\pi}{12}$

与 $(\frac{\pi}{3}, 0)$ 为同一周期里相邻的对称轴和对称中

心, 则 $T=4(\frac{7\pi}{12}-\frac{\pi}{3})=\pi, \therefore \omega=2$. 又 $\sqrt{a^2+b^2}=$

4 , 且 $f(\frac{\pi}{12})=a\sin\frac{2\pi}{12}+b\cos\frac{2\pi}{12}$, 解之得 $a=2, b=$

$2\sqrt{3}$. 故 $f(x)=2\sin 2x+2\sqrt{3}\cos 2x=4\sin(2x+$

$\frac{\pi}{3})$, 由图象变换可得, $g(x)=4\sin(x+\frac{\pi}{3})$. 因为

$g(x)=4\sin(x+\frac{\pi}{3})$ 在 $(-\frac{\pi}{3}, 0)$ 处的切线斜率为

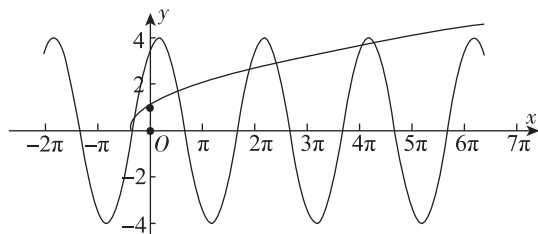
$g'(-\frac{\pi}{3})=4\cos(-\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{3})=4$, 又 $y=\sqrt{x+\frac{\pi}{3}}$

在 $(-\frac{\pi}{3}, 0)$ 处切线斜率不存在, 即切线方程为 x

$=-\frac{\pi}{3}$. 所以 $x=-\frac{\pi}{3}$ 右侧 $g(x)$ 图象较缓, 如图所

示, 同时 $\sqrt{x+\frac{\pi}{3}}>4$ 时, $x>16-\frac{\pi}{3}$, 所以 $y=$

$g(x)-\sqrt{x+\frac{\pi}{3}}$ 的零点有 7 个.



13. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 或 $\frac{\sqrt{10}}{2}$ 【解析】根据题意, $2a-b=(4-m, 3)$,

$\because b\perp(2a-b), \therefore m(4-m)-3=0, \therefore m=1$ 或 m

$=3$, 所以向量 a 在 b 方向上的投影为 $\frac{a\cdot b}{|b|}=\frac{1}{\sqrt{2}}$

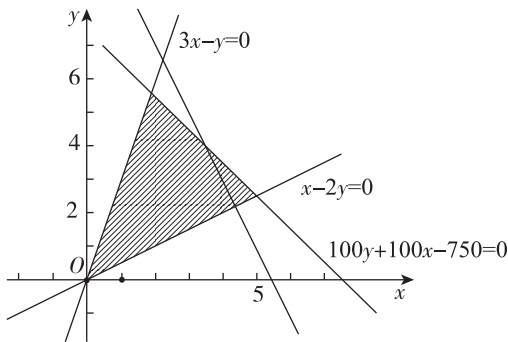
$\frac{\sqrt{2}}{2}$ 或 $\frac{5}{\sqrt{10}}=\frac{\sqrt{10}}{2}$.



12 【解析】 $T_{r+1} = C_9^r x^{9-r} (-\frac{1}{ax})^r = C_9^r x^{9-2r} (-\frac{1}{a})^r$, 所以由 $9-2r=3 \Rightarrow r=3$, 得系数为 $C_9^3 (-\frac{1}{a})^3 = -\frac{21}{2}$, $\therefore a=2$.

15.12 【解析】根据题意, $a_7=2, a_{10}=16, \therefore q=2$, 所以 $a_n=2^{n-6}$, 记 $S_n=a_1+a_2+\dots+a_n=\frac{\frac{1}{32}(1-2^n)}{1-2}=\frac{2^n-1}{32}$, $T_n=a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n=2^{-5} \cdot 2^{-4} \cdot \dots \cdot 2^{n-6}=2^{\frac{n(n-11)}{2}}$, 由题意 $S_n > T_n$, 即 $\frac{2^n-1}{2^5} > 2^{\frac{n(n-11)}{2}}$, $\therefore 2^n-1 > 2^{\frac{n(n-11)}{2}+5}=2^{\frac{n^2-11n+10}{2}}$, $\therefore 2^n-2^{\frac{n^2-11n+10}{2}} > 1$, 因此只需 $n > \frac{n^2-11n+10}{2}$, $\therefore n^2-13n+10 < 0$, $\therefore \frac{13-\sqrt{129}}{2} < n < \frac{13+\sqrt{129}}{2}$, 由于 n 为整数, 因此 n 最大为 $\frac{13+\sqrt{129}}{2}$ 的整数部分, 即为 12.

16.7 【解析】设每天 A, B 两种饮料的生产数量分别为 x 桶, y 桶, 则有 $\begin{cases} x \geq 0, y \geq 0, \\ x \leq 2y, \\ 3x \geq y, \\ 100y+100x-750 \leq 0, \end{cases}$ 则其表示的可行域如图中阴影部分所示, 目标函数为 $z=1.5x+y$, 则 $y=-1.5x+z$, z 表示直线在 y 轴上的截距, 因为 x, y 只取整数, 所以当直线 $y=-1.5x+z$ 经过点 $(4, 3)$ 即 $m=4, n=3$ 时, z 取得最大值, 则 $m+n=7$.



17. 【解析】(I) 在 $\triangle ABD$ 中, 由正弦定理得 $\frac{AB}{\sin \angle ADB} = \frac{AD}{\sin B}$, $\therefore \frac{2\sqrt{3}}{\sin \angle ADB} = \frac{2}{\sin 30^\circ}$, 2 分
解得 $\sin \angle ADB = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 3 分
则 $\angle ADB = 120^\circ, \angle BAD = 30^\circ$,
所以 $AD=BD=2$, 4 分

所以 $CD=2BD=4$

(II) 由 $BC=3BD$, 得 $\frac{S_{\triangle BAD}}{S_{\triangle CAD}} = \frac{1}{2}$,

所以 $\frac{S_{\triangle BAD}}{S_{\triangle CAD}} = \frac{\frac{1}{2}AB \cdot AD \sin \angle BAD}{\frac{1}{2}AC \cdot AD \sin \angle CAD} = \frac{1}{2}$, 7 分

因为 $\frac{\sin \angle BAD}{\sin \angle CAD} = \frac{\sqrt{3}}{3}, AB=2\sqrt{3}$, 所以 $AC=4$, 8 分

由余弦定理得 $AC^2 = AD^2 + (2x)^2 - 2AD \cdot 2x \cos \angle ADC$; $AB^2 = AD^2 + x^2 - 2AD \cdot x \cos \angle ADB$, 9 分
 $4^2 = 2^2 + (2x)^2 - 2 \times 2 \cdot 2x \cos \angle ADC$; $(2\sqrt{3})^2 = 2^2 + x^2 - 2 \times 2 \cdot x \cos \angle ADB$, 10 分
可得 $x = \frac{\sqrt{42}}{3}$, 所以 $BC = \sqrt{42}$,

故 $\triangle ABC$ 的周长为 $2\sqrt{3}+4+\sqrt{42}$ 12 分

18. 【解析】(I) 根据题意, 设公司对每件包裹收取的快递费的平均值为 x ,

$x = \frac{40 \times 10 + 25 \times 15 + 20 \times 20 + 10 \times 25 + 5 \times 30}{100} = 15.75$ (元). 2 分

(II) 重量在 $(2, 3]$ 的产品数为 20, 其损坏率为 $\frac{2}{20} = 0.1$. 重量在 $(3, 4]$ 的产品数为 10, 其损坏率为 $\frac{3}{10} = 0.3$, 3 分

设重量在 $(2, 3]$ 的这件产品的利润记为 X , 则 $X_1 = 70 - 30 - 20 = 20, X_2 = -(30 + 20) + 30 \times 0.9 = -23$,

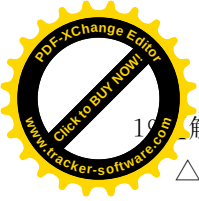
设重量在 $(3, 4]$ 的这件产品的利润记为 Y , 则 $Y_1 = 90 - 40 - 25 = 25, Y_2 = -(40 + 25) + 40 \times 0.9 = -29$, 所以 $X+Y=45, 2, -9, -52$, 5 分

则 $P(X+Y=45) = 0.9 \times 0.7 = 0.63, P(X+Y=2) = 0.1 \times 0.7 = 0.07, P(X+Y=-9) = 0.9 \times 0.3 = 0.27$,

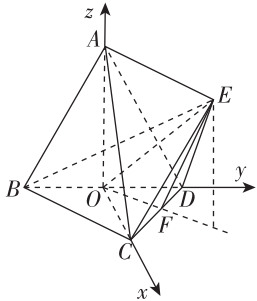
$P(X+Y=-52) = 0.1 \times 0.3 = 0.03$, 7 分
所以其分布列为:

利润	45	2	-9	-52
P	0.63	0.07	0.27	0.03

..... 9 分
根据题意, $E(X+Y) = 45 \times 0.63 + 2 \times 0.07 - 9 \times 0.27 - 52 \times 0.03 = 24.5$ 12 分



19. 【解析】(I) 取 BD 的中点 O , 连接 OC, OA , 因为 $\triangle ABD$ 是等边三角形, 所以 $AO \perp BD$, 1 分
 又因为 $BC = CD$, 所以 $CO \perp BD$, 2 分
 因为 $CO \cap AO = O$, 所以 $BD \perp$ 平面 AOC ,
 3 分
 因为 $AC \subset$ 平面 AOC , 故 $AC \perp BD$ 4 分
 (II) 因为平面 $ABD \perp$ 平面 BCD , 平面 $ABD \cap$ 平面 $BCD = BD$, 所以 $AO \perp$ 平面 BCD , 5 分
 且 $BD = 2, AO = \sqrt{3}$, 故以 O 为原点, OC 为 x 轴, OD 为 y 轴, OA 为 z 轴建立空间直角坐标系,



取 CD 的中点 F , 连接 OF, EF ,
 同理可证 $CD \perp$ 平面 $EOF, OF = \frac{\sqrt{2}}{2}, EF = \frac{\sqrt{6}}{2}$,
 设 $\angle EFO = \pi - \theta$,
 则 $O(0, 0, 0), C(1, 0, 0), D(0, 1, 0), A(0, 0, \sqrt{3}), B(0, -1, 0)$, 6 分
 $E(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta + \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta + \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{6}}{2}\sin\theta)$,
 所以 $\overrightarrow{CD} = (-1, 1, 0), \overrightarrow{CE} = (\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta - \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta + \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{6}}{2}\sin\theta)$, 7 分
 设平面 ECD 的一个法向量为 $\mathbf{n} = (x, y, z)$,
 则 $\begin{cases} \overrightarrow{CD} \cdot \mathbf{n} = 0, \\ \overrightarrow{CE} \cdot \mathbf{n} = 0, \end{cases}$
 $\therefore \begin{cases} -x + y = 0, \\ (\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta - \frac{1}{2})x + (\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta + \frac{1}{2})y + \frac{\sqrt{6}}{2}\sin\theta \cdot z = 0, \end{cases}$
 令 $x = 1$, 则 $\mathbf{n} = (1, 1, -\sqrt{2} \cdot \frac{\cos\theta}{\sin\theta})$ 9 分
 因为平面 ABD 的一个法向量为 $\overrightarrow{OC} = (1, 0, 0)$,
 所以 $|\cos\langle \overrightarrow{OC}, \mathbf{n} \rangle| = \frac{1}{\sqrt{2+2 \cdot \frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta}}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$,
 $\therefore \frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta} = \frac{1}{2}$, 10 分
 所以 $\cos\theta = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}, \sin\theta = \frac{\sqrt{6}}{3}$,

所以 $E(1, 1, 1)$ 或 $E(0, 0, 1)$.
 因为 E 为三棱锥 $A-BCD$ 外一点,
 所以 $E(1, 1, 1)$,
 所以 $BE = \sqrt{6}$ 12 分
 20. 【解析】(I) 根据题意, $b = 1$, 1 分
 又过椭圆 C_1 的一个长轴端点所作的圆 C_2 的两条切线互相垂直, 所以 $\sin 45^\circ = \frac{b}{a} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, 3 分
 所以 $a = \sqrt{2}$, 故椭圆 C_1 的方程为 $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$
 4 分
 (II) ① 当直线斜率存在时, 设直线 AB 方程为 $y = kx + m, A(x_A, y_A), B(x_B, y_B)$,
 代入椭圆 C_1 的方程得 $(\frac{1}{2} + k^2)x^2 + 2kmx + m^2 - 1 = 0$, 6 分
 所以 $x_A + x_B = \frac{-2km}{\frac{1}{2} + k^2}, x_A \cdot x_B = \frac{m^2 - 1}{\frac{1}{2} + k^2}$,
 7 分
 故 $k_{MA} = \frac{y_A - 1}{x_A}, k_{MB} = \frac{y_B - 1}{x_B}$, 8 分
 所以 $k_{MA} + k_{MB} = \frac{y_A - 1}{x_A} + \frac{y_B - 1}{x_B}$
 $= \frac{y_A x_B + y_B x_A - (x_A + x_B)}{x_A x_B}$
 $= 2k + \frac{(m-1)(x_A + x_B)}{x_A x_B} = 2k - \frac{2km}{m+1} = 4$,
 所以 $m = \frac{k}{2} - 1$, 10 分
 $\therefore$ 将 $m = \frac{k}{2} - 1$ 代入 $y = kx + m$ 得: $y = kx + \frac{k}{2} - 1$,
 1, 所以直线必过 $Q(-\frac{1}{2}, -1)$ 11 分
 ② 当直线 AB 斜率不存在时, $A(t, \sqrt{1-t^2}), B(t, -\sqrt{1-t^2})$,
 $k_{MA} + k_{MB} = \frac{\sqrt{1-t^2}-1}{t} + \frac{-\sqrt{1-t^2}-1}{t} = -\frac{2}{t}$
 $= 4$,
 解得 $t = -\frac{1}{2}$, 则直线 AB 也过点 $Q(-\frac{1}{2}, -1)$.
 故 $|PQ| \geq \sqrt{(-\frac{1}{2})^2 + 1} - 1 = \frac{\sqrt{5}}{2} - 1$,
 从而点 P 到点 Q 的最小距离为 $\frac{\sqrt{5}}{2} - 1$ 12 分



21.【解析】(I) $f(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$, $f'(x) = \frac{1}{x} - a (x > 0)$,

当 $a \leq 0$ 时, $f'(x) = \frac{1}{x} - a > 0$, 即函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 无最大值. 1 分

当 $a > 0$ 时, 令 $f'(x) = \frac{1}{x} - a = 0$, 可得 $x = \frac{1}{a}$,

当 $0 < x < \frac{1}{a}$ 时, $f'(x) = \frac{1-ax}{x} > 0$; 当 $x > \frac{1}{a}$ 时, $f'(x) = \frac{1-ax}{x} < 0$,

故函数 $f(x)$ 在 $(0, \frac{1}{a})$ 上单调递增, 在 $(\frac{1}{a}, +\infty)$ 上单调递减. 3 分

所以 $f(x)_{\max} = f(\frac{1}{a}) = -\ln a - 1$,

所以 $-\ln a - 1 = -1$, $\therefore a = 1$ 4 分

故 $f(x) = \ln x - x$ 5 分

(II) 设 $G(x) = f(x) - (2 - x - \frac{1}{2x}) = \ln x + \frac{1}{2x} - 2 (x > 0)$, 6 分

因为 x_1, x_2 是函数 $G(x) = \ln x + \frac{1}{2x} - 2$ 的两个零点,

所以 $\ln x_1 + \frac{1}{2x_1} - 2 = 0, \ln x_2 + \frac{1}{2x_2} - 2 = 0$.

两式相减, 可得 $\ln \frac{x_1}{x_2} = \frac{1}{2x_2} - \frac{1}{2x_1}$,

即 $\ln \frac{x_1}{x_2} = \frac{x_1 - x_2}{2x_1 x_2}$, 故 $x_1 x_2 = \frac{x_1 - x_2}{2 \ln \frac{x_1}{x_2}}$ 8 分

那么 $x_1 = \frac{\frac{x_1}{x_2} - 1}{2 \ln \frac{x_1}{x_2}}, x_2 = \frac{1 - \frac{x_1}{x_2}}{2 \ln \frac{x_1}{x_2}}$ 9 分

令 $t = \frac{x_1}{x_2}$, 其中 $0 < t < 1$,

则 $x_1 + x_2 = \frac{t-1}{2 \ln t} + \frac{1-\frac{1}{t}}{2 \ln t} = \frac{t-1}{2 \ln t}$.

构造函数 $h(t) = t - \frac{1}{t} - 2 \ln t$, 则 $h'(t) = \frac{(t-1)^2}{t^2}$ 11 分

对于 $0 < t < 1, h'(t) > 0$ 恒成立, 故 $h(t) < h(1)$,

所以 $t - \frac{1}{t} - 2 \ln t < 0$, 即 $t - \frac{1}{t} < 2 \ln t$,

因为 $\ln t < 0$, 可知 $\frac{t-1}{2 \ln t} > 1$,

故 $x_1 + x_2 > 1$ 12 分

22.【解析】(I) 由 $x = \rho \cos \theta, y = \rho \sin \theta$ 可得点 A 的极坐标为 $A(2\sqrt{3}, 2)$,

点 B 的直角坐标为 $B(-2\sqrt{3}, 2)$,

点 C 的直角坐标为 $C(0, -4)$ 2 分

设圆 C_2 的直角坐标方程为 $x^2 + (y-m)^2 = r^2$, 代入 A, C 可得 $\begin{cases} 12 + (2-m)^2 = r^2, \\ (-4-m)^2 = r^2, \end{cases} \therefore m = 0, r = 4$,

所以圆 C_2 的直角坐标方程为 $x^2 + y^2 = 16$, 4 分

故曲线 C_3 的直角坐标方程为 $(x-3)^2 + y^2 = 16$ 5 分

(II) 由 (I) 联立曲线 C_1, C_3 可得 $(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}t - 3)^2 + (1 + \frac{\sqrt{2}}{2}t)^2 = 16$, 7 分

整理可得, $t^2 + 3\sqrt{2}t - 11 = 0$,

所以 $t_1 + t_2 = -3\sqrt{2}, t_1 t_2 = -11$, 8 分

所以 $|MP| \cdot |MQ| = |t_1| \cdot |t_2| = -t_1 t_2 = 11$ 10 分

23.【解析】(I) 原不等式可化为 $|3x-1| + |x-2| \geq 3$,

① 当 $x \leq \frac{1}{3}$ 时, 原不等式可化为 $-3x+1+2-x \geq 3$, 解得 $x \leq 0$, 所以 $x \leq 0$; 2 分

② 当 $\frac{1}{3} < x < 2$ 时, 原不等式可化为 $3x-1+2-x \geq 3$, 解得 $x \geq 1$, 所以 $1 \leq x < 2$; 3 分

③ 当 $x \geq 2$ 时, 原不等式可化为 $3x-1-2+x \geq 3$, 解得 $x \geq \frac{3}{2}$, 所以 $x \geq 2$, 4 分

综上所述, 不等式的解集为 $\{x | x \leq 0 \text{ 或 } x \geq 1\}$ 5 分

(II) 因为 $f(x) = \begin{cases} -4x+3, & x \leq \frac{1}{3}, \\ 2x+1, & \frac{1}{3} < x < 2, \\ 4x-3, & x \geq 2, \end{cases}$

所以 $f(x)_{\min} = f(\frac{1}{3}) = \frac{5}{3}$ 6 分

由 $3 \log_2 m \cdot \log_2 n \geq \frac{5}{f(x)}$ 恒成立知,

不等式 $\log_2 m \cdot \log_2 n \geq 1$ 恒成立. 8 分

因为 $\log_2 m + \log_2 n \geq 2 \sqrt{\log_2 m \cdot \log_2 n} \geq 2$, $\therefore \log_2(m \cdot n) \geq 2, \therefore m \cdot n \geq 4$, 当且仅当 $m = n = 2$ 时等号成立.

故 mn 的最小值为 4. 10 分