

(一)

1. D 【解析】依题意,  $A = \{x | 4x^2 - 3x \leq 0\} = \{x | 0 \leq x \leq \frac{3}{4}\}$ ,  $B = \{x | y = \sqrt{2x-1}\} = \{x | x \geq \frac{1}{2}\}$  故  $A \cap B = [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}]$ .

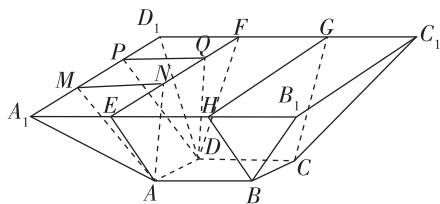
2. C 【解析】依题意,  $z = \frac{4-2i}{7-3i} = \frac{(4-2i)(7+3i)}{(7-3i)(7+3i)} = \frac{28+12i-14i+6}{58} = \frac{34-2i}{58} = \frac{17}{29} - \frac{1}{29}i$ , 故复数  $z$  的虚部为  $-\frac{1}{29}$ .

3. C 【解析】因为调查的教师的工资情况需要分年龄和分级别, 所以使用分层抽样的方法比较能够正确的反应不同年龄、不同等级的教师的工资情况, 可以按照年龄分层抽样一次, 再按照等级分层抽样一次, 进而比对二者间的抽样结果.

4. C 【解析】依题意,  $e = \frac{c}{a} = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}} = \frac{\sqrt{13}}{3}$ , 即  $1 + \frac{b^2}{a^2} = \frac{13}{9}$ , 故  $\frac{b^2}{a^2} = \frac{4}{9}$ ,  $\frac{b}{a} = \frac{2}{3}$ , 则双曲线  $C$  的渐近线方程为  $y = \pm \frac{2}{3}x$ .

5. B 【解析】执行如图所示的程序框图, 第一次,  $A = -1, n = 2$ ; 第二次,  $A = 2, n = 3$ ; 第三次,  $A = \frac{1}{2}, n = 4$ ; 第四次,  $A = -1, n = 5$ ; ...; 第二零八次,  $A = 2, n = 2019$ , 此时输出  $A$  的值为 2.

6. B 【解析】进行分割如图所示, 故  $V = 2(V_{A-A_1MNE} + V_{AMN-DPQ} + V_{D-PQFD_1}) + V_{BCGH-ADFE} = 2 \times (\frac{1}{3} \times 15 \times 6 \times 65 \times 2 + \frac{1}{2} \times 65 \times 15 \times 8) + \frac{(8+20) \times 65}{2} \times 40 = 52000$  立方尺.



7. C 【解析】依题意,  $a_1 + a_2 + a_3 = \frac{76}{9}$ , 即  $\frac{8}{3q} + \frac{8}{3} + \frac{8}{3}q = \frac{76}{9}$ , 解得  $q = \frac{2}{3}$  或  $q = \frac{3}{2}$ , 因为数列  $\{a_n\}$  单调

递减, 且  $a_2 > 0$ , 故  $q = \frac{2}{3}$ .

8. D 【解析】由三视图可知, 该几何体由一个四棱柱和两个四分之一圆锥拼接而成, 故表面积  $S = \frac{(4+6) \times 4}{2} \times 2 + 4 \times 4 + 4 \times 6 + 4 \times 2\sqrt{5} + (4 \times 4 - \frac{1}{2} \times \pi \times 2^2) + 4 \times \frac{1}{2} \times 2 \times 2 + 2 \times \frac{1}{2} \times \pi \times 2\sqrt{2} = 40 + 16 + 24 + 8\sqrt{5} + 16 - 2\pi + 8 + 2\sqrt{2}\pi = 104 + 8\sqrt{5} + (2\sqrt{2} - 2)\pi$ .

9. B 【解析】依题意, 函数  $f(x)$  的定义域为  $\mathbf{R}$ , 关于原点对称, 且  $f(-x) = e^{|-x|} - 5\cos(-x) - (-x)^2 = e^{|x|} - 5\cos x - x^2 = f(x)$ , 故函数  $f(x)$  为偶函数, 图象关于  $y$  轴对称, 排除 C; 当  $x \rightarrow +\infty$  时,  $f(x) \rightarrow +\infty$ , 排除 D;  $f(\frac{\pi}{2}) = e^{\frac{\pi}{2}} - 5\cos(\frac{\pi}{2}) - (\frac{\pi}{2})^2 = e^{\frac{\pi}{2}} - (\frac{\pi}{2})^2 > 0$ , 排除 A.

10. C 【解析】依题意, 抛物线  $C: y^2 = 4x$ , 则  $F(1, 0)$ ; 设  $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ , 则  $E(-1, y_2)$ ; 因为  $k_{EF} = \frac{y_2}{-1-1} = 4$ , 解得  $y_2 = -8$ , 故  $B(16, -8)$ ,  $k_{AF} = k_{BF}$ , 即  $\frac{0-(-8)}{1-16} = \frac{y_1-0}{x_1-1}$ , 故  $-15y_1 = 8x_1 - 8$  ①, 而  $y_1^2 = 4x_1$  ②, 联立 ①②, 解得  $y_1 = \frac{1}{2}$ , 则  $x_1 = \frac{y_1^2}{4} = \frac{1}{16}$ , 则  $|AF| = \frac{1}{16} + 1 = \frac{17}{16}$ .

11. C 【解析】因为  $S_{11} = 121$ , 所以  $11a_6 = 121$ , 故  $a_6 = 11$ ,  $a_4 = 7$ , 则  $d = \frac{a_6 - a_4}{6-4} = 2$ , 因此  $a_1 = a_4 - 3d = 1$ , 故  $a_n = 1 + (n-1) \times 2 = 2n-1$ ,  $S_n = \frac{n(1+2n-1)}{2} = n^2$ ,  $\therefore 3a_2, a_{14}, S_m$  成等比数列,  $\therefore 3a_2 \cdot S_m = a_{14}^2$ , 即  $9m^2 = 27^2$ , 解得  $m = 9$ , 故  $a_9 = 17$ .

12. A 【解析】因为  $\frac{3}{4} < \frac{\pi}{4}$ , 故  $\sin \frac{3}{4} < \cos \frac{3}{4}$ , 故  $b = \frac{4}{3} \sin \frac{3}{4} < c = \frac{4}{3} \cos \frac{3}{4}$ ; 令  $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ , 故  $f'(x) = \frac{x \cos x - \sin x}{x^2}$ , 令  $g(x) = x \cos x - \sin x$ , 故  $g'(x) = \cos x - x \sin x - \cos x = -x \sin x$ , 故当  $x \in [0, \pi]$  时,  $g'(x) \leq 0, g(x) \leq g(0) = 0$ , 即  $f'(x) \leq 0$ , 故

$f(x) = \frac{\sin x}{x}$  在  $[0, \pi]$  上单调递减, 故  $\frac{4}{3} \sin \frac{3}{4} > \frac{5}{4} \sin \frac{4}{5} > \sin \frac{4}{5}$ , 故  $b > a$ , 则  $a < b < c$ .

13. -12 【解析】依题意,  $2m+n = (4, 10) + (1, \lambda) = (5, 10+\lambda)$ , 因为  $m \perp (2m+n)$ , 所以  $m \cdot (2m+n) = 0$ , 故  $5 \times 2 + 5 \times (10+\lambda) = 0$ , 即  $\lambda = -12$ .

14.  $\frac{9}{4} - \frac{5^n}{4}$  【解析】令  $a_{n+1} + \lambda = 5(a_n + \lambda)$ , 故  $a_{n+1} = 5a_n + 4\lambda$ , 则  $4\lambda = -9$ , 故  $\lambda = -\frac{9}{4}$ , 故  $a_{n+1} - \frac{9}{4} = 5(a_n - \frac{9}{4})$ , 即  $\frac{a_{n+1} - \frac{9}{4}}{a_n - \frac{9}{4}} = 5$ , 即数列  $\{a_n - \frac{9}{4}\}$  是以  $-\frac{5}{4}$  为首项, 5 为公比的等比数列, 故  $a_n - \frac{9}{4} = -\frac{5}{4} \cdot 5^{n-1}$ , 即  $a_n = \frac{9}{4} - \frac{5}{4} \cdot 5^{n-1} = \frac{9}{4} - \frac{5^n}{4}$ .

15.  $[-6, 3]$  【解析】依题意,  $f(x) = 6\sqrt{3} \sin x \cos x - 6\sin^2 x + 3 = 3\sqrt{3} \sin 2x + 3\cos 2x = 6\sin(2x + \frac{\pi}{6})$ , 故当  $\frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi$  时,  $\pi \leq 2x \leq 2\pi$ ,  $\frac{7\pi}{6} \leq 2x + \frac{\pi}{6} \leq \frac{13\pi}{6}$ , 此时  $-1 \leq \sin(2x + \frac{\pi}{6}) \leq \frac{1}{2}$ , 则  $-6 \leq f(x) \leq 3$ , 故函数  $f(x)$  在  $[\frac{\pi}{2}, \pi]$  上的取值范围为  $[-6, 3]$ .

16. (2, 3) 【解析】依题意,  $f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 3 = (x-2)^3 - (x-2) + 3$ , 因为  $y = x^3 - x$  为奇函数, 图象关于原点对称, 故  $f(x) = (x-2)^3 - (x-2) + 3$  的图象关于 (2, 3) 对称, 因为  $|MN| = |NP|$ , 故点 N 为曲线  $y = f(x)$  的对称中心, 即点 N 的坐标为 (2, 3).

17. 【解析】(I) 因为  $\tan \angle AMB = \frac{\sin \angle AMB}{\cos \angle AMB} = -2\sqrt{2}$ , 且  $\sin^2 \angle AMB + \cos^2 \angle AMB = 1$ , 联立两式, 解得  $\sin \angle AMB = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ ,  $\cos \angle AMB = -\frac{1}{3}$ , 故  $\sin \angle ABM = \sin(\angle AMB + A) = \frac{2\sqrt{2}}{3} \times \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{4-\sqrt{2}}{6}$ , 由正弦定理  $\frac{AM}{\sin \angle ABM} = \frac{AB}{\sin \angle AMB}$ , 所以  $AM = \frac{AB \cdot \sin \angle ABM}{\sin \angle AMB} = \sqrt{2} - \frac{1}{2}$ . ..... 6 分 (II) 因为  $\angle AMB + \angle CMB = \pi$ ,

故  $\cos \angle CMB = \cos(\pi - \angle AMB) = -\cos \angle AMB = \frac{1}{3}$ , 所以  $\sin \angle CMB = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ ,

在  $\triangle ABM$  中, 由正弦定理  $\frac{BM}{\sin A} = \frac{AB}{\sin \angle AMB}$ ,

故  $BM = \frac{AB \cdot \sin A}{\sin \angle AMB} = \frac{3}{2}$ ,

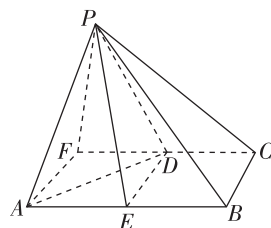
在  $\triangle BCM$  中, 由余弦定理  $BC^2 = BM^2 + CM^2 - 2BM \cdot CM \cdot \cos \angle CMB$ ,

得  $\frac{17}{4} = \frac{9}{4} + CM^2 - 2 \times \frac{3}{2} \times CM \times \frac{1}{3}$ ,

解得  $CM = 2$  或  $CM = -1$  (舍去).

所以  $\triangle BCM$  的面积  $S = \frac{1}{2} BM \cdot CM \cdot \sin \angle CMB = \frac{1}{2} \times \frac{3}{2} \times 2 \times \frac{2\sqrt{2}}{3} = \sqrt{2}$ . ..... 12 分

18. 【解析】(I) 取线段 AB 的中点 E, 连接 DE, PE, 下面证明  $BC \parallel$  平面 PDE: 因为  $\angle ABC = \angle BCD = 90^\circ$ , 故  $AB \parallel CD$ , 又  $DC = EB = 1$ , 故四边形 EBCD 为正方形, 故  $BC \parallel DE$ , 又  $BC \not\subset$  平面 PDE,  $DE \subset$  平面 PDE, 故  $BC \parallel$  平面 PDE. .... 6 分



(II) 因为  $BC \perp PD$ ,  $BC \perp CD$ , 所以  $BC \perp$  平面 PCD, 又因为  $BC \subset$  平面 ABCD, 所以平面  $PCD \perp$  平面 ABCD, 平面  $PCD \cap$  平面  $ABCD = CD$ , 在平面 PCD 内过点 P 作  $PF \perp$  直线 CD 于点 F, 则  $PF \perp$  平面 ABCD, 在  $Rt\triangle PFA$  和  $Rt\triangle PFD$  中, 因为  $PA = PD$ , 所以  $AF = \sqrt{PA^2 - PF^2} = \sqrt{PD^2 - PF^2} = DF$ , 又由题知  $\angle FDA = 45^\circ$ , 所以  $AF \perp FD$ , 由已知求得  $AD = \sqrt{2}$ , 所以  $AF = FD = PF = 1$ , 连接 BD, 则  $V_{P-ABD} = \frac{1}{3} \times 1 \times 1 = \frac{1}{3}$ , 又求得  $\triangle PAD$  的面积为  $\frac{\sqrt{3}}{2}$ , 所以由  $V_{B-APD} = V_{P-ABD}$ , 得点 B 到平面 PAD 的距离为  $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ . .... 12 分

19. 【解析】(I) 依题意, 完善表(1)如下所示

|    | 愿意使用新能源汽车 | 不愿意使用新能源汽车 | 总计   |
|----|-----------|------------|------|
| 男性 | 800       | 200        | 1000 |
| 女性 | 400       | 600        | 1000 |
| 总计 | 1200      | 800        | 2000 |

$$\text{故 } K^2 = \frac{2000 \times (800 \times 600 - 200 \times 400)^2}{1000 \times 1000 \times 1200 \times 800} \approx 333.33$$

$> 10.828$ ,

故有 99.9% 的把握认为市民对这款新能源汽车的使用态度与性别有关. .... 4 分

(II) 依题意, 表(2)中的数据整理如下:

| 时间 $t$<br>(分钟) | (20, 30] | (30, 40] | (40, 50] | (50, 60] |
|----------------|----------|----------|----------|----------|
| 频数             | 150      | 200      | 100      | 50       |
| 频率             | 0.3      | 0.4      | 0.2      | 0.1      |

故所求平均使用时间为  $25 \times 0.3 + 35 \times 0.4 + 45 \times 0.2 + 55 \times 0.1 = 36$  (分钟). .... 7 分

(III) 当  $30 \leq t \leq 45$  时,  $y = 0.12t + 20$ ,

当  $45 < t \leq 60$  时,  $y = 0.12 \times 45 + 0.20(t - 45) + 20 = 0.2t + 16.4$ ,

$$\text{得: } y = \begin{cases} 0.12t + 20, & 30 \leq t \leq 45, \\ 0.2t + 16.4, & 45 < t \leq 60, \end{cases}$$

当  $30 \leq t \leq 45$  时,  $23.6 \leq y \leq 25.4$ ,

当  $45 < t \leq 60$  时,  $25.4 < y \leq 28.4$ ,

令  $0.2t + 16.4 = 27$ , 解得  $t = 53$ ,

故当  $30 \leq t < 53$  时, 使用新能源汽车上班更加合算, 当  $53 < t \leq 60$  时, 使用滴滴打车上班更加合算; 当  $t = 53$  时, 两种方案情况相同. .... 12 分

20. 【解析】(I) 因为  $|PQ| = |QF_2|$ , 故  $|QF_1| + |QF_2| = |QF_1| + |QP| = |PF_1| = 4 > |F_1F_2| = 2$ ,

故点  $Q$  的轨迹是以  $F_1, F_2$  为焦点, 长轴长为 4 的椭圆 (不包含长轴的端点),

故点  $Q$  的轨迹  $E$  的方程为  $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1 (x \neq \pm 2)$ .

..... 4 分

(II) 由 (I) 知,  $F_1(-1, 0)$ , 设直线  $MN$  的方程为:  $x = ky - 1, M(x_1, y_1), N(x_2, y_2)$ ,

$$\text{联立 } \begin{cases} x = ky - 1, \\ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1, \end{cases} \text{ 消去 } x \text{ 得 } (4 + 3k^2)y^2 - 6ky - 9 = 0,$$

$$= 0, \therefore \begin{cases} y_1 + y_2 = \frac{6k}{3k^2 + 4}, \\ y_1 y_2 = -\frac{9}{3k^2 + 4}, \end{cases}$$

$$\therefore S_{\triangle F_2MN} = \frac{1}{2} \cdot |F_1F_2| \cdot |y_1 - y_2| = \frac{12\sqrt{k^2+1}}{3k^2+4},$$

$$\text{令 } \sqrt{k^2+1} = t, \text{ 则 } t \geq 1, \therefore S_{\triangle F_2MN} = \frac{12}{3t + \frac{1}{t}},$$

$$\text{令 } f(t) = 3t + \frac{1}{t}, \text{ 则 } f'(t) = 3 - \frac{1}{t^2},$$

当  $t \in [1, +\infty)$  时,  $f'(t) > 0$ ,

$f(t) = 3t + \frac{1}{t}$  在  $[1, +\infty)$  上单调递增,

$$\therefore S_{\triangle F_2MN} = \frac{12}{3t + \frac{1}{t}} \leq 3, \text{ 当 } t = 1 \text{ 时取等号},$$

即当  $k = 0$  时,  $\triangle F_2MN$  面积的最大值为 3. ....

..... 12 分

21. 【解析】(I) 依题意,  $x \in (0, +\infty), f'(x) = 2x \ln x + x - x = 2x \ln x$ ,

$$\text{故 } f'(e) = 2e, \text{ 而 } f(e) = e^2 - \frac{1}{2}e^2 = \frac{1}{2}e^2,$$

$$\text{故所求切线方程为 } y - \frac{1}{2}e^2 = 2e(x - e),$$

$$\text{即 } y = 2ex - \frac{3}{2}e^2. \text{ ..... 3 分}$$

(II) 依题意,  $g(x) = x^2 \ln x - \frac{1}{2}x^2 + ax(1 - \ln x)$ ,

$$\text{故 } g'(x) = (2x - a) \ln x,$$

显然  $a > 0$ , 令  $g'(x) = 0$ , 解得  $x = \frac{a}{2}$  或  $x = 1$ ,

因为极大值  $M = g(1)$ , 故  $a > 2$ ,

$$\text{此时, 函数 } N = h(a) = g\left(\frac{a}{2}\right) = -\frac{a^2}{4} \ln \frac{a}{2} + \frac{3}{8}a^2,$$

$$\text{所以 } h'(a) = -\frac{1}{2}a(\ln \frac{a}{2} - 1).$$

$$\text{令 } h'(a) = -\frac{1}{2}a(\ln \frac{a}{2} - 1) = 0, \text{ 得 } a = 2e,$$

当  $a$  变化时,  $h'(a), h(a)$  变化情况如下表:

| $a$     | $(2, 2e)$ | $2e$ | $(2e, +\infty)$ |
|---------|-----------|------|-----------------|
| $h'(a)$ | +         | 0    | -               |
| $h(a)$  | ↗         | 极大值  | ↘               |

所以函数  $h(a)$  的最大值为  $h(2e) = \frac{e^2}{2}$ . ... 12 分

22. 【解析】(I) 依题意, 曲线  $C$  的普通方程为  $x^2 + (y - 3)^2 = 9$ , 即  $x^2 + y^2 - 6y = 0$ ,

$$\text{把公式 } \begin{cases} x = \rho \cos \alpha \\ y = \rho \sin \alpha \end{cases} \text{ 代入可得: } \rho^2 = 6\rho \sin \alpha,$$

故曲线  $C$  的极坐标方程为  $\rho = 6 \sin \alpha$ ,

设  $N(\rho, \varphi)$ , 则  $M(\rho, \varphi - \frac{\pi}{2})$ ,

$$\text{则有 } \rho = 6 \sin(\varphi - \frac{\pi}{2}) = -6 \cos \varphi,$$

故点  $N$  的轨迹  $C'$  的极坐标方程为  $\rho = -6\cos\varphi$ .  
..... 5 分

(II) 曲线  $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x (y > 0)$  的极坐标方程为  $\theta = \frac{5\pi}{6} (\rho > 0)$ ,

$D$  到曲线  $\theta = \frac{5\pi}{6}$  的距离为  $d = 6\sin\frac{\pi}{6} = 3$ ,

曲线  $\theta = \frac{5\pi}{6}$  与曲线  $C$  交点  $A(3, \frac{5\pi}{6})$ ,

曲线  $\theta = \frac{5\pi}{6}$  与曲线  $C'$  交点  $B(3\sqrt{3}, \frac{5\pi}{6})$ ,

$\therefore |AB| = 3\sqrt{3} - 3$ ,

故  $\triangle ABD$  的面积  $S = \frac{1}{2} \times |AB| \times d = \frac{9\sqrt{3}-9}{2}$ .

..... 10 分

23. 【解析】(I) 依题意,  $|x-1| + |3x+5| > 8$ ,

当  $x < -\frac{5}{3}$  时, 原式化为  $1-x-3x-5 > 8$ ,

解得  $x < -3$ , 故  $x < -3$ ,

当  $-\frac{5}{3} \leq x \leq 1$  时, 原式化为  $1-x+3x+5 > 8$ ,

解得  $x > 1$ , 故无解,

当  $x > 1$  时, 原式化为  $x-1+3x+5 > 8$ ,

解得  $x > 1$ , 故  $x > 1$ ,

综上所述, 不等式  $f(x) > 8$  的解集为  $(-\infty, -3) \cup (1, +\infty)$ . ..... 5 分

(II) 依题意,  $|x-1| + |3x+5| + m \leq 2x^2 + |3x+5|$ , 则  $|x-1| \leq 2x^2 - m$ ,

即  $-2x^2 + m \leq x-1 \leq 2x^2 - m$ ,

即  $\begin{cases} 2x^2 + x - (m+1) \geq 0, \\ 2x^2 - x + (1-m) \geq 0, \end{cases}$

则只需  $\begin{cases} 1+8(m+1) \leq 0, \\ 1-8(1-m) \leq 0, \end{cases}$  解得  $m \leq -\frac{9}{8}$ ,

$\therefore$  实数  $m$  的取值范围是  $(-\infty, -\frac{9}{8}]$ . ..... 10 分

## (二)

1. A 【解析】 $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ , 故子集个数为  $2^5 = 32$ , 非空真子集个数为 30.

2. C 【解析】 $z = \frac{1+3i}{1+i} = \frac{(1+3i)(1-i)}{2} = 2+i$ , 故  $|z| = \sqrt{5}$ .

3. A 【解析】 $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = (1, -2) + (2, 3) = (3, 1)$ , 故  $B(3, 1)$ .

4. D 【解析】设 3 个红球分别为  $a, b, c$ , 黑球为  $m$ . 所有 2 个红球的取法有 3 种:  $ab, ac, bc$ . 所有不同的取法有 6 种:  $ab, ac, bc, am, bm, cm$ , 故所求概率为  $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ .

5. B 【解析】 $\sin(\frac{3\pi}{2} + \alpha) = \sin\frac{3\pi}{2}\cos\alpha + \cos\frac{3\pi}{2}\sin\alpha = -\cos\alpha = \frac{1}{3}$ , 故  $\cos\alpha = -\frac{1}{3}$ .

6. D 【解析】双曲线  $C_1$  的一条渐近线方程为  $bx - ay = 0$ , 点  $(2, 0)$  到渐近线的距离为 1, 即  $\frac{|2b|}{\sqrt{a^2+b^2}} = 1 \Rightarrow a^2 = 3b^2$ , 即  $\frac{b}{a} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ .

7. B 【解析】 $S_{37} - S_{23} = a_{24} + a_{25} + \dots + a_{37} = \frac{a_{24} + a_{37}}{2} \cdot 14 = 7(a_{24} + a_{37}) = a$ ,  $S_{60} = \frac{a_1 + a_{60}}{2} \cdot 60 = 30(a_{24} + a_{37}) = \frac{30}{7}a$ .

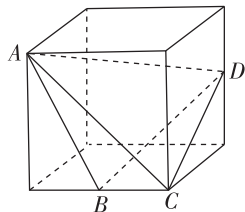
8. A 【解析】由题知,  $AC = x, AB = y, BC = z$ , 由勾股定理可知  $x^2 + z^2 = y^2$ , 故选 A.

9. C 【解析】 $\omega x + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ , 则  $x = \frac{\frac{\pi}{3} + k\pi}{\omega}, k \in \mathbb{Z}$ . 因为  $f(x) = \sin(\omega x + \frac{\pi}{6})$  的图象在  $(0, \pi)$  上有且仅有两条对称轴,

则  $\begin{cases} \frac{\frac{\pi}{3} + (k-1)\pi}{\omega} \leq 0, \\ \frac{\frac{\pi}{3} + k\pi}{\omega} > 0, \\ \frac{\frac{\pi}{3} + (k+1)\pi}{\omega} < \pi, \\ \frac{\frac{\pi}{3} + (k+2)\pi}{\omega} \geq \pi, \end{cases}$  则  $\begin{cases} k - \frac{2}{3} \leq 0, \\ k + \frac{1}{3} > 0, \\ \omega > k + \frac{4}{3}, \\ \omega \leq k + \frac{7}{3}, \end{cases}$  解得  $\omega \in (\frac{4}{3}, \frac{7}{3}]$ .

10. B 【解析】由题意,  $1+2a-1 \geq 1+a^2 \Rightarrow (a-1)^2 \leq 0 \Rightarrow a = 1$ , 而  $\log_4 3 \cdot \log_4 5 < (\frac{\log_4 3 + \log_4 5}{2})^2 < (\frac{\log_4 16}{2})^2 = 1$ , 故  $f(a) = f(1) > f(\log_4 3 \cdot \log_4 5)$ .

11. C 【解析】该几何体嵌入棱长为 2 的正方体, 即四面体  $A-BCD$ , 计算得:  $AB = \sqrt{5}, AC = 2\sqrt{2}, AD = 3, BD = \sqrt{6}, CD = \sqrt{5}$ . 故最长的棱为  $AD = 3$ .



12. B 【解析】 $f(x) = f(x-1) - f(x-2) \Rightarrow f(x+1) = f(x) - f(x-1) = [f(x-1) - f(x-2)] - f(x-1) = -f(x-2)$ , 即  $f(x+3) = -f(x)$ . 故  $f(x$

+6) = -f(x+3) = f(x), 故 f(2019) = f(2016+3) = f(3) = f(2) - f(1) = [f(1) - f(0)] - f(1) = -f(0) = -2^0 = -1.

13.  $9x+4y-2=0$  或  $y=-4$  【解析】设切点坐标为  $(x_0, y_0)$ . ①若  $(x_0, y_0)$  与  $(2, -4)$  重合, 则  $y' = 3x^2 - 6x$ . 当  $x=2$  时,  $k=0$ , 切线方程为  $y=-4$ . ②若  $(x_0, y_0)$  与  $(2, -4)$  不重合, 则  $\frac{y_0+4}{x_0-2} = 3x_0^2 - 6x_0$ , 即  $\frac{x_0^3 - 3x_0^2 + 4}{x_0 - 2} = 3x_0^2 - 6x_0$ . 而  $x_0^3 - 3x_0^2 + 4 = x_0^3 - 2x_0^2 - x_0^2 + 4 = (x_0 - 2)(x_0^2 - x_0 - 2)$ , 故原式化为:  $x_0^2 - x_0 - 2 = 3x_0^2 - 6x_0 \Rightarrow 2x_0^2 - 5x_0 + 2 = 0 \Rightarrow x_0 = \frac{1}{2}$ , 故切线斜率为  $k = \frac{3}{4} - 3 = -\frac{9}{4}$ , 故方程为:  $y+4 = -\frac{9}{4}(x-2)$ , 即  $9x+4y-2=0$ .

14.  $(-1, 2]$  【解析】目标函数化为  $y = 2x + z, z = 2$  时, 可知: 最优解在直线  $2x - y + 2 = 0$  上, 而  $(0, 2)$  在可行域内, 且满足  $2x - y + 2 = 0$ . 故可知: 实数  $k$  的取值范围是  $(-1, 2]$ .

15.  $\sqrt{2} - 1$  【解析】 $AA' \perp$  准线  $l$  于  $A'$ , 则  $AA' = AF_2$ . 四边形  $A'AF_2F_1$  是正方形, 故椭圆  $C$  的离心率  $e = \frac{|F_1F_2|}{|AF_1| + |AF_2|} = \frac{1}{\sqrt{2} + 1} = \sqrt{2} - 1$ .

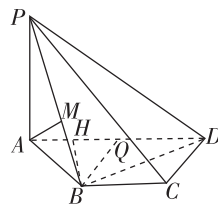
16. 9 【解析】由  $\frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{5} + \dots + \frac{a_n}{3n-1} = 3 - \frac{1}{2^n}$ , 得:  $\frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{5} + \dots + \frac{a_{n-1}}{3n-4} = 3 - \frac{1}{2^{n-1}}$ . 两式相减得:  $\frac{a_n}{3n-1} = \frac{1}{2^n} (n \geq 2)$ ,  $\frac{a_1}{2} = \frac{5}{2} \Rightarrow a_1 = 5$ .  $\therefore a_n = \begin{cases} \frac{3n-1}{2^n}, n \geq 2, \\ 5, n=1, \end{cases}$  故  $a_1 + a_2 + \dots + a_n = 5 + \frac{5}{2^2} + \frac{8}{2^3} + \dots + \frac{3n-1}{2^n} = 4 + \frac{2}{2^1} + \frac{5}{2^2} + \frac{3n-1}{2^n}$ . 令  $S = \frac{2}{2^1} + \frac{5}{2^2} + \dots + \frac{3n-4}{2^{n-1}} + \frac{3n-1}{2^n}$ , 则  $\frac{1}{2}S = \frac{2}{2^2} + \frac{5}{2^3} + \dots + \frac{3n-4}{2^n} + \frac{3n-1}{2^{n+1}}$ . 两式相减得:  $\frac{1}{2}S = 1 + 3(\frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^n}) - \frac{3n-1}{2^{n+1}} = \frac{5}{2} - \frac{3n+5}{2^{n+1}} \Rightarrow S = 5 - \frac{3n+5}{2^n}$ , 故  $a_1 + a_2 + \dots + a_n = 4 + S = 9 - \frac{3n+5}{2^n} < 9$ . 而当  $n=5$  时,  $9 - \frac{3 \times 5 + 5}{2^5} > 8$ , 故  $m$  的最小值为 9.

17. 【解析】(I) 由  $2\cos A \cos B = \frac{\tan C}{\tan A + \tan B} \Rightarrow \tan C = 2\cos A \cos B (\tan A + \tan B) = 2(\sin A \cos B + \cos A \sin B) = 2\sin(A+B) = 2\sin C \Rightarrow \cos C = \frac{1}{2} (0 < C < \pi) \Rightarrow C = \frac{\pi}{3}$ . ..... 4 分

(II)  $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2 \Rightarrow \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2 \Rightarrow a + b + c = 2\sin A + 2\sin B + \sqrt{3} = 2\sin A + 2\sin(\frac{2}{3}\pi - A) + \sqrt{3} = 2\sin A + 2[\frac{\sqrt{3}}{2}\cos A - \frac{1}{2}\sin A] + \sqrt{3} = 3\sin A + \sqrt{3}\cos A + \sqrt{3} = 2\sqrt{3}\sin(A + \frac{\pi}{6}) + \sqrt{3} \leq 3\sqrt{3}$ ,

当  $A = \frac{\pi}{3}$  时,  $\triangle ABC$  周长取最大值为  $3\sqrt{3}$ . ..... 12 分

18. 【解析】(I) 作  $AM \perp PB$  于  $M$ , 则由平面  $PAB \perp$  平面  $PBD \Rightarrow AM \perp$  平面  $PBD \Rightarrow AM \perp BD$ . 取  $AD$  中点为  $Q$ , 则  $BC \parallel QD \Rightarrow BQ = CD = 1 = QD = QA \Rightarrow \angle ABD = 90^\circ$ .



又  $\angle PBA$  为锐角,  $\therefore$  点  $M$  与点  $B$  不重合.  $\begin{cases} DB \perp AB \\ DB \perp AM \end{cases} \Rightarrow DB \perp$  平面  $PAB \Rightarrow DB \perp PA$ . 又  $PA \perp AD$ ,  $DB$  与  $AD$  为平面  $ABCD$  内两条相交直线, 故  $PA \perp$  平面  $ABCD$ . ..... 5 分 (II) 由 (I) 知:  $AM \perp$  平面  $PBD$ , 故  $\angle ADM$  即为  $AD$  与平面  $PBD$  所成角,  $\frac{AM}{AD} = \frac{\sqrt{2}}{4} \Rightarrow AM = \frac{\sqrt{2}}{2}$ .

在  $Rt\triangle PAB$  中,  $AM = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \angle PBA = 45^\circ$ , 故  $PA = 1, S_{\triangle PAB} = \frac{1}{2}, S_{\triangle PAD} = 1, S_{\triangle ABD} = \frac{AB \cdot BD}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ . 而  $\angle PBD = 90^\circ \Rightarrow S_{\triangle PBD} = \frac{PB \cdot BD}{2} = \frac{\sqrt{2} \times \sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{2}$ ,

故所求表面积为:  $\frac{1}{2} + 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{6}}{2} = \frac{3 + \sqrt{3} + \sqrt{6}}{2}$ . ..... 12 分

19. 【解析】(I) 当  $x < a$  时,  $y = (70 - 40)x + (56 - a - 40)(a - x) = (14 + a)x + 16a - a^2$ , 当  $x \geq a$  时,  $y = 30a$ ,  $y = \begin{cases} (14 + a)x + 16a - a^2, x < a \\ 30a, x \geq a \end{cases} (x \in \mathbf{N}^*),$

$$a=15, \text{得: } y = \begin{cases} 29x+15, & x < 15 \\ 450, & x \geq 15 \end{cases} (x \in \mathbf{N}^*). \dots\dots$$

..... 4 分

$$(II) \text{ 由 } (I) \text{ 知, } a=16, y = \begin{cases} 30x, & x < 16 \\ 480, & x \geq 16 \end{cases} (x \in \mathbf{N}^*),$$

300 天中, 有 45 天的利润是 420 元/天, 有 60 天的利润是 450 元/天, 有 195 天的利润是 480 元/天,

..... 7 分

所以鸡厂当天在 A 饭店得到的利润(单位: 元)的平均值为  $\frac{1}{300} \times (420 \times 45 + 450 \times 60 + 195 \times 480)$

$= 465$  (元). ..... 8 分

$$(III) \text{ 当 } a=17 \text{ 时, } y = \begin{cases} 31x-17, & x < 17 \\ 510, & x \geq 17 \end{cases} (x \in \mathbf{N}^*),$$

当  $x=16$  时, 鸡厂当天在 A 饭店得到的利润  $y=479$  元,

所以鸡厂当天在 A 饭店得到的利润大于 479 元的概率为  $\frac{60}{300} + \frac{60}{300} = \frac{2}{5}$ . ..... 12 分

20. 【解析】(I) 过点 Q 作  $x^2=2py$  的切线, 方程为  $y+1=k(x+2)$ , 即  $y=kx+2k-1$ , 代入  $x^2=2py \Rightarrow x^2-2pkx-2p(2k-1)=0, \Delta=0$ , 化为  $pk^2+4k-2=0, k_1 k_2=-1 \Rightarrow \frac{-2}{p}=-1 \Rightarrow p=2$ . ..... 4 分

$$(II) MN: y=x+1 \text{ 代入 } x^2=4y=4(x+1) \Rightarrow x^2-4x-4=0,$$

$$\text{故 } |MN| = \sqrt{2} \cdot |x_M - x_N| = \sqrt{2} \cdot \sqrt{32} = 8.$$

$$CD: y=x+c \text{ 代入 } x^2=4y=4(x+c) \Rightarrow$$

$$x^2-4x-4c=0 \Rightarrow |CD| = \sqrt{2} \cdot |x_C - x_D| = \sqrt{2} \cdot \sqrt{16+16c} = 4\sqrt{2} \cdot \sqrt{1+c},$$

且由  $\Delta=16+16c>0 \Rightarrow -1 < c < 1$ , 由平行线之间的距离公式可得: 梯形 MNDC 的高为  $\frac{|c-1|}{\sqrt{2}}$

$$= \frac{1-c}{\sqrt{2}},$$

$$\text{故 } S_{MNDC} = \frac{1}{2} \times (8+4\sqrt{2} \times \sqrt{1+c}) \times \frac{1-c}{\sqrt{2}} = (1-c)(2\sqrt{2}+2\sqrt{1+c}), \dots\dots 8 \text{ 分}$$

令  $\sqrt{1+c}=t$ , 则  $S_{MNDC} = (2-t^2)(2\sqrt{2}+2t) (t \in (0, \sqrt{2}))$ .

$$S' = (-2t)(2\sqrt{2}+2t) + (2-t^2) \cdot 2 = -6t^2 - 4\sqrt{2}t + 4 = -6(t+\sqrt{2})(t-\frac{\sqrt{2}}{3}).$$

在  $(0, \frac{\sqrt{2}}{3})$  上,  $S' > 0$ , 在  $(\frac{\sqrt{2}}{3}, \sqrt{2})$  上,  $S' < 0$ .

故当  $t = \frac{\sqrt{2}}{3}$  时, S 取最大值为  $\frac{128\sqrt{2}}{27}$ . ..... 12 分

$$21. \text{【解析】} (I) f'(x) = 2e^{2x} = 1 \Rightarrow x = -\frac{\ln 2}{2},$$

$$f(-\frac{\ln 2}{2}) = \frac{1}{2} - a.$$

$f(x)$  在  $(-\frac{\ln 2}{2}, \frac{1}{2} - a)$  处的切线方程为  $y - (\frac{1}{2} - a) = x + \frac{\ln 2}{2}$ , 即  $y = x + \frac{\ln 2}{2} + \frac{1}{2} - a$ .

$$g'(x) = e^x = 1 \Rightarrow x = 0, g(0) = 1 - b.$$

$g(x)$  在  $(0, 1-b)$  处的切线方程为  $y - (1-b) = x \Rightarrow y = x + 1 - b$ ,

$$\text{故 } \frac{\ln 2}{2} + \frac{1}{2} - a = 1 - b \Rightarrow b - a = \frac{1}{2} - \frac{\ln 2}{2}. \dots\dots 4 \text{ 分}$$

$$(II) h(x) = e^{2x} - a - (e^x - b) - mx + \frac{\ln 2}{2} - \frac{1}{2} = e^{2x} - e^x - mx, h'(x) = 2e^{2x} - e^x - m,$$

$$\text{令 } t = e^x, \text{ 则 } y = 2t^2 - t - m,$$

$m > 1$  时,  $2t^2 - t - m = 0$  有两根  $t_1, t_2$  且  $t_1 < 0 < t_2$ .

$$h'(x) = 2(e^x - t_1)(e^x - t_2) = 0, \text{ 得: } x = \ln t_2.$$

在  $(-\infty, \ln t_2)$  上,  $h'(x) < 0$ , 在  $(\ln t_2, +\infty)$  上,  $h'(x) > 0$ .

此时,  $h(\ln t_2) < h(0) = 0$ . 又  $x \rightarrow -\infty$  时,  $h(x) \rightarrow +\infty, x \rightarrow +\infty$  时,  $h(x) \rightarrow +\infty$ .

故在  $(-\infty, \ln t_2)$  和  $(\ln t_2, +\infty)$  上,  $h(x)$  各有 1 个零点, ..... 6 分

$m = 1$  时,  $h'(x) = 2(e^x + \frac{1}{2})(e^x - 1)$ .  $h(x)$  最小值为  $h(0) = 0$ , 故  $h(x)$  仅有 1 个零点.

$0 < m < 1$  时,  $h'(x) = 2(e^x - t_1)(e^x - t_2)$ . 其中  $t_1 < 0 < t_2$ , 同  $m > 1$ ,  $h(x)$  在  $(-\infty, \ln t_2)$  与  $(\ln t_2, +\infty)$  上,  $h(x)$  各有 1 个零点, ..... 8 分

$m = 0$  时,  $h(x) = e^{2x} - e^x$ , 仅有 1 个零点,

$-\frac{1}{8} < m < 0$  时, 对方程  $2t^2 - t - m = 0, \Delta = 1 + 8m > 0$ . 方程有两个正根:  $t_1, t_2$ ,

$h'(x) = 2(e^x - t_1)(e^x - t_2)$ . 在  $(-\infty, \ln t_1)$  上,  $h'(x) > 0$ , 在  $(\ln t_1, \ln t_2)$  上,  $h'(x) < 0$ , 在  $(\ln t_2, +\infty)$  上,  $h'(x) > 0$ .

$$\text{由 } \begin{cases} t_1 + t_2 = \frac{1}{2} \Rightarrow 0 < t_1 < \frac{1}{4} < t_2 < \frac{1}{2}, \text{ 故 } \ln t_2 < 0, \\ 0 < t_1 < t_2 \end{cases}$$

$$h(\ln t_2) < h(0) = 0, h(\ln t_1) = t_1^2 - t_1 - m \ln t_1 = t_1^2 - t_1 - (2t_1^2 - t_1) \ln t_1 = t_1[(t_1 - 1) + (1 - 2t_1) \ln t_1].$$

$\because t_1 - 1 < 0, 1 - 2t_1 > 0, \ln t_1 < 0$ , 故  $h(\ln t_1) < 0$ . 故在  $(-\infty, \ln t_1)$  上,  $h(x) < h(\ln t_1) < 0$ , 在  $(\ln t_1, \ln t_2)$  上,  $h(x) < 0$ , 在  $(\ln t_2, +\infty)$  上,  $h(x)$  有 1 个零点:  $x = 0$ .

$m \leq -\frac{1}{8}$  时,  $h'(x) = 2e^{2x} - e^x - m \geq 0$  恒成立,

$h(x)$  为增函数,  $h(x)$  仅有 1 个零点:  $x=0$ . ……

…………… 10 分

综上得:  $m \leq 0$  或  $m=1$  时,  $h(x)$  有 1 个零点,  $0 < m$

$< 1$  或  $m > 1$  时,  $h(x)$  有 2 个零点. …… 12 分

22. 【解析】(I) 直线  $l$  的普通方程为:  $\sqrt{3}x - y + 1 - 2\sqrt{3} = 0$ ;

椭圆  $C$  的直角坐标方程为:  $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$ . …… 5 分

(II) 将直线  $l$  的参数方程代入椭圆  $C$  的直角坐标方程整理得:  $(3 + \sin^2 \varphi)t^2 + (12\cos \varphi + 8\sin \varphi)t - 32 = 0$ , 由题意得:  $t_1 + t_2 = 0$ ,

故  $12\cos \varphi + 8\sin \varphi = 0 \Rightarrow k = \tan \varphi = -\frac{3}{2}$ ,

所以直线  $l$  的斜率为  $-\frac{3}{2}$ . …… 10 分

23. 【解析】(I)  $|x - a| + |x - 2| \geq |(x - a) - (x - 2)| = |a - 2|$ ,

当且仅当  $(x - a)(x - 2) \leq 0$  时取等,

故  $f(x)$  最小值为  $|a - 2|$ ,

$\therefore |a - 2| \geq 3 \Leftrightarrow a \geq 5$  或  $a \leq -1$ . …… 4 分

(II) 由不等式解集的意义可知:  $x = 2$  时,

$f(2) = 2$ , 即  $|2 - a| = 2$ , 解得:  $a = 0$  或  $4$ .

$a = 0$  时,  $y = f(x)$  与  $y = x$  图象可知: 不合题意舍去.

$a = 4$  时, 比较  $y = f(x)$  与  $y = x$  图象,

由  $y = x$  与  $y = 2x - 6$  解得:  $x = 6$ ,

即  $m = 6$ ,

综上,  $a = 4, m = 6$ . …… 10 分

### (三)

1. D 【解析】 $A = \{x | 2^x > 2\} = \{x | x > 1\}$ ,  $\therefore \complement_{\mathbf{R}} A = \{x | x \leq 1\}$ ,  $B = \{y | y = x^2, x \in \mathbf{R}\} = \{y | y \geq 0\}$ , 所以  $(\complement_{\mathbf{R}} A) \cap B = \{x | 0 \leq x \leq 1\}$ .

2. B 【解析】 $z = \frac{\frac{1}{2}i}{1 - \frac{1}{2}i} = \frac{i}{2 - i} = \frac{i(2 + i)}{5} = \frac{-1 + 2i}{5}$ .

3. A 【解析】根据题意,  $|AB| = \frac{2b^2}{a}$ , 所以  $c = \frac{b^2}{a}$ ,  $\therefore b^2 = ac$ ,  $\therefore a^2 - c^2 = ac$ ,  $\therefore e^2 + e - 1 = 0$ , 解得  $e = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$  或  $\frac{-1 - \sqrt{5}}{2}$  (舍).

4. B 【解析】设小三角形的边长为 1, 每个小三角形的面积为  $\frac{\sqrt{3}}{4}$ , 六个小三角形的面积之和为  $6 \times \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$ , 又长方形的宽为 3, 长为  $4 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$ , 所以长方形的面积为  $6\sqrt{3}$ , 故此点取自阴影部分  $T$  的概率

$\frac{3\sqrt{3}}{6\sqrt{3}} = \frac{1}{4}$ .

5. D 【解析】设  $BD = x$ , 由余弦定理  $AC^2 = AD^2 + (2x)^2 - 2AD \cdot 2x \cos \angle ADC$ ;  $AB^2 = AD^2 + x^2 - 2AD \cdot x \cos \angle ADB$ ; 即  $4^2 = 2^2 + (2x)^2 - 2 \times 2 \cdot 2x \cos \angle ADC$ ;  $(2\sqrt{3})^2 = 2^2 + x^2 - 2 \times 2 \cdot x \cos \angle ADB$ , 可得  $x = \frac{\sqrt{42}}{3}$ , 所以  $BC = \sqrt{42}$ .

6. B 【解析】设  $f(x) = \sqrt{a^2 + b^2} \sin(2x + \varphi)$ ,  $\sqrt{a^2 + b^2} = 4$ , 且  $f(\frac{\pi}{12}) = a \sin \frac{2\pi}{12} + b \cos \frac{2\pi}{12}$ , 解之得  $a = 2, b = 2\sqrt{3}$ . 故  $f(x) = 2\sin 2x + 2\sqrt{3} \cos 2x = 4\sin(2x + \frac{\pi}{3})$ , 将  $f(x)$  图象上所有点的横坐标伸长为原来的 2 倍, 得到  $y = 4\sin(x + \frac{\pi}{3})$ .

7. B 【解析】根据三视图, 此几何体为一个半球挖去一个正四棱锥后剩余的几何体, 正四棱锥的底面边长为  $\sqrt{2}$ , 高为 1, 所以四棱锥的体积为  $\frac{1}{3} \times \sqrt{2} \times \sqrt{2} \times 1 = \frac{2}{3}$ , 半球的体积为  $\frac{2}{3} \times \pi \times 1^3 = \frac{2\pi}{3}$ , 故该几何体的体积为  $\frac{2\pi - 2}{3}$ .

8. B 【解析】根据题意,  $f(x) = (x^2 - 2|x|)e^{|x|}$  显然为偶函数, 排除 C; 代入  $x = 1$ , 则  $f(1) = -e < -1$ , 排除 A, D. 故选 B.

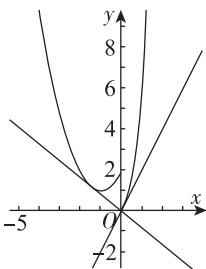
9. B 【解析】因为  $a > b > 0, ab = 1, a > 1, 0 < b < 1$ ,  $\therefore \frac{b}{2^a} < 1, \log_2(a + b) > \log_2 2 \sqrt{ab} = 1, 2^{a + \frac{1}{b}} > a + \frac{1}{b} > a + b$ ,  $\therefore a + \frac{1}{b} > \log_2(a + b)$ ,  $\therefore x < 1, z > y > 1$ . 因为  $\log_x 2x = 1 + \log_x 2 < 1, \log_y 2y = 1 + \log_y 2 > 1, \log_z 2z = 1 + \log_z 2 > 1$ , 则只要比较  $\log_2 2, \log_2 2$  的大小即可,  $\therefore \log_2 y < \log_2 z$ ,  $\therefore \log_y 2 = \frac{1}{\log_2 y} > \frac{1}{\log_2 z} = \log_z 2$ , 所以  $\log_y 2y > \log_z 2z > \log_x 2x$ .

10. D 【解析】根据题意,  $T = 0, n = 1; T = 8, n = 2; T = 8 + 4, n = 3; T = 8 + 4 + 4, n = 4; T = 8 + 4 + 4 + 8, n = 5; T = 8 + 4 + 4 + 8 + 0, n = 6; T = 8 + 4 + 4 + 8 + 0 + 12, n = 7; T = 8 + 4 + 4 + 8 + 0 + 12 - 4, n = 8; T = 8 + 4 + 4 + 8 + 0 + 12 - 4 + 16, n = 9; T = 8 + 4 + 4 + 8 + 0 + 12 - 4 + 16 - 8, n = 10; T = 8 + 4 + 4 + 8 + 0 + 12 - 4 + 16 - 8 + 20, n = 11$ , 故输出的结果为  $T = 8 + 4 + 4 + 8 + 0 + 12 - 4 + 16 - 8 + 20 = 60$ .

11. B 【解析】根据  $C_1 M = \frac{1}{2} A_1 B_1$ , 可知  $AC \perp BC$ , 球

心应为四边形  $A_1ABB_1$  的中心, 又因为  $AC=BC=CC_1$ , 所以球半径为  $R=\sqrt{\frac{2AC^2}{4}+\frac{AC^2}{4}}=\sqrt{3}$ ,  $\therefore AC=2$ . 取  $BC$  中点  $D$ , 连接  $MN, ND, AD$ ,  $\because M, N$  分别是  $A_1B_1, A_1C_1$  的中点,  $\therefore MN \parallel \frac{1}{2}B_1C_1$ . 又  $BD \parallel \frac{1}{2}B_1C_1$ ,  $\therefore MN \parallel BD$ , 则四边形  $BDNM$  为平行四边形, 因此  $ND \parallel BM$ ,  $\therefore \angle AND$  (或其补角) 为异面直线  $BM$  与  $AN$  所成的角. 因为  $AC=BB_1=BC=2$ , 则  $BM=ND=\sqrt{6}, AN=\sqrt{5}, AD=\sqrt{5}$ , 在  $\triangle ADN$  中, 由余弦定理得  $\cos \angle AND = \frac{ND^2+AN^2-AD^2}{2ND \cdot AN} = \frac{\sqrt{30}}{10}$ , 故异面直线  $BM$  与  $AN$  所成角的余弦值为  $\frac{\sqrt{30}}{10}$ .

12. A 【解析】作出函数  $|f(x)|$  的图象如图所示; 当  $x \leq 0$  时; 令  $x^2+2x+2=mx$ , 即  $x^2+(2-m)x+2=0$ , 令  $\Delta=0$ , 即  $(2-m)^2-8=0$ , 解得  $m=2 \pm 2\sqrt{2}$ , 结合图象可知,  $m=2-2\sqrt{2}$ ; 当  $x > 0$  时, 令  $e^{2x}-1=mx$ , 则此时  $f(x)=e^{2x}-1, h(x)=mx$  相切, 设切点  $(x_0, e^{2x_0}-1)$ , 则  $\begin{cases} e^{2x_0}-1=mx_0, \\ 2e^{2x_0}=m, \end{cases}$  解得  $m=2$ , 观察可知, 实数  $m$  的取值范围为  $[2-2\sqrt{2}, 2]$ .



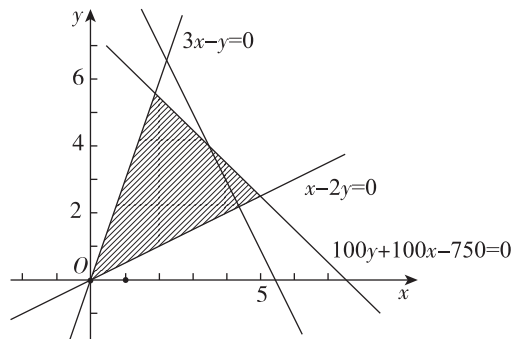
13. 1 或 5 【解析】根据题意,  $2a-b=(4-m, 3)$ ,  $\therefore b \perp (2a-b)$ ,  $\therefore m(4-m)-3=0$ , 解得  $m=1$  或  $m=3$ , 所以  $a \cdot b=1$  或 5.

14.  $\frac{7}{9}$  【解析】由  $\sin(\alpha+\frac{\pi}{6})+\cos\alpha=-\frac{\sqrt{3}}{3}$ , 展开化简可得  $\sin(\alpha+\frac{\pi}{3})=-\frac{1}{3}$ , 所以  $\cos(\frac{2\pi}{3}+2\alpha)=1-2\sin^2(\alpha+\frac{\pi}{3})=1-2(-\frac{1}{3})^2=\frac{7}{9}$ .

15. 3 【解析】由题知圆  $M: x^2+(y-a)^2=a^2 (a>0)$ , 圆心  $(0, a)$  到直线  $x+y=0$  的距离  $d=\frac{a}{\sqrt{2}}$ , 所以  $2\sqrt{a^2-\frac{a^2}{2}}=2\sqrt{2}$ , 解得  $a=2$ . 故圆  $M$  的方程为  $x^2+(y-2)^2=4$ . 所以切线长为  $\sqrt{(3-0)^2+(0-2)^2-4}=3$ .

16. 7 【解析】设每天  $A, B$  两种饮料的生产数量分别为  $x$  桶,  $y$  桶, 则有  $\begin{cases} x \geq 0, y \geq 0, \\ x \leq 2y, \\ 3x \geq y, \\ 100y+100x-750 \leq 0, \end{cases}$  则其表示的可行域如图中阴影部分所示, 目标函数为  $z$

$=1.5x+y$ , 则  $y=-1.5x+z$ ,  $z$  表示直线在  $y$  轴上的截距, 因为  $x, y$  只取整数, 所以当直线  $y=-1.5x+z$  经过点  $(4, 3)$  即  $m=4, n=3$  时,  $z$  取得最大值, 则  $m+n=7$ .



17. 【解析】(I) 根据题意,  $a_1=2, a_5^2=32^2$ ,  $\therefore a_1=2, a_5=32$ , 故  $q=2$ , 所以  $a_n=2^n$ , ..... 2 分  
因为  $S_n=n^2-n$ ,  $\therefore b_n=S_n-S_{n-1}=(n^2-n)-[(n-1)^2-(n-1)]=2n-2 (n \geq 2)$ , ..... 4 分  
又  $b_1=S_1=0$ , 所以  $b_n=2n-2$ . ..... 5 分  
(II) 根据题意, 数列  $\{c_n\}$  的奇数项构成一个等比数列, 首项为 2, 公比为 4, ..... 6 分  
数列  $\{c_n\}$  的偶数项构成一个等差数列, 首项为 2, 公差为 4, ..... 7 分  
所以当  $n$  为偶数时,  $T_n = \frac{2(1-4^{\frac{n}{2}})}{1-4} + \frac{\frac{n}{2}(2+2n-2)}{2} = \frac{n^2}{2} + \frac{2^{n+1}-2}{3}$ , ..... 9 分  
当  $n$  为奇数时,  $T_n = T_{n-1} + c_n = \frac{2(1-4^{\frac{n-1}{2}})}{1-4} + \frac{\frac{n-1}{2}(2+2n-4)}{2} + 2^n = \frac{2^{n+2}-2}{3} + \frac{(n-1)^2}{2}$ , ..... 11 分  
故  $T_n = \begin{cases} \frac{2^{n+2}-2}{3} + \frac{(n-1)^2}{2}, & n \text{ 为奇数}, \\ \frac{n^2}{2} + \frac{2^{n+1}-2}{3}, & n \text{ 为偶数}. \end{cases}$  ..... 12 分

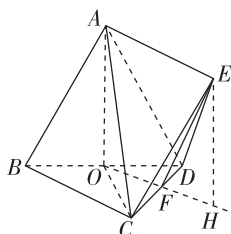
18. 【解析】(I) 根据题意, 设女性观众评分的中位数为  $x$ ,  $10 \times 0.01 + 10 \times 0.02 + (x-70) \times 0.04 = 0.5$ ,  $\therefore x=75$ . ..... 2 分  
男性观众评分的平均数为  $55 \times 0.15 + 65 \times 0.25 + 75 \times 0.3 + 85 \times 0.2 + 95 \times 0.1 = 73.5$ . ..... 4 分  
(II) (i) 男性观众不满意的概率大, 记  $C_A$  表示事件: “女性观众不满意”;  $C_B$  表示事件: “男性观众不满意”,

由直方图得  $P(C_A)$  的估计值为  $(0.01+0.02) \times 10 = 0.3$ , ..... 6 分  
 $P(C_B)$  的估计值为  $(0.015+0.025) \times 10 = 0.4$ ,  
 所以男性观众不满意的概率大. .... 8 分  
 (ii) 列联表如下图:

|       | 女性观众 | 男性观众 | 合计  |
|-------|------|------|-----|
| “满意”  | 140  | 180  | 320 |
| “不满意” | 60   | 120  | 180 |
| 合计    | 200  | 300  | 500 |

..... 10 分  
 所以  $K^2 = \frac{500 \times (140 \times 120 - 180 \times 60)^2}{200 \times 300 \times 320 \times 180} \approx 5.208$   
 $> 3.841$ , ..... 11 分  
 故有 95% 的把握认为性别和对该综艺节目是否满意有关. .... 12 分

19. 【解析】(I) 取  $BD$  的中点  $O$ , 连接  $OC, OA$ ,  
 因为  $\triangle ABD$  是等边三角形, 所以  $AO \perp BD$ , ..... 2 分  
 又因为  $BC = CD$ , 所以  $CO \perp BD$ , ..... 3 分  
 因为  $CO \cap AO = O$ , 所以  $BD \perp$  平面  $AOC$ , ..... 4 分  
 因为  $AC \subset$  平面  $AOC$ , 故  $AC \perp BD$ . .... 5 分



(II) 因为平面  $ABD \perp$  平面  $BCD$ ,  
 平面  $ABD \cap$  平面  $BCD = CD$ ,  
 所以  $AO \perp$  平面  $BCD$ , ..... 6 分  
 且  $BD = 2, AO = \sqrt{3}$ ,  
 取  $CD$  的中点  $F$ , 连接  $OF, EF$ ,  
 同理可证  $CD \perp$  平面  $EOF, CD \perp$  平面  $AOF$ ,  
 $\therefore A, O, F, E$  共面, ..... 8 分  
 所以平面  $BCD \perp$  平面  $OFE$ , 作  $EH$  垂直  $OF$  于点  $H$ , 则  $EH \perp$  平面  $BCD$ ,  
 故点  $E$  到平面  $BCD$  的距离即为  $EH$ , ..... 9 分  
 又  $AE \perp$  平面  $CDE$ , 所以  $AE \perp EF, AE \perp EC$ ,  
 所以  $OF = \frac{\sqrt{2}}{2}, EF = \frac{\sqrt{6}}{2}, AF = \frac{\sqrt{14}}{2}, AE = \sqrt{2}$ , ...  
 ..... 10 分  
 由  $\sin \angle EFO = \sin(\angle AFO + \angle AFE)$   
 $= \sin \angle AFO \cos \angle AFE + \cos \angle AFO \sin \angle AFE$   
 $= \frac{2+3\sqrt{2}}{7}$ ,

$$\text{所以 } EH = \frac{\sqrt{6}}{2} \times \frac{2+3\sqrt{2}}{7} = \frac{\sqrt{6}+3\sqrt{3}}{7}. \dots\dots 12 \text{ 分}$$

20. 【解析】(I) 因为  $M, N$  关于  $x$  轴对称, 所以  $M, N$  的纵坐标为  $\pm\sqrt{2}$ , 横坐标为 1, ..... 1 分  
 代入  $y^2 = 2px (p > 0)$ , 可得  $y^2 = 2x$ , ..... 2 分  
 依题意, 设点  $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), E(x_3, y_3)$ ,

又焦点  $F(\frac{1}{2}, 0)$ ,

$$\text{所以 } x_1 + x_2 + x_3 = 3 \times \frac{1}{2} = \frac{3}{2}, \dots\dots 4 \text{ 分}$$

$$\text{则 } |\overrightarrow{FA}| + |\overrightarrow{FB}| + |\overrightarrow{FE}| = (x_1 + \frac{1}{2}) + (x_2 + \frac{1}{2}) +$$

$$x_3 + \frac{1}{2} = (x_1 + x_2 + x_3) + \frac{3}{2} = \frac{3}{2} + \frac{3}{2} = 3. \dots\dots$$

..... 6 分

(II) 设点  $P(x_1, y_1), Q(x_2, y_2)$ . 则  $\begin{cases} y_1^2 = 2x_1, \\ y_2^2 = 2x_2, \end{cases} \dots\dots$

..... 7 分

$$\text{则 } (y_1 - y_2)(y_1 + y_2) = 2(x_1 - x_2),$$

$$\therefore k_{PQ} = \frac{2}{y_1 + y_2}, \dots\dots 9 \text{ 分}$$

又  $\because P, Q$  关于直线  $l$  对称,  $\therefore k_{PQ} = -1$ ,

$$\text{即 } y_1 + y_2 = -2, \therefore \frac{y_1 + y_2}{2} = -1, \dots\dots 10 \text{ 分}$$

又  $\because PQ$  的中点一定在直线  $l$  上,

$$\therefore \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{y_1 + y_2}{2} + 2 = 1,$$

$\therefore$  线段  $PQ$  的中点  $H$  坐标为  $(1, -1)$ , ..... 11 分

$$\text{故 } |GH| \geq \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} + \sqrt{3} = \sqrt{2} + \sqrt{3},$$

从而  $G$  到  $H$  的最大距离为  $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ . .... 12 分

21. 【解析】(I) 函数  $f(x)$  的定义域为  $(0, +\infty)$ ,

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}, \dots\dots 1 \text{ 分}$$

$$\text{令 } f'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x} > 0, \text{ 得 } x > 1,$$

$$\text{令 } f'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x} < 0, \text{ 得 } 0 < x < 1,$$

所以函数  $f(x)$  的单调递减区间为  $(0, 1)$ ,

函数  $f(x)$  的单调递增区间为  $(1, +\infty)$ . .... 2 分

$$\text{所以 } f(x) = x - \ln x > f(1) = 1 > 0,$$

$$\text{所以 } x > \ln x > 0, \text{ 即 } 1 > \frac{\ln x}{x} > 0,$$

$$\text{所以 } (\frac{\ln x}{x})^2 < \frac{\ln x}{x};$$

$$\text{又因为 } \frac{\ln x^2}{x^2} - \frac{\ln x}{x} = \frac{2\ln x - x\ln x}{x^2} > 0, \dots\dots 3 \text{ 分}$$

$$\text{所以 } (\frac{\ln x}{x})^2 < \frac{\ln x}{x} < \frac{\ln x^2}{x^2}. \dots\dots 4 \text{ 分}$$

(II) 设  $g(x) = mx^2 - x + \ln x - (2mx - m - 1)$ ,

则  $g(x)$  在  $(0, +\infty)$  上有且只有一个零点,

又  $g(1)=0$ , 故函数  $g(x)$  有零点  $x=1$ , ..... 5 分

$$g'(x) = 2mx - 1 + \frac{1}{x} - 2m = \frac{2mx^2 - (2m+1)x + 1}{x} = \frac{(2mx-1)(x-1)}{x},$$

当  $m = \frac{1}{2}$  时,  $g'(x) \geq 0$ ,

又  $g(x)$  不是常数函数, 故  $g(x)$  在  $(0, +\infty)$  上单调递增,

$\therefore$  函数  $g(x)$  有且只有一个零点  $x=1$ , 满足题意, ..... 7 分

当  $0 < m < \frac{1}{2}$  时, 由  $g'(x) = 0$ , 得  $x = \frac{1}{2m}$  或  $x = 1$ ,

且  $\frac{1}{2m} > 1$ , ..... 8 分

由  $g'(x) > 0$ , 得  $0 < x < 1$  或  $x > \frac{1}{2m}$ ,

由  $g'(x) < 0$ , 得  $1 < x < \frac{1}{2m}$ ,

故当  $x$  在  $(0, +\infty)$  上变化时,  $g'(x)$ ,  $g(x)$  的变化情况如下表:

| $x$     | $(0, 1)$ | 1   | $(1, \frac{1}{2m})$ | $\frac{1}{2m}$ | $(\frac{1}{2m}, +\infty)$ |
|---------|----------|-----|---------------------|----------------|---------------------------|
| $g'(x)$ | +        | 0   | -                   | 0              | +                         |
| $g(x)$  |          | 极大值 |                     | 极小值            |                           |

根据上表知  $g(\frac{1}{2m}) < 0$ , ..... 10 分

$$\text{又 } g(x) = mx[x - (2 + \frac{1}{m})] + m + \ln x + 1,$$

$$\therefore g(2 + \frac{1}{m}) > 0,$$

故在  $(\frac{1}{2m}, +\infty)$  上, 函数  $g(x)$  又有一个零点, 不满足题意,

综上所述,  $m = \frac{1}{2}$ . ..... 12 分

22. 【解析】(I) 由  $x = \rho \cos \theta$ ,  $y = \rho \sin \theta$  可得点  $A$  的直角坐标为  $A(2\sqrt{3}, 2)$ ,

点  $B$  的直角坐标为  $B(-2\sqrt{3}, 2)$ ,

点  $C$  的直角坐标为  $C(0, -4)$ . ..... 2 分

设圆  $C_2$  的直角坐标方程为  $x^2 + (y - m)^2 = r^2$ , 代

$$\text{入 } A, C \text{ 可得 } \begin{cases} 12 + (2 - m)^2 = r^2, \\ (-4 - m)^2 = r^2, \end{cases} \therefore m = 0, r = 4,$$

所以圆  $C_2$  的直角坐标方程为  $x^2 + y^2 = 16$ , ..... 4 分

故曲线  $C_3$  的直角坐标方程为  $(x - 3)^2 + y^2 = 16$ . ..... 5 分

(II) 由 (I) 联立曲线  $C_1, C_3$  可得  $(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}t - 3)^2 +$

$$(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}t)^2 = 16, \dots\dots\dots 7 \text{ 分}$$

整理可得,  $t^2 + 3\sqrt{2}t - 11 = 0$ ,

所以  $t_1 + t_2 = -3\sqrt{2}$ ,  $t_1 t_2 = -11$ , ..... 8 分

所以  $|MP| \cdot |MQ| = |t_1| \cdot |t_2| = -t_1 t_2 = 11$ . ..... 10 分

23. 【解析】(I) 原不等式可化为  $|3x - 1| + |x - 2| \geq 3$ ,

① 当  $x \leq \frac{1}{3}$  时, 原不等式可化为  $-3x + 1 + 2 - x \geq 3$ , 解得  $x \leq 0$ , 所以  $x \leq 0$ ; ..... 2 分

② 当  $\frac{1}{3} < x < 2$  时, 原不等式可化为  $3x - 1 + 2 - x \geq 3$ , 解得  $x \geq 1$ , 所以  $1 \leq x < 2$ ; ..... 3 分

③ 当  $x \geq 2$  时, 原不等式可化为  $3x - 1 - 2 + x \geq 3$ , 解得  $x \geq \frac{3}{2}$ , 所以  $x \geq 2$ , ..... 4 分

综上所述, 不等式的解集为  $\{x | x \leq 0 \text{ 或 } x \geq 1\}$ . ..... 5 分

$$(II) \text{ 因为 } f(x) = \begin{cases} -4x + 3, & x \leq \frac{1}{3}, \\ 2x + 1, & \frac{1}{3} < x < 2, \\ 4x - 3, & x \geq 2, \end{cases}$$

所以  $f(x)_{\min} = f(\frac{1}{3}) = \frac{5}{3}$ . ..... 6 分

由  $3\log_2 m \cdot \log_2 n \geq \frac{5}{f(x)}$  恒成立知,

不等式  $\log_2 m \cdot \log_2 n \geq 1$  恒成立. ..... 8 分

因为  $\log_2 m + \log_2 n \geq 2\sqrt{\log_2 m \cdot \log_2 n} \geq 2$ ,

$\therefore \log_2(m \cdot n) \geq 2$ ,  $\therefore m \cdot n \geq 4$ , 当且仅当  $m = n = 2$  时等号成立.

故  $mn$  的最小值为 4. ..... 10 分