数学试题(理科)

（满分 150 分，考试时间 120 分钟）

注意事项：

1. 答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上.

2. 作答时，务必将答案写在答题卡上，写在试卷及草稿纸上无效.

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分．在每小题列出的四个选项中，只有一项是最符合题目要求的．

1. 设集合 $A=\left\{x \mid x^2+x-2<0\right\}$，$B=\left\{x \mid \log_3 x<0\right\}$，则 $A\cup B=$（　　）

（A） $(-2,1)$　　（B） $(0,1)$　　（C）$(-\infty,1)$　　（D） $(-1,1)$

2. 已知 i 是虚数单位，复数 $z=\dfrac{i^2}{1+2i}$，则复数 z 的虚部为（　　）

（A） $\dfrac{2}{5}i$　　（B） $\dfrac{2}{5}$　　（C） $-\dfrac{1}{5}i$　　（D）$-\dfrac{1}{5}$

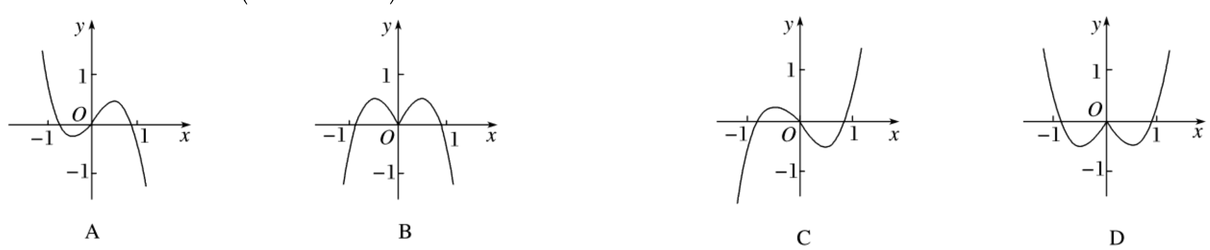
3. 已知向量 $\vec{a}=(2,1)$，$\vec{b}=(2,\sin\alpha-1)$，$\vec{c}=(-2,\cos\alpha)$，若 $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)//\vec{c}$，则 $\tan\alpha$ 的值为（　　）

（A）2　　（B） $\dfrac{1}{2}$　　（C）$-\dfrac{1}{2}$　　（D）-2

4. 已知 $\sin(\dfrac{\pi}{4}-\alpha)=\dfrac{\sqrt{6}}{6}$，则 $\sin 2\alpha$ 的值为（　　）

（A）$\dfrac{1}{3}$　　（B）$\dfrac{2}{3}$　　（C） $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$　　（D） $\dfrac{\sqrt{5}}{3}$

5. 函数 $f\left(x\right)=x^3+\ln\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$ 的图象大致为（　　）



A　　B　　C　　D

6. 用数字 $0,1,2,3$ 可以组成没有重复数字的四位偶数的个数是（　　）

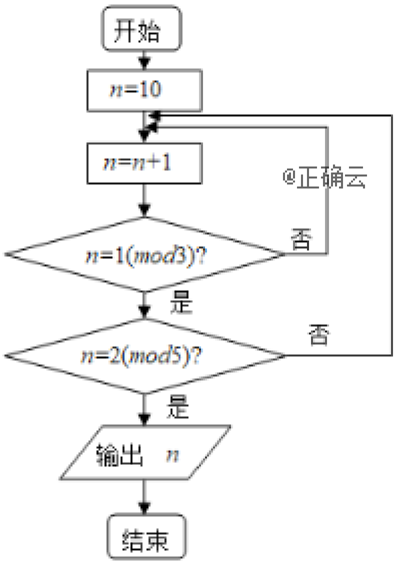
（A）24　　（B）12

（C）10　　（D）6

7. 若正整数 N 除以正整数 m 后的余数为 n，则记为 $N=n\left(\mathrm{mod}\, m\right)$，例如 $10=2\left(\mathrm{mod}\, 4\right)$．如图程序框图的算法源于我国古代闻名中外的《中国剩余定理》．执行该程序框图，则输出的 n 等于（　　）

（A）20　　（B） 21

（C） 22　　（D）23



8. 某公司租地建仓库，每月土地占用费 y_1 与仓库到车站的距离成反比，而每月库存货物的运费 y_2 与到车站的距离成正比，如果在距离车站 $10km$ 处建仓库，这两项费用 y_1 和 y_2 分别为 2 万元和 8 万元，那么要使这两项费用之和最小，仓库应建在距离车站（　　）km 处.

（A）4　　（B） 5　　（C） 6　　（D）7

9. 若直线 $y=kx-1$ 与圆 $C:x^2+y^2-2x-2y=0$ 相交于 A,B 两点，且$\triangle ABC$ 的面积为1，则 $k=$（　）

（A） $\dfrac{3}{4}$　　（B）-1　　（C）$-\dfrac{1}{2}$　　（D） $\dfrac{3}{2}$

10. 已知 $a=\log_5 2$，$b=\log_{0.5}0.2$，$c=0.5^{0.2}$，则 a,b,c 的大小关系为（　　）

（A） $a<c<b$　　（B） $a<b<c$　　（C） $b<c<a$　　（D） $c<a<b$

11. 已知椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\left(a>b>0\right)$ 的左、右焦点分别为 $F_1\left(-2,0\right),F_2\left(2,0\right)$，点 P 在椭圆上，O 为坐标原点，若 $|OP|=2$，且 $|PF_1|\cdot|PF_2|=a^2$，则该椭圆的离心率为（　　）

（A） $\dfrac{3}{4}$　　（B） $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　（C） $\dfrac{1}{2}$　　（D） $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

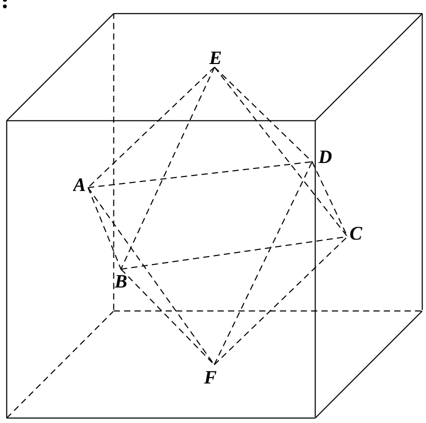
12. 如图，正四棱锥 $E-ABCD$ 与 $F-ABCD$ 的顶点 E,F 恰为正方体上、下底面的中心，点 A,B,C,D 分别在正方体四个侧面上，若正方体棱长为 2，现有以下结论：

①正四棱锥 $E-ABCD$ 与 $F-ABCD$ 全等；

②当 A,B,C,D 分别为四个侧面的中心时，异面直线 AE 与 DF 所成角为 $60°$；

③当 A,B,C,D 分别为四个侧面的中心时，正四棱锥 $E-ABCD$ 的内切球半径为 $\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$；

④八面体 $EABCDF$ 的体积的取值范围为 $\left[\dfrac{4}{3},\dfrac{8}{3}\right]$.



则正确的结论的个数为（　　）

（A）1　　（B）2　　（C）3　　（D） 4

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共计 20 分．

13. 已知实数 x,y 满足 $\begin{cases} 2x+y-2\geq 0 \\ 2x-y-2\leq 0 \\ y\leq x \end{cases}$，则 $z=x+y$ 的最大值为________．

14. $\left(2\sqrt{x}-\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^5$ 的展开式中的常数项的值是__________．（用数字作答）

15. 在 $\triangle ABC$ 中，$a=2$，$b=3$，$c=4$，则 $\dfrac{\sin 2A}{\sin C}=$__________．

16. 已知函数 $f\left(x\right)=e^x+\dfrac{1}{x+1}-a$ 在 $\left(-1,+\infty\right)$ 有零点，则实数 a 的取值范围是________．

三、解答题：共 70 分，解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤．第 17-21 题为必考题，每个试题考生都必须作答．第 22，23 题为选考题，考生根据要求作答．

（一）必考题：共 60 分.

17. （本小题满分 12 分）

已知等比数列 $\left\{a_n\right\}$ 为递减数列，且 $a_4^2=32a_7$，$2\left(a_n+a_{n+2}\right)=5a_{n+1}$．

（Ⅰ）求 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（Ⅱ）设 $b_n=3\log_2 a_n$，求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 S_n，并求 S_n 的最大值．

18. （本小题满分 12 分）

某农科所对冬季昼夜温差大小与某反季节大豆新品种发芽多少之间进行分析研究，他们分别记录了 12 月 1 日至 12 月 5 日的每天昼夜温差与实验室每天每 100 棵种子中的发芽数，得到如下资料：

日期	12 月 1 日	12 月 2 日	12 月 3 日	12 月 4 日	12 月 5 日
温差 x / 摄氏度	10	11	13	12	8
发芽 y / 颗	23	25	30	26	16

该农科所确定的研究方案是：先从这 5 组数据中选取 3 组数据求线性回归方程，再用剩下的 2 组数据进行检验．

（Ⅰ）若选取的 3 组数据中含有来自连续几天的数据，则将最大连续天数记为 ξ（ξ=1 表示数据来自不连续的三天)，求 ξ 的分布列及期望；

（Ⅱ）根据 12 月 2 日至 4 日数据，求出发芽数 y 关于温差 x 的线性回归方程 $\hat{y}=\hat{b}x+\hat{a}$. 由所求得线性回归方程得到的估计数据与剩下的检验数据的误差均不超过 2 颗，则认为得到的线性回归方程是可靠的，试问所得的线性回归方程是否可靠？

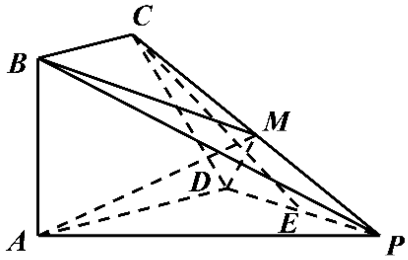
附：参考公式：$\hat{b}=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})}{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2}$，$\hat{a}=\overline{y}-\hat{b}\overline{x}$.

19.（本小题满分 12 分）

如图，四棱锥 $P-ABCD$ 的底面 $ABCD$ 为直角梯形，$BC//AD$，且 $AD=2AB=2BC=2,\ \angle BAD=90°,\Delta PAD$ 为等边三角形，平面 $ABCD\perp$ 平面 PAD；点 E,M 分别为 PD,PC 的中点.

（Ⅰ）证明：$CE//$ 平面 PAB；

（Ⅱ）求直线 DM 与平面 ABM 所成角的正弦值.



20.（本小题满分 12 分）

抛物线 $x^2=8y$ 的焦点为 F，过点 $P(1,2)$ 的直线 l 与抛物线交于 M,N 两点（M,N 不为抛物线的顶点），过 M,N 分别作抛物线的切线 l_1,l_2 与 x 轴的交于 B,C，l_1,l_2 交点为 A.

（Ⅰ）求证：当 l 变化时，经过 A,B,C 三点的圆过定点；

（Ⅱ）求线段 FA 长度的最小值.

21.（本小题满分 12 分）

已知函数 $f(x)=\ln(1+x)-\dfrac{x(1+\lambda x)}{1+x}$.

（Ⅰ）若 $x\geq 0$ 时，$f(x)\leq 0$，求 λ 的取值范围；

（Ⅱ）证明：$\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}+\cdots+\dfrac{1}{2n}<\ln 2<\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}+\cdots+\dfrac{1}{2n}+\dfrac{1}{4n}$. $\left(n\in N_+\right)$

（二）选考题：共 10 分.请考生在第 22、23 题中任选一题作答。如果多做，则按所做的第一题计分.

22. [选修 4－4：坐标系与参数方程]（10 分）

在平面直角坐标系 xOy 中，曲线 C_1 的参数方程为 $\begin{cases} x = 2\cos\theta, \\ y = 2\sin\theta, \end{cases}$（$\theta$ 为参数），已知点 $Q(4,0)$，点 P 是曲线 C_1 上任意一点，点 M 为 PQ 的中点，以坐标原点为极点，x 轴正半轴为极轴建立极坐标系.

（Ⅰ）求点 M 的轨迹 C_2 的极坐标方程；

（Ⅱ）已知直线 l： $y = kx$ 与曲线 C_2 交于 A, B 两点，若 $\overrightarrow{OA} = 3\overrightarrow{AB}$，求 k 的值.

23. [选修 4－5：不等式选讲]（10 分）

已知 $a > 0, b > 0, c > 0$. 若函数 $f\left(x\right) = \left|x + a\right| + \left|x - b\right| + c$ 的最小值为 2.

（Ⅰ）求 $a + b + c$ 的值；

（Ⅱ）证明：$\dfrac{1}{a+b} + \dfrac{1}{b+c} + \dfrac{1}{c+a} \geq \dfrac{9}{4}$.