

绝密★启用前

2020 届四省名校高三第一次大联考
理数

命题人:张国坤 审题人:花新矿 张海燕 钟慧

本试卷共 4 页,23 题(含选考题)。全卷满分 150 分。考试用时 120 分钟。

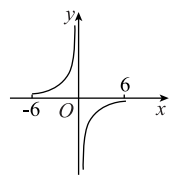
注意事项:

1. 答题前,先将自己的姓名、准考证号填写在试题卷和答题卡上,并将准考证号条形码粘贴在答题卡上的指定位置。
2. 选择题的作答:每小题选出答案后,用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。写在试题卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效。
3. 填空题和解答题的作答:用签字笔直接答在答题卡上对应的答题区域内。写在试题卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效。
4. 选考题的作答:先把所选题目的题号在答题卡上指定的位置用 2B 铅笔涂黑。答案写在答题卡上对应的答题区域内,写在试题卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效。
5. 考试结束后,请将本试题卷和答题卡一并上交。

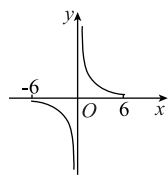
第 I 卷

一、选择题:本题共 12 小题,每小题 5 分,在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

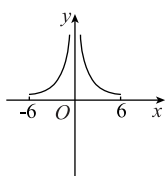
1. 设全集为 $\mathbf{R}$,集合 $A=\{x|\log_2 x < 1\}$, $B=\{x|y=\sqrt{x^2-1}\}$,则 $A \cap (\complement_{\mathbf{R}} B) =$
A. $\{x|0 < x < 2\}$ B. $\{x|0 < x < 1\}$ C. $\{x|-1 < x < 1\}$ D. $\{x|-1 < x < 2\}$
2. 若 $(z-i)(1-i)=2$,则 $z =$
A. $-1+2i$ B. $-1-2i$ C. $1-2i$ D. $1+2i$
3. 已知数列 $\{a_n\}$ 各项都是正数,且满足 $a_{n+2}a_n = a_{n+1}^2 (n \in \mathbf{N}^*)$, $a_5 = 16$, $a_7 = 64$,则数列 $\{a_n\}$ 的前 3 项的和等于
A. 7 B. 15 C. 31 D. 63
4. 古希腊数学家希波克拉底研究过这样一个几何图形(如图):分别以等腰直角三角形 ABC 的三边为直径作半圆,则在整个图形内任意取一点,该点落在阴影部分的概率为
A. $\frac{\pi-2}{\pi}$ B. $\frac{\pi-2}{\pi+2}$ C. $\frac{2}{\pi+2}$ D. $\frac{\pi}{\pi+2}$
5. $(1-x+2x^2)(1+x)^4$ 的展开式中含 x^3 的项的系数为
A. -8 B. -6 C. 8 D. 6
6. 已知函数 $f(x) = e^x \ln x - e^x + a \ln x$ 的图象在点 $T(1, f(1))$ 处的切线经过坐标原点,则 $a =$
A. $-e$ B. e C. $-e - e^{-1}$ D. e^{-1}
7. 函数 $f(x) = \frac{2}{2^x - 2^{-x}} (0 < |x| \leq 6)$ 的图象大致形状为



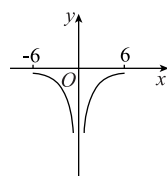
A.



B.



C.



D.

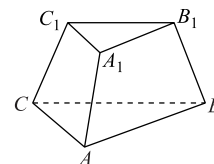


查成绩



看名师讲解

8. 如图,几何体 $A_1B_1C_1-ABC$ 是一个三棱台,在 A_1, B_1, C_1, A, B, C 6 个顶点中取 3 个点确定平面 α , $\alpha \cap$ 平面 $A_1B_1C_1 = m$,且 $m \parallel AB$,则所取的这 3 个点可以是

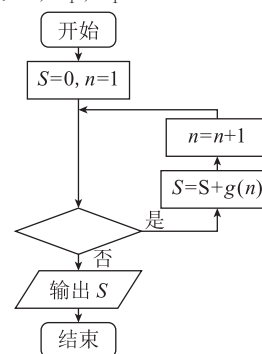


- A. A, B_1, C B. A_1, B, C_1 C. A, B, C_1 D. A, B_1, C_1

9. 某程序框图如图所示,其中 $g(n) = \frac{1}{n^2+n}$,若输出的 $S = \frac{2019}{2020}$,则判断

框内可以填入的条件为

- A. $n < 2020?$
B. $n \leq 2020?$
C. $n > 2020?$
D. $n \geq 2020?$



10. 双曲线 $C: x^2 - y^2 = 4$ 的右焦点为 F ,点 P 在 C 的一条渐近线上, O 为坐标原点,若 $|PO| = |PF|$,则 $\triangle PFO$ 的外接圆方程是

- A. $x^2 + y^2 - 2\sqrt{2}x = 0$
B. $x^2 + y^2 + \sqrt{2}x = 0$
C. $x^2 + y^2 - \sqrt{2}x + \sqrt{2}y = 0$
D. $x^2 + y^2 - 2\sqrt{2}x - 2\sqrt{2}y = 0$

11. 已知函数 $f(x) = 3^x + 3^{-x} + \log_3(3^{|x|} - 1)$,则

- A. $f(\log_5 \frac{1}{4}) > f(-\sqrt[3]{3}) > f(\sqrt{2})$ B. $f(-\sqrt[3]{3}) > f(\log_5 \frac{1}{4}) > f(\sqrt{2})$
C. $f(\sqrt[3]{3}) > f(-\sqrt{2}) > f(\log_5 \frac{1}{4})$ D. $f(\sqrt{2}) > f(\sqrt[3]{3}) > f(\log_5 \frac{1}{4})$

12. 已知函数 $f(x) = \cos(\omega x - \frac{2\pi}{3}) (\omega > 0)$, $x_1, x_2, x_3 \in [0, \pi]$,且 $\forall x \in [0, \pi]$ 都有 $f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$,满足 $f(x_3) = 0$ 的实数 x_3 有且只有 3 个,给出下述四个结论:

- ① 满足题目条件的实数 x_1 有且只有 1 个; ② 满足题目条件的实数 x_2 有且只有 1 个;
③ $f(x)$ 在 $(0, \frac{\pi}{10})$ 上单调递增; ④ ω 的取值范围是 $[\frac{13}{6}, \frac{19}{6})$.

其中所有正确结论的编号是

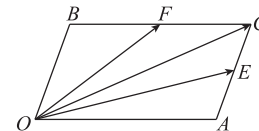
- A. ①④ B. ②③ C. ①②③ D. ①③④

第 II 卷

本卷包括必考题和选考题两部分。第 13~21 题为必考题,每个试题考生都必须作答。第 22~23 题为选考题,考生根据要求作答。

二、填空题:本题共 4 小题,每小题 5 分。

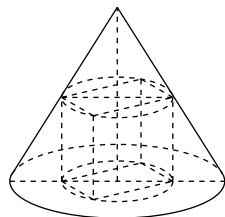
13. 如图,在平行四边形 $OACB$ 中, E, F 分别为 AC 和 BC 上的点,且 $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{EC}$, $\overrightarrow{BF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$. 若

 $\overrightarrow{OC} = m\overrightarrow{OE} + n\overrightarrow{OF}$,其中 $m, n \in \mathbf{R}$,则 $m+n$ 的值为_____.

14. 记 S_n 为等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, $a_1 \neq 0$, $3a_5 = 5a_3$,则 $\frac{S_{2020}}{S_{2019}} =$ _____.

15. 设 F_1, F_2 为椭圆 $C: \frac{x^2}{3} + y^2 = 1$ 的两个焦点, M 为 C 上一点且在第一象限. 若 $\triangle MF_1F_2$ 为直角三角形,则 M 的坐标为_____.

16. 学生到工厂劳动实践,利用 3D 打印技术制作模型.如图,该模型为在圆锥底部挖去一个正方体后的剩余部分(正方体四个顶点在圆锥母线上,四个顶点在圆锥底面上),圆锥底面直径为 $10\sqrt{2}$ cm,高为 10 cm.打印所用原料密度为 0.9 g/cm^3 ,不考虑打印损耗,制作该模型所需原料的质量为_____g. (π 取 3.14)

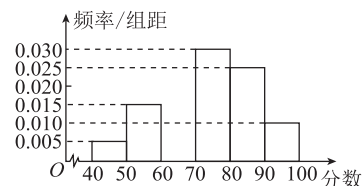


三、解答题:解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (本小题满分 12 分)

某城市在进行创建文明城市的活动中,为了解居民对“创文”的满意程度,组织居民给活动打分(分数为整数,满分为 100 分),从中随机抽取一个容量为 120 的样本,发现所有数据均在 $[40, 100]$ 内.现将这些分数分成以下 6 组并画出了样本的频率分布直方图,但不小心污损了部分图形,如图所示.观察图形,回答下列问题:

- (1) 算出第三组 $[60, 70)$ 的频数,并补全频率分布直方图;
- (2) 请根据频率分布直方图,估计样本的众数、中位数和平均数.(每组数据以区间的中点值为代表)



18. (本小题满分 12 分)

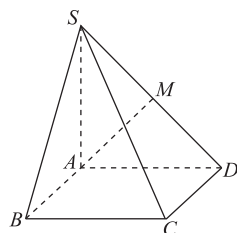
$\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 已知 $\tan \frac{A}{2} \left(a \sin \frac{C}{2} + 2b \cos \frac{A}{2} \right) = a \cos \frac{C}{2}$.

- (1) 求 B ;
- (2) 若 $b=6$, 求 $\triangle ABC$ 面积的取值范围.

19. (本小题满分 12 分)

如图,在四棱锥 $S-ABCD$ 中, $SA \perp$ 底面 $ABCD$, $ABCD$ 是边长为 1 的正方形,且 $SA=1$, 点 M 是 SD 的中点.

- (1) 求证: $SC \perp AM$;
- (2) 求平面 SAB 与平面 SCD 所成锐二面角的大小.



20. (本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x) = 2x^3 - ax^2 + b$.

- (1) 若 $f(x)$ 在 $[-1, 1]$ 是单调函数, 求 a 的值;
- (2) 若对 $x \in [0, 1]$, $f(x) \leq 1$ 恒成立, 求 $f\left(\frac{1}{2}\right)$ 的取值范围.

21. (本小题满分 12 分)

已知曲线 $C: y = \frac{x^2}{2}$ 的焦点是 F , A, B 是曲线 C 上不同两点, 且存在实数 λ 使得 $\overrightarrow{AF} = \lambda \overrightarrow{FB}$,

曲线 C 在点 A, B 处的两条切线相交于点 D .

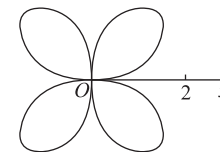
- (1) 求点 D 的轨迹方程;
- (2) 点 E 在 y 轴上, 以 EF 为直径的圆与 AB 的另一交点恰好是 AB 的中点, 当 $\lambda=2$ 时, 求四边形 $ADBE$ 的面积.

请考生在第 22、23 题中任选一题作答, 如果多做, 则按所做的第一题计分。

22. (本小题满分 10 分) 选修 4-4: 坐标系与参数方程

在极坐标系下, 方程 $\rho = 2 \sin 2\theta$ 的图形为如图所示的“幸运四叶草”, 又称为玫瑰线.

- (1) 当玫瑰线的 $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 时, 求以极点为圆心的单位圆与玫瑰线的交点的极坐标;
- (2) 求曲线 $\rho = \frac{2\sqrt{2}}{\sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right)}$ 上的点 M 与玫瑰线上的点 N 距离的最小值及取得最小值时的点 M, N 的极坐标(不必写详细解题过程).



23. (本小题满分 10 分) 选修 4-5: 不等式选讲

若关于 x 的不等式 $|x+m| \leq n$ 的解集为 $[-6, 2]$.

- (1) 求实数 m, n 的值;
- (2) 若实数 y, z 满足 $|my+z| < \frac{1}{3}$, $|y-nz| < \frac{1}{3}$, 求证: $|z| < \frac{1}{9}$.