高考模拟数学理科答案

1. 设集合 $A=\left\{x \mid x^2+x-2<0\right\}$，$B=\left\{x \mid \log_3 x<0\right\}$，则 $A \cup B=$（　　）

A. $(-2,1)$　　B. $(0,1)$　　C. $(-\infty,1)$　　D. $(-1,1)$

【答案】A

【解析】

解不等式 $x^2+x-2<0$ 得 $-2<x<1$，即 $A=\left(-2,1\right)$；

由 $log_2 x<0$ 得 $0<x<1$，即 $\mathrm{B}=\left(0,1\right)$；所以 $\mathrm{A} \cup \mathrm{B}=\left(-2,1\right)$.

故选 A

2. 已知 i 是虚数单位，复数 $z=\dfrac{i^2}{1+2i}$，则复数 z 的虚部为（　　）

A. $\dfrac{2}{5}i$　　B. $\dfrac{2}{5}$　　C. $-\dfrac{1}{5}i$　　D. $-\dfrac{1}{5}$

【答案】B

【解析】

$\because z=\dfrac{-1}{1+2i}=\dfrac{-(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)}=-\dfrac{1}{5}+\dfrac{2}{5}i$，

$\therefore$ 复数 z 的虚部为 $\dfrac{2}{5}$.

故选 B.

3. 已知向量 $\vec{a}=\left(2,1\right)$，$\vec{b}=\left(2,\sin\alpha-1\right)$，$\vec{c}=\left(-2,\cos\alpha\right)$，若，则 $\tan\alpha$ 的值为（ D ）

A. 2　　B. $\dfrac{1}{2}$　　C. $-\dfrac{1}{2}$　　D. -2

【答案】D

【解析】

$\vec{a}+\vec{b}=(4,\sin\alpha)$，$\because\left(\vec{a}+\vec{b}\right)/\!/\vec{c}$，$\therefore \dfrac{4}{-2}=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \Rightarrow \tan\alpha=-2$

4. 已知 $\sin(\dfrac{\pi}{4}-\alpha)=\dfrac{\sqrt{6}}{6}$，则 $\sin 2\alpha$ 的值为（　　）

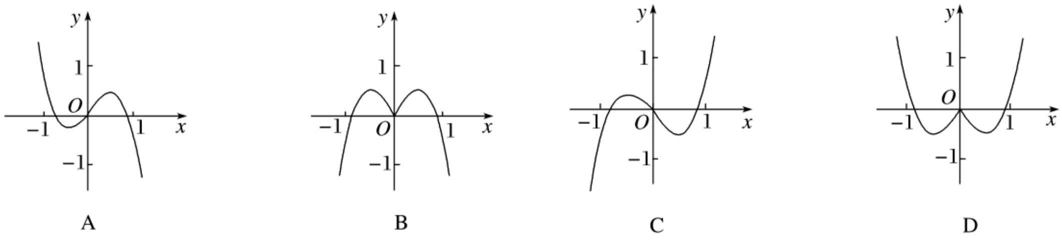
A. $\dfrac{1}{3}$　　B. $\dfrac{2}{3}$　　C. $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$　　D. $\dfrac{\sqrt{5}}{3}$

【答案】B

【解析】

因为$\sin 2\alpha = \cos\left(\dfrac{\pi}{2}-2\alpha\right) = 1-2\sin^2\left(\dfrac{\pi}{4}-\alpha\right) = \dfrac{2}{3}$，故选 B.

5. 函数 $f\left(x\right)=x^3+\ln\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$的图象大致为(　　)



【答案】C

【解析】因为 $f\left(x\right)$的定义域为$\mathbf{R}$，且 $f\left(-x\right)=-x^3+\ln\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)$，$f\left(x\right)+f\left(-x\right)=0$，所以 $f\left(x\right)$ 为奇函数，图象关于原点对称，排除 B，D，因为 $f\left(1\right)=1+\ln\left(\sqrt{2}-1\right)=\ln\dfrac{e}{\sqrt{2}+1}>0$，所以排除 A.

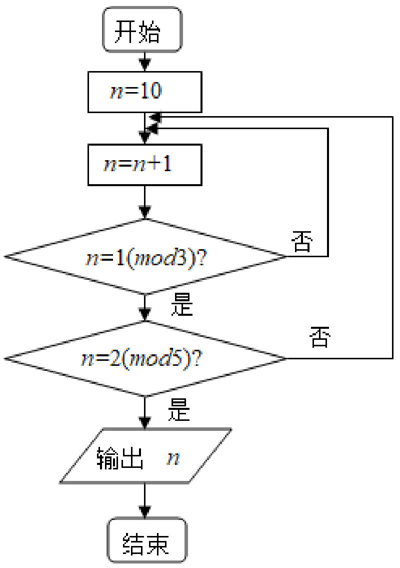
6. 用数字$0,1,2,3$可以组成没有重复数字的四位偶数的个数是 C

A. 24　　B. 12　　C. 10　　D. 6

【答案】C

【解析】分类：①个位排0，前三位有$A_3^3=6$种排法；②个位排2，前三位有$2A_2^2=4$种排法．共有 10种排法．

7. 若正整数N 除以正整数m后的余数为n，则记为$N=n\left(\bmod m\right)$，例如$10=2\left(\bmod 4\right)$．如图程序框图的算法源于我国古代闻名中外的《中国剩余定理》．执行该程序框图，则输出的n等于(　　)．



A. 20　　B. 21　　C. 22　　D. 23

【答案】C

【解析】由已知中的程序框图得：该程序的功能是利用循环结构计算出并输出同时满足条件：①被 3 除余 1，②被 5 除余 2，最小为两位数，所输出的$n=22$，故选 C.

8. 某公司租地建仓库，每月土地占用费y_1与仓库到车站的距离成反比，而每月库存货物的运费y_2与到车站的距离成正比，如果在距离车站$10km$处建仓库，这两项费用y_1和y_2分别为 2 万元和 8 万元，那么要使这两项费用之和最小，仓库应建在距离车站（　B　）km处.

A. 4　　B. 5　　C. 6　　D. 7

【答案】B

【解析】设仓库建在距离车站x km处， 两项费用之和为$f\left(x\right)$，则

$f\left(x\right)=\dfrac{20}{x}+\dfrac{4}{5}x\geq 2\sqrt{\dfrac{20}{x}\cdot\dfrac{4}{5}x}=8$，当$x=5$时取最小值.

9. 若直线$y=kx-1$与圆$C:x^2+y^2-2x-2y=0$相交于A,B两点，且$\triangle ABC$的面积为1，则$k=$（　）

A. $\dfrac{3}{4}$　　B. -1　　C. $-\dfrac{1}{2}$　　D. $\dfrac{3}{2}$

【答案】A

【解析】

圆 C：$(x-1)^2+(y-1)^2=2$，$\because \triangle ABC$ 的面积为1，　$\therefore AC\perp BC$ $\therefore$ 圆心 C 到直线

$kx-y-1=0$的距离为1，则$\dfrac{|k-2|}{\sqrt{k^2+1}}=1$，解$k=\dfrac{3}{4}$.

10. 已知$a=\log_5 2$，$b=\log_{0.5}0.2$，$c=0.5^{0.2}$，则a,b,c的大小关系为（　　）

A. $a<c<b$　　B. $a<b<c$　　C. $b<c<a$　　D. $c<a<b$

【答案】A

【解析】

$a=\log_5 2<\log_5\sqrt{5}<\dfrac{1}{2}$，$b=\log_{0.5}0.2>\log_{0.5}0.25=2$，$0.5^1<0.5^{0.2}<0.5^0$，故

$\dfrac{1}{2}<c<1$，

所以$a<c<b$.

11. 已知椭圆$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的左、右焦点分别为$F_1(-2,0),F_2(2,0)$，点$P$在椭圆上，$O$为坐标原点，若$|OP|=2$，且$|PF_1|\cdot|PF_2|=a^2$，则该椭圆的离心率为（　D　）

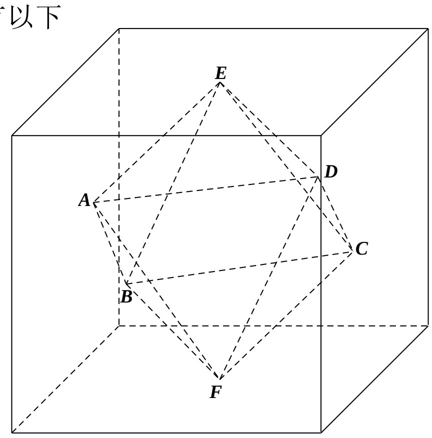
A. $\dfrac{3}{4}$　　B. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　C. $\dfrac{1}{2}$　　D. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

【答案】D

【解析】$PF_1\perp PF_2$，$|PF_1|^2+|PF_2|^2=4c^2=16$，

$(|PF_1|+|PF_2|)^2=(2a)^2=4a^2$，$16+2a^2=4a^2\Rightarrow a=2\sqrt{2}$，$e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

12. 如图，正四棱锥$E-ABCD$与$F-ABCD$的顶点E,F恰为正方体上、下底面的中心，点A,B,C,D分别在正方体四个侧面上，若正方体棱长为2，现有以下结论：



①正四棱锥$E-ABCD$与$F-ABCD$全等；

②当A,B,C,D分别为四个侧面的中心时，异面直线AE与DF所成角为$60°$；

③当A,B,C,D分别为四个侧面的中心时，正四棱锥

$E-ABCD$的内切球半径为$\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$；

④八面体$EABCDF$的体积的取值范围为$\left[\dfrac{4}{3},\dfrac{8}{3}\right]$.

则正确的结论的个数为C

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

【答案】C

【解析】正确结论②③④

①A,B,C,D可以上下移动，正四棱锥$E-ABCD$与$F-ABCD$不一定全等，故①不正确；

②$\triangle DCF$为等边三角形，则$\angle DFC=60°$，又有$AE//FC$，异面直线AE与DF所成角为$60°$，故②正确；

③正四棱锥$E-ABCD$的内切球半径r即

底边长$\sqrt{2}$高为1的等腰三角形的内切圆半径，考虑等腰三角形的面积

$S=\dfrac{1}{2}\times\sqrt{2}\times1=\dfrac{\sqrt{2}+2\times\dfrac{\sqrt{6}}{2}}{2}\cdot r\Rightarrow r=\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$，故③正确；

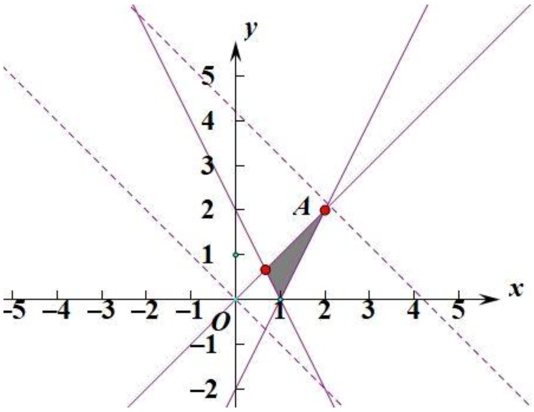
④当A,B,C,D位于正方体各个面的中心时取最小值$\dfrac{4}{3}$，当A,B,C,D位于正方体四条竖直方向的棱的中点时取最大值$\dfrac{8}{3}$，故④正确.

13. 已知实数x,y满足$\begin{cases}2x+y-2\ge0\\2x-y-2\le0\\y\le x\end{cases}$，则$z=x+y$的最大值为________.

【答案】4

【解析】

不等式组对应的可行域如图所示，



当直线$y=-x+z$经过点A时，直线的纵截距最大，z最大.

联立$\begin{cases} y=x \\ 2x-y-2=0 \end{cases}$得$A(2,2)$，所以$z_{\max}=2+2=4$.

14. $\left(2\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^5$的展开式中的常数项的值是__________.（用数字作答）

【答案】-40

【解析】

因为$T_{r+1}=C_5^r(2\sqrt{x})^{5-r}(-\frac{1}{\sqrt[3]{x}})^r=C_5^r(2)^{5-r}(-1)^r x^{\frac{15-5r}{6}}$，

令$\frac{15-5r}{6}=0$得$r=3$，即常数项为$C_5^3 2^2(-1)^3=-40$

15. 在$\triangle ABC$中，$a=2$，$b=3$，$c=4$，则$\frac{\sin 2A}{\sin C}=\frac{7}{8}$__.

【答案】$\frac{7}{8}$

【解析】$\frac{\sin 2A}{\sin C}=2\cdot\frac{\sin A}{\sin C}\cos A=\frac{a}{c}\cdot\frac{b^2+c^2-a^2}{bc}=\frac{7}{8}$

16. 已知函数$f(x)=e^x+\frac{1}{x+1}-a$在$(-1,+\infty)$有零点，则实数a的取值范围是____$[2,+\infty)$____.

【答案】$[2,+\infty)$

【解析】

$f'(x)=e^x-\frac{1}{(x+1)^2}$

x	$(-1,0)$	0	$(0,+\infty)$
$f'(x)$	−	0	+
$f(x)$	]	极小值	Z

当$a=2$时，$f(x)$有一个零点$x=0$.

当$a>2$时，$f(-1+\dfrac{1}{a})=e^{-1+\frac{1}{a}}>0$，$f(0)=2-a<0$，则在$(-1+\dfrac{1}{a},0)$存在一个零点.

$f(\ln a)=\dfrac{1}{1+\ln a}>0$，则在$(0,\ln a)$存在一个零点.

（17）（本小题 12 分）

已知等比数列$\{a_n\}$为递减数列，且$a_4^2=32a_7$，$2(a_n+a_{n+2})=5a_{n+1}$.

（Ⅰ）求$\{a_n\}$的通项公式;

（Ⅱ）设$b_n=3\log_2 a_n$，求数列$\{b_n\}$的前n项和S_n，并求S_n的最大值.

【解析】（Ⅰ）对于数列$\{a_n\}$，由题得$\begin{cases}a_1^2q^6=32a_1q^6\\2(a_n+a_nq^2)=5a_nq\end{cases}$（$a_1q\neq0$，$n\in N^*$）…………2 分

解得$\begin{cases}a_1=32\\q=\dfrac{1}{2}\end{cases}$或$\begin{cases}a_1=32\\q=2\end{cases}$，…………4 分

又Q $\{a_n\}$为递减数列，则$\begin{cases}a_1=32\\q=\dfrac{1}{2}\end{cases}$，$\therefore a_n=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-6}$，…………6 分

（Ⅱ）由（Ⅰ）得$b_n=18-3n$，

当$n\geqslant2$时，$b_n-b_{n-1}=-3$，

故$\{b_n\}$是首项为$b_1=15$，公差为-3的单调递减等差数列. …………10 分

又$b_6=0$，所以数列$\{b_n\}$的前5项为正数，

所以当$n=5$或6时，S_n取得最大值，且最大值为$S_5=S_6=45$．…………12 分

18．（本小题满分 12 分）某农科所对冬季昼夜温差大小与某反季节大豆新品种发芽多少之间进行分析研究，他们分别记录了 12 月 1 日至 12 月 5 日的每天昼夜温差与实验室每天每 100 棵种子中的发芽数，得到如下资料：

日期	12 月 1 日	12 月 2 日	12 月 3 日	12 月 4 日	12 月 5 日
温差x/摄氏度	10	11	13	12	8
发芽y/颗	23	25	30	26	16

该农科所确定的研究方案是：先从这 5 组数据中选取 3 组数据求线性回归方程，再用剩下的 2 组数据进行检验.

（Ⅰ）若选取的 3 组数据中含有来自连续几天的数据，则将最大连续天数记为ξ（ξ=1 表示数据来自不连续的三天），求ξ的分布列及期望；

（Ⅱ）根据 12 月 2 日至 4 日数据，求出发芽数y关于温差x的线性回归方程$\hat{y}=\hat{b}x+\hat{a}$. 由所求得线性回归方程得到的估计数据与剩下的检验数据的误差均不超过 2 颗，则认为得到的线性回归方程是可靠的，试问所得的线性回归方程是否可靠？

附：参考公式：$\hat{b}=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})}{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2}$，$\hat{a}=\overline{y}-\hat{b}\overline{x}$．

解：（Ⅰ）由题意知，$\xi=1,2,3$；

则$P(\xi=1)=\dfrac{1}{C_5^3}=\dfrac{1}{10}$，$P(\xi=2)=\dfrac{6}{C_5^3}=\dfrac{3}{5}$，$P(\xi=3)=\dfrac{3}{C_5^3}=\dfrac{3}{10}$ …………4 分

∴ξ的分布列为：

ξ	1	2	3

P	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{3}{10}$

数学期望为 $E\xi=\frac{11}{5}$； …………6 分

（Ⅱ）由题意，计算 $\overline{x}=\frac{11+13+12}{3}=12$， $\overline{y}=\frac{25+30+26}{3}=27$，

$\sum_{i=1}^{3}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})=5$， $\sum_{i=1}^{3}(x_i-\overline{x})^2=2$

所以 $\hat{b}=\frac{\sum_{i=1}^{3}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})}{\sum_{i=1}^{3}(x_i-\overline{x})^2}=\frac{5}{2}$， $\hat{a}=\overline{y}-\hat{b}\overline{x}=27-\frac{5}{2}\times12=-3$

∴ y 关于 x 的线性回归方程为 $\hat{y}=\frac{5}{2}x-3$； …………10 分

当 $x=10$ 时， $y=22$，且 $|22-23|<2$，

当 $x=8$ 时， $y=17$，且 $|17-16|<2$.

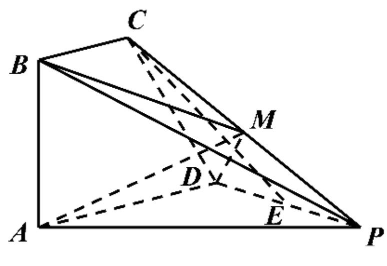
∴所求得线性回归方程是可靠的. …………12 分

19.（本小题满分 12 分）

如图，四棱锥 $P-ABCD$ 的底面 $ABCD$ 为直角梯形， $BC//AD$，且

$AD=2AB=2BC=2,\ \angle BAD=90°,\Delta PAD$ 为等边三角形，平面 $ABCD\perp$ 平面 PAD；

点 E,M 分别为 PD,PC 的中点.



（Ⅰ）证明：$CE//$ 平面 PAB；

（Ⅱ）求直线 DM 与平面 ABM 所成角的正弦值.

【详解】（Ⅰ）设 PA 的中点为 N，连接 EN,BN，

∵ E 为 PD 的中点，所以 EN 为 $\triangle PAD$ 的中位线，

则可得 $EN//AD$，且

$EN=\frac{1}{2}AD$； ………. . 2 分

在梯形 $ABCD$ 中， $BC//AD$，且 $BC=\frac{1}{2}AD$，

$\therefore BC//EN,BC=EN$，

所以四边形$ENBC$是平行四边

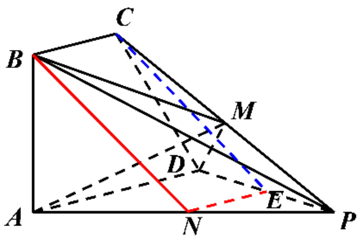
形，   ……….. 4 分

$\therefore CE // BN$，又$BN \subset$平面PAB，$CE \not\subset$平面PAB，

$\therefore CE //$平面

PAB.   ……….. 6

分



法二：设O为AD的中点，连接CO, OE，

$\because E$为PD的中点，

所以OE是$\triangle ADP$的中位线，所以$OE // AP$，

又$OE \not\subset$平面PAB，$AP \subset$平面PAB，

$\therefore OE //$平面

PAB，   ……….. 2

分

又在梯形$ABCD$中，$BC // AD$，且$BC = \frac{1}{2} AD$，

所以四边形$BAOC$是平行四边形，

$\therefore BC // BA$，

又$OC \not\subset$平面PAB，ABì 平面PAB，

$\therefore OC //$平面

PAB，   ……….. 4

分

又$\because OE \cap OC = O$，

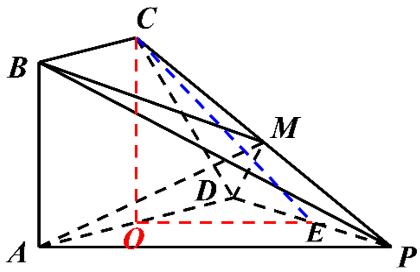
所以平面$OEC //$平面PAB，

又$CE \subset$平面PAB，

$\therefore CE //$平面

PAB.   ……….. 6

分



（Ⅱ）设 AD 的中点为 O，又 $\because PA=PD,\therefore PO\perp AD$.

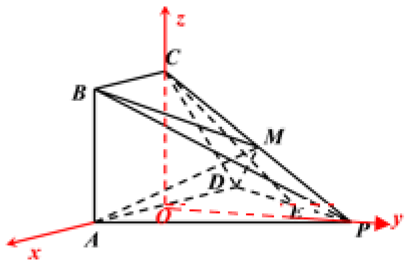
因　平面 $PAD\perp$ 平面 $ABCD$，交线为 AD，$PO\subset$ 平面 PAD，

$\therefore PO\perp$ 平面 $ABCD$，

又由 $CO//BA$，$\angle BAD=90^\circ$，

$\therefore CO\perp AD$.

即有 OA,OC,OP 两两垂直，如图，以点 O 为原点，OA 为 x 轴，OP 为 y 轴，OC 为 z 轴建立坐标系.



…………7 分

已知点

$A(1,0,0),B(1,0,1),M\left(0,\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}\right),D(-1,0,0),\overrightarrow{AB}=(0,0,1),\overrightarrow{AM}=\left(-1,\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}\right)$，…

…..8 分

设平面 ABM 的法向量为：$\vec{m}=(x,y,z)$

则有 $\begin{cases}\vec{m}\cdot\overrightarrow{AB}=z=0\\ \vec{m}\cdot\overrightarrow{AM}=-x+\frac{\sqrt{3}}{2}y+\frac{1}{2}z=0\end{cases}$，可得平面 ABM 的一个法向量为 $\vec{m}=(\sqrt{3},2,0)$，

$\overrightarrow{DM}=\left(1,\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}\right)$，

…………. . 10 分

可得：

$$\cos\langle\vec{m},\overrightarrow{DM}\rangle=\frac{\vec{m}\cdot\overrightarrow{DM}}{|\vec{m}|\cdot|\overrightarrow{DM}|}=\frac{\sqrt{3}\times1+2\times\frac{\sqrt{3}}{2}+0\times\frac{1}{2}}{\sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2+2^2+0^2}\cdot\sqrt{1^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}}=\frac{\sqrt{42}}{7},$$ . . 11 分

所以直线 DM 与平面 ABM 所成角的正弦值为

$\frac{\sqrt{42}}{7}$. …………. . 12 分

20. （本小题满分 12 分）抛物线 $x^2=8y$ 的焦点为 F，过点 $P(1,2)$ 的直线 l 与抛物线交于 M,N 两点（M,N 不为抛物线的顶点），过 M,N 分别作抛物线的切线 l_1,l_2 与 x 轴的交于 B,C，l_1,l_2 交点为 A.

（Ⅰ）求证：当 l 变化时，经过 A,B,C 三点的圆过定点；

（Ⅱ）求线段 FA 长度的最小值.

解：（Ⅰ）设 $M\left(x_1,\frac{1}{8}x_1^2\right),N\left(x_2,\frac{1}{8}x_2^2\right)$

$l_1:y=\frac{x_1}{4}(x-x_1)+\frac{x_1^2}{8}$，令 $y=0$，得 B 点坐标 $B(\frac{x_1}{2},0)$ …………2 分

$k_{AB}\cdot k_{FB}=\frac{2-0}{0-\frac{x_1}{2}}=\frac{x_1}{4}\cdot\left(-\frac{4}{x_1}\right)=-1$，$FB\perp AB$

同理 $FC\perp AC$ …………4 分

经过 A,B,C 三点的圆过焦点 F . …………6 分

（Ⅱ）设直线 $l:y=k(x-1)+2$

联立直线与抛物线 $x^2-8kx+(8k-16)=0$

则 $x_1+x_2=8k$，$x_1x_2=8k-16$ …………8 分

设 $A\left(x,y\right)$，由 $\begin{cases} y=\dfrac{x_1}{4}(x-x_1)+\dfrac{x_1^2}{8} \\ y=\dfrac{x_2}{4}(x-x_2)+\dfrac{x_2^2}{8} \end{cases}$ 得 $\begin{cases} x=\dfrac{x_1+x_2}{2} \\ y=\dfrac{x_1x_2}{8} \end{cases}$，

$\begin{cases} x=4k \\ y=k-2 \end{cases}$，消去 k 得，$x-4y-8=0$ …………10 分

点 A 在定直线 $x-4y-8=0$ 上.

线段 FA 长度的最小值为点 F 到直线 $x-4y-8=0$ 的距离，

线段 FA 长度的最小值为 $\dfrac{16\sqrt{17}}{17}$. …………12 分

21.（本小题满分 12 分）

已知函数 $f(x)=\ln(1+x)-\dfrac{x(1+\lambda x)}{1+x}$.

（Ⅰ）若 $x\geq 0$ 时，$f(x)\leq 0$，求 λ 的取值范围；

（Ⅱ）证明：$\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}+\cdots+\dfrac{1}{2n}<\ln 2<\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}+\cdots+\dfrac{1}{2n}+\dfrac{1}{4n}$. $\left(n\in N_+\right)$

解：（Ⅰ）注意到 $f(0)=0$，$f'(x)=\dfrac{x(1-2\lambda-\lambda x)}{(1+x)^2}$，$x\geq 0$ . . . . 1 分

若 $\lambda\leq 0$，则当 $x\in\left(0,+\infty\right)$ 时，$f'(x)>0$，所以 $f(x)>f\left(0\right)=0$； . . . . 2 分

若 $0<\lambda<\dfrac{1}{2}$，则当 $0<x<\dfrac{1}{\lambda}-2$ 时，$f'(x)>0$，所以 $f(x)>0$； . . . . 4 分

若 $\lambda\geq\dfrac{1}{2}$，则当 $x\geq 0$ 时，$f'(x)\leq 0$，所以 $f(x)\leq f\left(0\right)=0$.

故 λ 的取值范围是 $\left[\dfrac{1}{2},+\infty\right)$ . . . . 6 分

（Ⅱ）由（Ⅰ）知：$\dfrac{x}{1+x}<\ln\left(1+x\right)<\dfrac{x\left(1+\frac{1}{2}x\right)}{1+x}$，$x>0$ . . . . 8 分

令 $x=\dfrac{1}{k}$ 得：

$$\frac{1}{k+1}<\ln\frac{k+1}{k}<\frac{\frac{1}{k}\left(1+\frac{1}{2k}\right)}{1+\frac{1}{k}}=\frac{1}{k+1}+\frac{1}{2k\left(k+1\right)}=\frac{1}{k+1}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)\cdots\cdots\cdots$$

$\cdots\cdots$ 10 分

$$\sum_{k=n}^{2n-1}\frac{1}{k+1}<\sum_{k=n}^{2n-1}\ln\frac{k+1}{k}<\sum_{k=n}^{2n-1}\left(\frac{1}{k+1}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)\right)$$

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}<\ln 2<\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}+\frac{1}{4n}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 12\text{ 分}$$

22.（本小题满分 10 分）[选修 4-4：坐标系与参数方程]

在平面直角坐标系 xOy 中，曲线 C_1 的参数方程为 $\begin{cases}x=2\cos\theta,\\ y=2\sin\theta,\end{cases}$（$\theta$ 为参数），已知点 $Q(4,0)$，

点 P 是曲线 C_1 上任意一点，点 M 为 PQ 的中点，以坐标原点为极点，x 轴正半轴为极轴建立极坐标系.

（Ⅰ）求点 M 的轨迹 C_2 的极坐标方程；

（Ⅱ）已知直线 l： $y=kx$ 与曲线 C_2 交于 A,B 两点，若 $\overrightarrow{OA}=3\overrightarrow{AB}$，求 k 的值.

解：（Ⅰ）设 $P\left(2\cos\theta,2\sin\theta\right)$， $M\left(x,y\right)$. 且点 $Q\left(4,0\right)$，由点 M 为 PQ 的中点，

所以

$$\begin{cases}x=\dfrac{2\cos\theta+4}{2}=2+cos\theta,\\ y=\dfrac{2\sin\theta}{2}=sin\theta,\end{cases}$$

……3 分

整理得 $\left(x-2\right)^2+y^2=1$. 即 $x^2+y^2-4x+3=0$，

化为极坐标方程为

$\rho^2-4\rho\cos\theta+3=0$. ……5 分

（Ⅱ）设直线 l： $y=kx$ 的极坐标方程为 $\theta=\alpha$. 设 $A\left(\rho_1,\alpha\right)$， $B\left(\rho_2,\alpha\right)$，

因为 $\overrightarrow{OA}=3\overrightarrow{AB}$，所以 $4\overrightarrow{OA}=3\overrightarrow{OB}$， 即

$4\rho_1=3\rho_2$. ……6 分

联立$\begin{cases}\rho^2-4\rho cos\theta+3=0,\\ \theta=\alpha,\end{cases}$整理得

$\rho^2-4\cos\alpha\cdot\rho+3=0$. ……7 分

则$\begin{cases}\rho_1+\rho_2=4cos\alpha,\\ \rho_1\rho_2=3,\\ 4\rho_1=3\rho_2,\end{cases}$ 解得

$\cos\alpha=\frac{7}{8}$. ……9 分

所以$k^2=\tan^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha}-1=\frac{15}{49}$，则

$k=\pm\frac{\sqrt{15}}{7}$. ……10 分

23.（本小题满分 10 分）已知$a>0,b>0,c>0$. 若函数$f\left(x\right)=\left|x+a\right|+\left|x-b\right|+c$的最小值为$2$.

（Ⅰ）求$a+b+c$的值；

（Ⅱ）证明：$\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\geq\frac{9}{4}$

解：（Ⅰ）$\because f\left(x\right)=\left|x+a\right|+\left|x-b\right|+c\geq\left|\left(x+a\right)-\left(x-b\right)\right|+c=a+b+c$

当且仅当$-a\leq x\leq b$时, 等号成立, …………3 分

$\therefore$ $f\left(x\right)$的最小值为$a+b+c$, $\therefore a+b+c=2$. …………5 分

（Ⅱ）由（Ⅰ）可知，$a+b+c=2$, 且a,b,c都是正数,

所以$\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}=\frac{1}{4}\left[\left(a+b\right)+\left(b+c\right)+\left(c+a\right)\right]\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\right)\geq\frac{9}{4}$

…………9 分

当且仅当$a=b=c=1$时, 取等号, 所以$\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\geq\frac{9}{4}$得证 …………10 分