

数学文科答案

1. 设集合  $A = \{x | x^2 + x - 2 < 0\}$ ,  $B = \{x | \log_3 x < 0\}$ , 则  $A \cup B =$  ( )

- A.  $(-2, 1)$                       B.  $(0, 1)$                       C.  $(-\infty, 1)$                       D.  $(-1, 1)$

【答案】A

【解析】

解不等式  $x^2 + x - 2 < 0$  得  $-2 < x < 1$ , 即  $A = (-2, 1)$ ;

由  $\log_2 x < 0$  得  $0 < x < 1$ , 即  $B = (0, 1)$ ; 所以  $A \cup B = (-2, 1)$ .

故选 A

2. 已知  $i$  是虚数单位, 复数  $z = \frac{i^2}{1+2i}$ , 则复数  $z$  的虚部为 ( )

- A.  $\frac{2}{5}i$                       B.  $\frac{2}{5}$                       C.  $-\frac{1}{5}i$                       D.  $-\frac{1}{5}$

【答案】B

【解析】

$$\because z = \frac{-1}{1+2i} = \frac{-(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)} = -\frac{1}{5} + \frac{2}{5}i,$$

$\therefore$  复数  $z$  的虚部为  $\frac{2}{5}$ .

故选 B.

3. 已知向量  $\vec{a} = (2, 1)$ ,  $\vec{b} = (2, \sin \alpha - 1)$ ,  $\vec{c} = (-2, \cos \alpha)$ , 若  $\vec{a} + \vec{b} \parallel \vec{c}$ , 则  $\tan \alpha$  的值为 ( )

- A. 2                      B.  $\frac{1}{2}$                       C.  $-\frac{1}{2}$                       D. -2

【答案】D

【解析】

$$\vec{a} + \vec{b} = (4, \sin \alpha), \quad Q(\vec{a} + \vec{b}) \parallel \vec{c}, \quad \therefore \frac{4}{-2} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \Rightarrow \tan \alpha = -2$$

4. 已知  $\sin(\frac{\pi}{4} - \alpha) = \frac{\sqrt{6}}{6}$ , 则  $\sin 2\alpha$  的值为 ( )

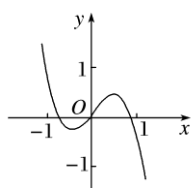
- A.  $\frac{1}{3}$                       B.  $\frac{2}{3}$                       C.  $\frac{\sqrt{3}}{3}$                       D.  $\frac{\sqrt{5}}{3}$

【答案】B

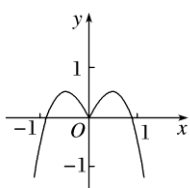
【解析】

因为  $\sin 2\alpha = \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2\alpha\right) = 1 - 2\sin^2\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) = \frac{2}{3}$ ，故选 B.

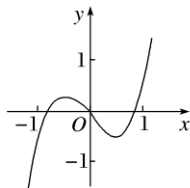
5. 函数  $f(x) = x^3 + \ln(\sqrt{x^2 + 1} - x)$  的图象大致为( )



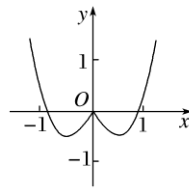
A



B



C



D

【答案】C

【解析】因为  $f(x)$  的定义域为  $\mathbf{R}$ ，且  $f(-x) = -x^3 + \ln(\sqrt{x^2 + 1} + x)$ ， $f(x) + f(-x) = 0$ ，所以  $f(x)$  为奇函数，图象关于原点对称，排除 B，D，因为  $f(1) = 1 + \ln(\sqrt{2} - 1) = \ln \frac{e}{\sqrt{2} + 1} > 0$ ，所以排除 A.

6. 田忌与齐王赛马，田忌的上等马优于齐王的中等马，劣于齐王的上等马，田忌的中等马优于齐王的下等马，劣于齐王的中等马，田忌的下等马劣于齐王的下等马，现从双方的马匹中随机各选一匹进行一场比赛，则齐王的马获胜的概率为( )

- A.  $\frac{2}{3}$       B.  $\frac{3}{4}$       C.  $\frac{4}{5}$       D.  $\frac{5}{6}$

【答案】A

【解析】将齐王的上、中、下等马分别记为  $A, B, C$ ；田忌的上、中、下等马分别记为  $a, b, c$ 。

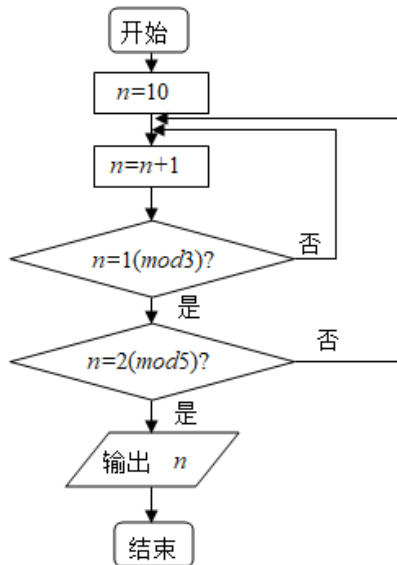
	A	B	C
a	+		
b	+	+	
c	+	+	+

“+”表示齐王的马获胜。

则齐王的马获胜概率  $P = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$

7. 若正整数  $N$  除以正整数  $m$  后的余数为  $n$ ，则记为  $N = n(\bmod m)$ ，例如

$10 \equiv 2 \pmod{4}$ 。如图程序框图的算法源于我国古代闻名中外的《中国剩余定理》。执行该程序框图，则输出的  $n$  等于( )。



- A. 20                      B. 21                      C. 22                      D. 23

【答案】C

【解析】

试题分析：由已知中的程序框图得：该程序的功能是利用循环结构计算出并输出同时满足条件：①被 3 除余 1，②被 5 除余 2，最小为两位数，所输出的  $n = 22$ ，故选 C.

8. 某公司租地建仓库，每月土地占用费  $y_1$  与仓库到车站的距离成反比，而每月库存货物的运费  $y_2$  与到车站的距离成正比，如果在距离车站  $10\text{km}$  处建仓库，这两项费用  $y_1$  和  $y_2$  分别为 2 万元和 8 万元，那么要使这两项费用之和最小，仓库应建在距离车站( )  $\text{km}$  处.

- A. 4                      B. 5                      C. 6                      D. 7

【答案】B

【解析】设仓库建在距离车站  $x \text{ km}$  处，两项费用之和为  $f(x)$ ，则

$$f(x) = \frac{20}{x} + \frac{4}{5}x \geq 2\sqrt{\frac{20}{x} \cdot \frac{4}{5}x} = 8, \text{ 当 } x = 5 \text{ 时取最小值.}$$

9. 若直线  $y = kx - 1$  与圆  $C: x^2 + y^2 - 2x - 2y = 0$  相交于  $A, B$  两点，且  $\triangle ABC$  的面积为 1，则  $k = ( )$

- A.  $\frac{3}{4}$                       B.  $-1$                       C.  $-\frac{1}{2}$                       D.  $\frac{3}{2}$

【答案】A

【解析】

圆  $C: (x-1)^2 + (y-1)^2 = 2$  ,  $\because \triangle ABC$  的面积为 1,  $\therefore AC \perp BC \therefore$  圆心  $C$  到直线

$kx - y - 1 = 0$  的距离为 1, 则  $\frac{|k-2|}{\sqrt{k^2+1}} = 1$  , 解  $k = \frac{3}{4}$  .

故选: A

10. 已知  $a = \log_5 2$  ,  $b = \log_{0.5} 0.2$  ,  $c = 0.5^{0.2}$  , 则  $a, b, c$  的大小关系为 ( )

- A.  $a < c < b$               B.  $a < b < c$               C.  $b < c < a$               D.  $c < a < b$

【答案】A

【解析】

$a = \log_5 2 < \log_5 \sqrt{5} < \frac{1}{2}$  ,  $b = \log_{0.5} 0.2 > \log_{0.5} 0.25 = 2$  ,  $0.5^1 < 0.5^{0.2} < 0.5^0$  , 故

$\frac{1}{2} < c < 1$  ,

所以  $a < c < b$  .

11. 已知椭圆  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$  的左、右焦点分别为  $F_1(-2, 0), F_2(2, 0)$  , 点  $P$  在椭圆上,

$O$  为坐标原点, 若  $|OP| = 2$  , 且  $|PF_1| \cdot |PF_2| = a^2$  , 则该椭圆的离心率为 ( )

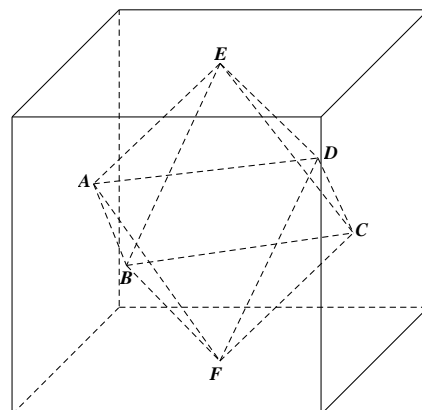
- A.  $\frac{3}{4}$                       B.  $\frac{\sqrt{3}}{2}$                       C.  $\frac{1}{2}$                       D.  $\frac{\sqrt{2}}{2}$

【答案】D

【解析】  $PF_1 \perp PF_2$  ,  $|PF_1|^2 + |PF_2|^2 = 4c^2 = 16$  ,

$(|PF_1| + |PF_2|)^2 = (2a)^2 = 4a^2$  ,  $16 + 2a^2 = 4a^2 \Rightarrow a = 2\sqrt{2}$  ,  $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

12. 如图, 正四棱锥  $E-ABCD$  与  $F-ABCD$  的顶点  $E, F$  恰为



正方体上、下底面的中心，点  $A, B, C, D$  分别在正方体四个侧面上，若正方体棱长为 2，现有以下结论：

- ①正四棱锥  $E-ABCD$  与  $F-ABCD$  全等；
- ②当  $A, B, C, D$  分别为四个侧面的中心时，异面直线  $AE$  与  $DF$  所成角为  $60^\circ$ ；
- ③当  $A, B, C, D$  分别为四个侧面的中心时，正四棱锥

$E-ABCD$  的内切球半径为  $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$ ；

④八面体  $EABCD F$  的体积的取值范围为  $\left[\frac{4}{3}, \frac{8}{3}\right]$ 。

则正确的结论的个数为 ( )

- A. 1      B. 2      C. 3      D. 4

【答案】C

【解析】正确结论②③④

①  $A, B, C, D$  可以上下移动，正四棱锥  $E-ABCD$  与  $F-ABCD$  不一定全等，故①不正确；

②  $\triangle DCF$  为等边三角形，则  $\angle DFC = 60^\circ$ ，又有  $AE \parallel FC$ ，异面直线  $AE$  与  $DF$  所成角为  $60^\circ$ ，故②正确；

③正四棱锥  $E-ABCD$  的内切球半径  $r$  即

底边长  $\sqrt{2}$  高为 1 的等腰三角形的内切圆半径，考虑等腰三角形的面积

$$S = \frac{1}{2} \times \sqrt{2} \times 1 = \frac{\sqrt{2} + 2 \times \frac{\sqrt{6}}{2}}{2} \cdot r \Rightarrow r = \frac{\sqrt{3}-1}{2}, \text{ 故③正确；}$$

④当  $A, B, C, D$  位于正方体各个面的中心时取最小值  $\frac{4}{3}$ ，当  $A, B, C, D$  位于正方体四条竖直

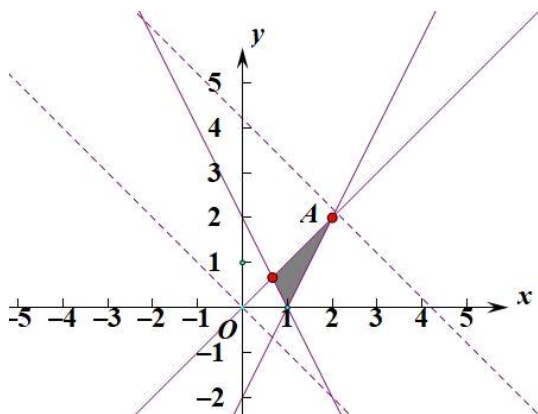
方向的棱的中点时取最大值  $\frac{8}{3}$ ，故④正确。

$$13. \text{ 已知实数 } x, y \text{ 满足 } \begin{cases} 2x + y - 2 \geq 0 \\ 2x - y - 2 \leq 0 \\ y \leq x \end{cases}, \text{ 则 } z = x + y \text{ 的最大值为 } \underline{\hspace{2cm}}.$$

【答案】4

【解析】

不等式组对应的可行域如图所示，



当直线  $y = -x + z$  经过点  $A$  时，直线的纵截距最大， $z$  最大.

联立  $\begin{cases} y = x \\ 2x - y - 2 = 0 \end{cases}$  得  $A(2, 2)$ , 所以  $z_{\max} = 2 + 2 = 4$ .

14. 已知双曲线  $C: x^2 - \frac{y^2}{8} = 1$  的左、右焦点分别是  $F_1, F_2$ , 过  $F_2$  的直线  $l$  与  $C$  的左、右两支分别交于  $A, B$  两点, 且  $|AF_1| = |BF_1|$ , 则  $|AB| =$  4

【答案】4

【解析】设  $|AF_1| = |BF_1| = m$ , 由双曲线的定义  $|AF_2| = m + 2$ ,  $|BF_2| = m - 2$ .

$$|AB| = |AF_2| - |BF_2| = 4.$$

15. 在  $\triangle ABC$  中,  $a = 2$ ,  $b = 3$ ,  $c = 4$ , 则  $\frac{\sin 2A}{\sin C} = \frac{7}{8}$ .

【答案】 $\frac{7}{8}$

【解析】 $\frac{\sin 2A}{\sin C} = 2 \cdot \frac{\sin A}{\sin C} \cos A = \frac{a}{c} \cdot \frac{b^2 + c^2 - a^2}{bc} = \frac{7}{8}$

16. 已知函数  $f(x) = e^x + \frac{1}{x+1} - a$  在  $(-1, +\infty)$  有零点, 则实数  $a$  的取值范围是  $[2, +\infty)$ .

【答案】 $[2, +\infty)$

【解析】 $f'(x) = e^x - \frac{1}{(x+1)^2}$

$x$	$(-1, 0)$	$0$	$(0, +\infty)$
$f'(x)$	$-$	$0$	$+$
$f(x)$	$\downarrow$	极小值	$\uparrow$

当  $a=2$  时,  $f(x)$  有一个零点  $x=0$ .

当  $a>2$  时,  $f(-1+\frac{1}{a})=e^{-1+\frac{1}{a}}>0$ ,  $f(0)=2-a<0$ , 则在  $(-1+\frac{1}{a}, 0)$  存在一个零点.

$f(\ln a)=\frac{1}{1+\ln a}>0$ , 则在  $(0, \ln a)$  存在一个零点.

(17) (本小题 12 分)

已知等比数列  $\{a_n\}$  为递减数列, 且  $a_4^2=32a_7$ ,  $2(a_n+a_{n+2})=5a_{n+1}$ .

(I) 求  $\{a_n\}$  的通项公式;

(II) 设  $b_n=3\log_2 a_n$ , 求数列  $\{b_n\}$  的前  $n$  项和  $S_n$ , 并求  $S_n$  的最大值.

【解析】(I) 对于数列  $\{a_n\}$ , 由题得  $\begin{cases} a_1^2 q^6 = 32a_1 q^6 \\ 2(a_n + a_n q^2) = 5a_n q \end{cases} \quad (a_1 q \neq 0, n \in N^*) \dots\dots\dots 2$

分

解得  $\begin{cases} a_1 = 32 \\ q = \frac{1}{2} \end{cases}$  或  $\begin{cases} a_1 = 32 \\ q = 2 \end{cases}$ ,  $\dots\dots\dots 4$  分

又  $\{a_n\}$  为递减数列, 则  $\begin{cases} a_1 = 32 \\ q = \frac{1}{2} \end{cases}$ ,  $\therefore a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-6}$ ,  $\dots\dots\dots 6$  分

(II) 由 (I) 得  $b_n = 18 - 3n$ ,

当  $n \geq 2$  时,  $b_n - b_{n-1} = -3$ ,

故  $\{b_n\}$  是首项为  $b_1 = 15$ , 公差为  $-3$  的单调递减等差数列.  $\dots\dots\dots 10$  分

又  $b_6 = 0$ , 所以数列  $\{b_n\}$  的前 5 项为正数,

所以当  $n=5$  或  $6$  时,  $S_n$  取得最大值, 且最大值为  $S_5 = S_6 = 45$ .  $\dots\dots\dots 12$  分

18. (本小题满分 12 分) 某农科所对冬季昼夜温差大小与某反季节大豆新品种发芽多少之间进行分析研究, 他们分别记录了 12 月 1 日至 12 月 5 日的每天昼夜温差与实验室每天每 100 棵种子中的发芽数, 得到如下资料:

日期	12 月 1 日	12 月 2 日	12 月 3 日	12 月 4 日	12 月 5 日
温差 $x$ / 摄氏度	10	11	13	12	8
发芽 $y$ / 颗	23	25	30	26	16

该农科所确定的研究方案是: 先从这 5 组数据中选取 3 组数据求线性回归方程, 再用剩下的 2 组数据进行检验.

(I) 求选取的 3 组数据中有且仅有两组数据来自相邻两天的概率;

(II) 根据 12 月 2 日至 4 日数据, 求出发芽数  $y$  关于温差  $x$  的线性回归方程  $\hat{y} = \hat{b}x + \hat{a}$ . 由所求得线性回归方程得到的估计数据与剩下的检验数据的误差均不超过 2 颗, 则认为得到的线性回归方程是可靠的, 试问所得的线性回归方程是否可靠?

附: 参考公式:  $\hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$ ,  $\hat{a} = \bar{y} - \hat{b}\bar{x}$ .

解: (I) 从 5 天任取 3 天的的所有可能

$(1,2,3)$ ,  $(1,2,4)$ ,  $(1,2,5)$ ,  $(1,3,4)$ ,  $(1,3,5)$ ,  $(1,4,5)$ ,  $(2,3,4)$ ,  $(2,3,5)$ ,  $(2,4,5)$ ,  $(3,4,5)$  共 10 种.

.....4 分

3 天中有且仅有两天相邻的 6 种, 选取的 3 组数据中有且仅有两组数据来自相邻两天的概率

$$P = \frac{6}{10} = \frac{3}{5} \quad \text{.....6 分}$$

(II) 由题意, 计算  $\bar{x} = \frac{11+13+12}{3} = 12$ ,  $\bar{y} = \frac{25+30+26}{3} = 27$ ,

$$\sum_{i=1}^3 (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = 5, \quad \sum_{i=1}^3 (x_i - \bar{x})^2 = 2$$



$$\text{所以 } \hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^3 (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^3 (x_i - \bar{x})^2} = \frac{5}{2}, \quad \hat{a} = \bar{y} - \hat{b}\bar{x} = 27 - \frac{5}{2} \times 12 = -3$$

$\therefore y$  关于  $x$  的线性回归方程为  $\hat{y} = \frac{5}{2}x - 3$ ; .....10 分

当  $x=10$  时,  $y=22$ , 且  $|22-23| < 2$ ,

当  $x=8$  时,  $y=17$ , 且  $|17-16| < 2$ .

$\therefore$  所求得线性回归方程是可靠的. ....12 分

19. (本小题满分 12 分)

如图, 四棱锥  $P-ABCD$  的底面  $ABCD$  为直角梯形,  $BC \parallel AD$ , 且

$AD = 2AB = 2BC = 2$ ,  $\angle BAD = 90^\circ$ ,  $\triangle PAD$  为等边三角形, 平面  $ABCD \perp$  平面  $PAD$ ;

点  $E, M$  分别为  $PD, PC$  的中点.

(I) 证明:  $CE \parallel$  平面  $PAB$ ;

(II) 求以  $B, M, E, D$  四点为顶点的四面体的体积.

【详解】(I) 设  $PA$  的中点为  $N$ , 连接  $EN, BN$ ,

$Q E$  为  $PD$  的中点, 所以  $EN$  为  $\triangle PAD$  的中位线,

则可得  $EN \parallel AD$ , 且

$$EN = \frac{1}{2} AD;$$

.....2 分

在梯形  $ABCD$  中,  $BC \parallel AD$ , 且  $BC = \frac{1}{2} AD$ ,

$\therefore BC \parallel EN, BC = EN$ ,

所以四边形  $ENBC$  是平行四边

形,

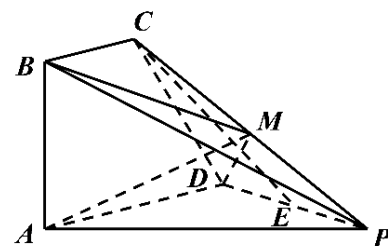
.....4 分

$\therefore CE \parallel BN$ , 又  $BN \subset$  平面  $PAB$ ,  $CE \not\subset$  平面  $PAB$ ,

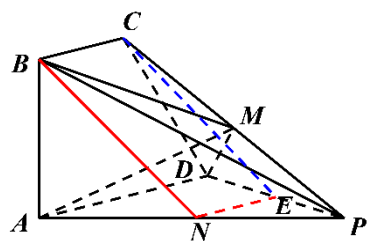
$\therefore CE \parallel$  平面

$PAB$ .

.....6



分



法二：设  $O$  为  $AD$  的中点，连接  $CO, OE$ ，

$Q$   $E$  为  $PD$  的中点，

所以  $OE$  是  $\triangle ADP$  的中位线，所以  $OE \parallel AP$ ，

又  $OE \not\subset$  平面  $PAB$ ， $AP \subset$  平面  $PAB$ ，

$\therefore OE \parallel$  平面

$PAB$ ，

..... 2

分

又在梯形  $ABCD$  中， $BC \parallel AD$ ，且  $BC = \frac{1}{2}AD$ ，

所以四边形  $BAOC$  是平行四边形，

$\therefore BC \parallel BA$ ，

又  $OC \not\subset$  平面  $PAB$ ， $AB \subset$  平面  $PAB$ ，

$\therefore OC \parallel$  平面

$PAB$ ，

..... 4

分

又  $Q$   $OE \cap OC = O$ ，

所以平面  $OEC \parallel$  平面  $PAB$ ，

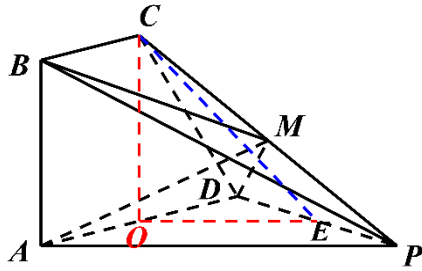
又  $CE \subset$  平面  $PAB$ ，

$\therefore CE \parallel$  平面

$PAB$ 。

..... 6

分



(II) 由  $E, M$  为  $PD, PC$  中点,  $S_{\triangle DME} = \frac{1}{2} S_{\triangle DMP} = \frac{1}{4} S_{\triangle DCP}$

即  $V_{\text{四面体} B-DME} = \frac{1}{4} V_{\text{四面体} B-DCP}$  ..... 8 分

$$S_{\triangle BCD} = \frac{1}{2} BC \cdot AB = \frac{1}{2}$$

设  $AD$  的中点为  $O$ , 又  $Q PA = PD, \therefore PO \perp AD$ .

因 平面  $PAD \perp$  平面  $ABCD$ , 交线为  $AD$ ,  $PO \subset$  平面  $PAD$ ,

$\therefore PO \perp$  平面  $ABCD$ , 即  $PO$  为三棱锥  $P-BCD$  的高, ..... 10 分

易得  $PO = \sqrt{3}$  ..... 11 分

$$V_{\text{四面体} P-BCD} = \frac{1}{3} PO \cdot S_{\triangle BCD} = \frac{\sqrt{3}}{6}$$

$$V_{\text{四面体} B-DME} = \frac{1}{4} V_{\text{四面体} B-DCP} = \frac{\sqrt{3}}{24} \quad \text{.....12 分}$$

20. (本小题满分 12 分) 抛物线  $x^2 = 8y$  的焦点为  $F$ , 过点  $P(1, 2)$  的直线  $l$  与抛物线交于

$M, N$  两点 ( $M, N$  不为抛物线的顶点), 过  $M, N$  分别作抛物线的切线  $l_1, l_2$  与  $x$  轴的交于

$B, C$ ,  $l_1, l_2$  交点为  $A$ .

(I) 求证:  $FB \perp AB$ ;

(II) 求证: 当  $l$  变化时, 点  $A$  在一条定直线上.

解: (I) 设  $M\left(x_1, \frac{1}{8}x_1^2\right), N\left(x_2, \frac{1}{8}x_2^2\right)$

$$l_1: y = \frac{x_1}{4}(x - x_1) + \frac{x_1^2}{8}, \text{ 令 } y = 0, \text{ 得 } B \text{ 点坐标 } B\left(\frac{x_1}{2}, 0\right) \quad \text{.....4 分}$$

$$k_{AB} \cdot k_{FB} = \frac{2-0}{0-\frac{x_1}{2}} = \frac{x_1}{4} \cdot \left(-\frac{4}{x_1}\right) = -1, \quad FB \perp AB \quad \text{.....6 分}$$

(II) 设直线  $l: y = k(x-1) + 2$

联立直线与抛物线  $x^2 - 8kx + (8k - 16) = 0$

则  $x_1 + x_2 = 8k$ ,  $x_1 x_2 = 8k - 16$  .....8 分

$$\text{设 } A(x, y), \text{ 由 } \begin{cases} y = \frac{x_1}{4}(x - x_1) + \frac{x_1^2}{8} \\ y = \frac{x_2}{4}(x - x_2) + \frac{x_2^2}{8} \end{cases} \text{ 得 } \begin{cases} x = \frac{x_1 + x_2}{2} \\ y = \frac{x_1 x_2}{8} \end{cases},$$

$$\begin{cases} x = 4k \\ y = k - 2 \end{cases}, \text{ 消去 } k \text{ 得, } x - 4y - 8 = 0$$

点  $A$  在定直线  $x - 4y - 8 = 0$  上. ....12 分

21. (本小题满分 12 分)

已知函数  $f(x) = \ln x - \lambda x + \frac{1-\lambda}{x} + 2\lambda - 1$ .

(I) 求  $f(x)$  在  $x=1$  处的切线方程;

(II) 若  $0 < x \leq 1$  时,  $f(x) \geq 0$ , 求  $\lambda$  的取值范围.

解: (I) 注意到  $f(1) = 0$ ,  $f'(x) = \frac{(x-1)(1-\lambda-\lambda x)}{x^2}$ ,  $f'(1) = 0$  .....4 分

$f(x)$  在  $x=1$  处的切线方程为  $y = 0$  .....6 分

(II) 若  $\lambda \leq \frac{1}{2}$  时,  $0 < x \leq 1$ ,  $f'(x) \leq 0$ ,  $f(x)$  在  $(0, 1]$  单减,  $f(x) \geq f(1) = 0$  .....8 分

若  $\frac{1}{2} < \lambda < 1$  时,  $\frac{1}{\lambda} - 1 < x < 1$ ,  $f'(x) > 0$ ,  $f(x)$  在  $(\frac{1}{\lambda} - 1, 1)$  单增,  $f(x) < f(1) = 0$  .....10 分

若  $\lambda \geq 1$  时,  $0 < x < 1$ ,  $f'(x) > 0$ ,  $f(x)$  在  $(0, 1)$  单增,  $f(x) < f(1) = 0$  .....11 分

故  $\lambda$  的取值范围是  $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right]$  .....12 分

22. (本小题满分 10 分) [选修 4-4: 坐标系与参数方程]

在平面直角坐标系  $xOy$  中, 曲线  $C_1$  的参数方程为  $\begin{cases} x = 2\cos\theta, \\ y = 2\sin\theta, \end{cases}$  ( $\theta$  为参数), 已知点  $Q(4, 0)$ ,

点  $P$  是曲线  $C_1$  上任意一点, 点  $M$  为  $PQ$  的中点, 以坐标原点为极点,  $x$  轴正半轴为极轴建立极坐标系.

(I) 求点  $M$  的轨迹  $C_2$  的极坐标方程;

(II) 已知直线  $l: y=kx$  与曲线  $C_2$  交于  $A, B$  两点, 若  $\vec{OA} = 3\vec{AB}$ , 求  $k$  的值.

解: (I) 设  $P(2\cos\theta, 2\sin\theta)$ ,  $M(x, y)$ . 且点  $Q(4, 0)$ , 由点  $M$  为  $PQ$  的中点,

所以

$$\begin{cases} x = \frac{2\cos\theta + 4}{2} = 2 + \cos\theta, \\ y = \frac{2\sin\theta}{2} = \sin\theta, \end{cases}$$

……3 分

整理得  $(x-2)^2 + y^2 = 1$ . 即  $x^2 + y^2 - 4x + 3 = 0$ ,

化为极坐标方程为

$$\rho^2 - 4\rho\cos\theta + 3 = 0. \quad \text{……5 分}$$

(II) 设直线  $l: y=kx$  的极坐标方程为  $\theta = \alpha$ . 设  $A(\rho_1, \alpha)$ ,  $B(\rho_2, \alpha)$ ,

因为  $\vec{OA} = 3\vec{AB}$ , 所以  $4\vec{OA} = 3\vec{OB}$ , 即

$$4\rho_1 = 3\rho_2. \quad \text{……6 分}$$

$$\text{联立} \begin{cases} \rho^2 - 4\rho\cos\theta + 3 = 0, \\ \theta = \alpha, \end{cases} \text{整理得}$$

$$\rho^2 - 4\cos\alpha \cdot \rho + 3 = 0. \quad \text{……7 分}$$

$$\text{则} \begin{cases} \rho_1 + \rho_2 = 4\cos\alpha, \\ \rho_1\rho_2 = 3, \\ 4\rho_1 = 3\rho_2, \end{cases} \text{解得}$$

$$\cos\alpha = \frac{7}{8}. \quad \text{……9 分}$$

所以  $k^2 = \tan^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha} - 1 = \frac{15}{49}$ , 则

$$k = \pm \frac{\sqrt{15}}{7}. \quad \text{……10 分}$$

23. (本小题满分 10 分) 已知  $a > 0, b > 0, c > 0$ . 若函数  $f(x) = |x+a| + |x-b| + c$  的最小值为 2.

---

( I ) 求  $a+b+c$  的值;

( II ) 证明:  $\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} \geq \frac{9}{4}$

解: ( I )  $\because f(x) = |x+a| + |x-b| + c \geq |(x+a) - (x-b)| + c = a+b+c$

当且仅当  $-a \leq x \leq b$  时, 等号成立, .....3 分

$\therefore f(x)$  的最小值为  $a+b+c$ ,  $\therefore a+b+c=2$ . .....5 分

( II ) 由 ( I ) 可知,  $a+b+c=2$ , 且  $a, b, c$  都是正数,

所以  $\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} = \frac{1}{4} [(a+b) + (b+c) + (c+a)] \left( \frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} \right) \geq \frac{9}{4}$   
.....9 分

当且仅当  $a=b=c=1$  时, 取等号, 所以  $\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} \geq \frac{9}{4}$  得证 .....10 分