

2020 届四省名校高三第一次大联考

文数参考答案及评分细则

一、选择题

1. C 【解析】由 $\log_2 x < 1$, 得 $0 < x < 2$, 由 $x^2 \geq 1$, 得 $x \leq -1$ 或 $x \geq 1$, 所以 $\complement_{\mathbb{R}} B = \{x | -1 < x < 1\}$, 所以 $A \cap (\complement_{\mathbb{R}} B) = \{x | 0 < x < 1\}$. 故选 C.

2. B 【解析】由题得, $z = \frac{1-i}{(1+i)^2} = \frac{1-i}{2i} = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$, 所以 $\bar{z} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$, 它在复平面内所对应的点在第 二象限. 故选 B.

3. D 【解析】将“支付宝”小组,“网购”小组,“高铁”小组,“共享单车”小组分别记为 A_1, A_2, B_1, B_2 , 则四个小组随机排序的所有情况有: $(A_1, A_2, B_1, B_2), (A_1, A_2, B_2, B_1), (A_2, A_1, B_1, B_2), (A_2, A_1, B_2, B_1), (A_1, B_1, A_2, B_2), (A_1, B_2, A_2, B_1), (A_2, B_1, A_1, B_2), (A_2, B_2, A_1, B_1), (B_1, A_1, A_2, B_2), (B_1, A_2, A_1, B_2), (B_2, A_1, A_2, B_1), (B_2, A_2, A_1, B_1), (A_1, B_1, B_2, A_2), (A_1, B_2, B_1, A_2), (A_2, B_1, B_2, A_1), (A_2, B_2, B_1, A_1), (B_1, B_2, A_1, A_2), (B_1, B_2, A_2, A_1), (B_2, B_1, A_1, A_2), (B_2, B_1, A_2, A_1), (B_1, A_1, B_2, A_2), (B_1, A_2, B_2, A_1), (B_2, A_1, B_1, A_2), (B_2, A_2, B_1, A_1)$, 共 24 种, 其中“支付宝”小组与“网购”小组不相邻的有 12 种, 所以所求概率为 $\frac{1}{2}$. 故选 D.

4. A 【解析】由题意可知, 数列 $\{a_n\}$ 为等差数列, 故设数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d , 则 $a_7 - a_5 = 4 = 2d$, $\therefore a_{2020} - a_{2019} = d = 2$. 故选 A.

5. B 【解析】命题①中 α 与 β 还有可能平行或相交; 命题②中 α 与 β 还有可能相交; 命题④中 α 与 β 还有可能相交; $\because a \parallel b, a \perp \alpha, \therefore b \perp \alpha$, 又 $b \perp \beta, \therefore \alpha \parallel \beta$, 故命题③正确. 故选 B.

6. D 【解析】回归直线必过样本数据中心点, 但样本点可能全部不在回归直线上, 故 A 错误; 所有样本点都在回归直线 $\hat{y} = \hat{b}x + \hat{a}$ 上, 则变量间的相关系数为 ± 1 , 故 B 错误; 若所有的样本点都在回归直线 $\hat{y} = \hat{b}x + \hat{a}$ 上, 则 $\hat{b}x_i + \hat{a}$ 的值与 y_i 相等, 故 C 错误; 相关系数 r 与 $\hat{b}$ 符号相同, 若回归直线 $\hat{y} = \hat{b}x + \hat{a}$ 的斜率 $\hat{b} > 0$, 则 $r > 0$, 样本点分布应从左到右是上升的, 则变量 x 与 y 正相关, 故 D 正确. 故选 D.

7. C 【解析】 $\because$ 抛物线 $y^2 = 2px$ 的准线方程为 $x =$

$-\frac{p}{2}$, 垂直于 x 轴, 而圆 $x^2 + y^2 + 4x = 0$ 垂直于 x 轴的一条切线为 $x = -4$, 则 $\frac{p}{2} = 4$, 即 $p = 8$. 故抛物线的方程为 $y^2 = 16x$. 故选 C.

8. A 【解析】由 $S = \frac{1}{1^2+1} + \frac{1}{2^2+2} + \dots + \frac{1}{n^2+n} = \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1} = \frac{2019}{2020}$, 解得 $n = 2019$, 所以当 n 的值为 2019 时, 满足判断框内的条件; 当 n 的值为 2020 时, 不满足判断框内的条件, 退出循环, 输出 S 的值. 故结合选项, 判断框内应填入的条件为 $n < 2020$. 故选 A.

9. A 【解析】当平面 ABP 与平面 ABC 垂直时, 四面体 $ABCP$ 的体积最大, 由 $AC = BC = \sqrt{2}$, $AB = 2$, 得 $\angle ACB = 90^\circ$. 设点 P 到平面 ABC 的距离为 h , 则 $\frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times \sqrt{2} \times \sqrt{2} \times h = \frac{2}{3}$, 解得 $h = 2$. 设四面体 $ABCP$ 外接球的半径为 R , 则 $R^2 = (2-R)^2 + 1^2$, 解得 $R = \frac{5}{4}$. 所以球 O 的表面积为 $4\pi \times \left(\frac{5}{4}\right)^2 = \frac{25}{4}\pi$. 故选 A.

10. B 【解析】由题得, $2^{1.2} > 2 > \left(\frac{1}{2}\right)^{-0.8} = 2^{0.8} > 1 > \ln 2$, 又由 $(x_1 - x_2)(f(x_1) - f(x_2)) > 0$, 可知函数 $f(x)$ 为单调递增函数, 故 $a > b > c$. 故选 B.

11. B 【解析】双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的渐近线方程为 $y = \pm \frac{b}{a}x$, 由对称性, 不妨取 $y = \frac{b}{a}x$, 即 $bx - ay = 0$. 又曲线 $x^2 + y^2 - 4x + 2 = 0$ 化为 $(x-2)^2 + y^2 = 2$, 则其圆心的坐标为 $(2, 0)$, 半径为 $\sqrt{2}$. 由题得, 圆心到直线的距离 $d = \frac{\sqrt{(\sqrt{2})^2 - 1^2}}{1} = 1$, 又由点到直线的距离公式, 可得 $\frac{|2b-0|}{\sqrt{b^2+a^2}} = d = 1$, 解得

$$\frac{b^2}{a^2} = \frac{1}{3}, \text{ 所以 } e = \sqrt{\frac{c^2}{a^2}} = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{a^2}} = \sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}} =$$

$\frac{2\sqrt{3}}{3}$. 故选 B.

12. C 【解析】把 $F_n = 2^{2^n} + 1$ 代入 $a_n = \log_2(F_n - 1)$,

得 $a_n = \log_2(2^{2^n} + 1 - 1) = 2^n$, 故 $S_n = \frac{2(1-2^n)}{1-2} =$

$2(2^n - 1)$, 则 $\frac{2^n}{S_n S_{n+1}} = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2^n - 1} - \frac{1}{2^{n+1} - 1} \right)$, 则不

等式 $\frac{2}{S_1 S_2} + \frac{2^2}{S_2 S_3} + \cdots + \frac{2^n}{S_n S_{n+1}} = \frac{1}{4} \left(1 - \frac{1}{2^{n+1} - 1} \right)$

$< \frac{2^n}{2020}$ 成立, 代入计算可得, 当不等式成立时, n 的

最小值为 9. 故选 C.

二、填空题

13. $\sqrt{5}$ 【解析】设 $z = 2x + y$, 变形为 $y = -2x + z$, 可知当直线 $y = -2x + z$ 与圆 $x^2 + y^2 = 1$ 在第一象限相切时, 直线在 y 轴上的截距最大, 即 z 最大, 此时 $\frac{|z|}{\sqrt{5}}$

$= 1$, 即 $z = \sqrt{5}$, 所以 $2x + y$ 的最大值是 $\sqrt{5}$.

14. $\frac{4}{3}$ 【解析】因为 $\overrightarrow{OF} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BF} = \overrightarrow{OB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OE}$

$= \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OB}$, 所以 $\overrightarrow{OA} = \frac{4}{3}\overrightarrow{OE} -$

$\frac{2}{3}\overrightarrow{OF}, \overrightarrow{OB} = \frac{4}{3}\overrightarrow{OF} - \frac{2}{3}\overrightarrow{OE}$, 又 $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} =$

$\frac{4}{3}\overrightarrow{OE} - \frac{2}{3}\overrightarrow{OF} + \frac{4}{3}\overrightarrow{OF} - \frac{2}{3}\overrightarrow{OE} = \frac{2}{3}\overrightarrow{OE} + \frac{2}{3}\overrightarrow{OF}$, 所

以 $m = n = \frac{2}{3}$, 故 $m + n = \frac{4}{3}$.

15. 0 【解析】因为 $f(x)$ 满足 $f(2-x) = -2 - f(x)$, 所以 $y = f(x)$ 的图象关于点 $(1, -1)$ 对称, 而 $y = \frac{2-x}{x-1} - 1$ 的图象也关于点 $(1, -1)$ 对称, 所以所有交点也关于点 $(1, -1)$ 对称, 从而所有交点的横坐标之和等于 m , 所有交点的纵坐标之和等于 $-m$. 故所有交点的横、纵坐标之和等于 0.

16. 4 【解析】因为 $a > b > c > 0$, 由不等式 $\frac{1}{a-b} + \frac{1}{b-c}$

$+ \frac{k}{c-a} \geq 0$, 可得 $k \leq \frac{a-c}{a-b} + \frac{a-c}{b-c} = \frac{a-b+b-c}{a-b} +$

$\frac{a-b+b-c}{b-c} = 1 + \frac{b-c}{a-b} + 1 + \frac{a-b}{b-c}$, 而 $\frac{b-c}{a-b} + \frac{a-b}{b-c} \geq 2$

(当且仅当 $b-c = a-b$ 时取等号), 所以 k 的最大值是 4.

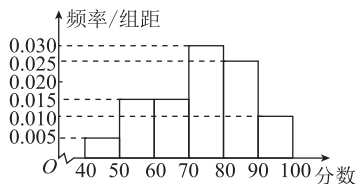
三、解答题

17. 解: (1) 因为各组的频率之和等于 1, 所以分数在 $[60, 70)$ 内的频率为:

$$f = 1 - 10 \times (0.005 + 0.015 + 0.030 + 0.025 + 0.010) = 0.15, \quad (3 \text{ 分})$$

所以第三组 $[60, 70)$ 的频数为 $120 \times 0.15 = 18$ (人). (4 分)

完整的频率分布直方图如图所示:



(6 分)

(2) 因为众数的估计值是频率分布直方图中最高矩形的中点,

所以从图中可看出众数的估计值为 75 分. (8 分)

又根据频率分布直方图, 知样本的平均数的估计值为 $45 \times (10 \times 0.005) + 55 \times (10 \times 0.015) + 65 \times (10 \times 0.015) + 75 \times (10 \times 0.030) + 85 \times (10 \times 0.025) + 95 \times (10 \times 0.010) = 73.5$ (分). (11 分)

所以, 样本的众数为 75 分, 平均数为 73.5 分.

(12 分)

18. 解: (1) 在 $\triangle ABC$ 中, 由正弦定理及 $\sin B + \sin C = 2\sin A$, 得 $b + c = 2a$,

又因为 $3b = 4a$,

所以 $b = \frac{4}{3}a, c = \frac{2}{3}a$. (3 分)

由余弦定理, 可得 $\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$

$$= \frac{a^2 + \frac{4}{9}a^2 - \frac{16}{9}a^2}{2 \cdot a \cdot \frac{2}{3}a} = -\frac{1}{4}. \quad (6 \text{ 分})$$

(2) 由 (1) 可得, $\sin B = \sqrt{1 - \cos^2 B} = \frac{\sqrt{15}}{4}$, (7 分)

从而 $\sin 2B = 2\sin B \cos B = -\frac{\sqrt{15}}{8}$,

$\cos 2B = \cos^2 B - \sin^2 B = -\frac{7}{8}$, (9 分)

故 $f(B) = \sin\left(2B + \frac{\pi}{6}\right) = \sin 2B \cos \frac{\pi}{6} +$

$$\cos 2B \sin \frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{15}}{8} \times \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{7}{8} \times \frac{1}{2} = -\frac{3\sqrt{5} + 7}{16}.$$

(12 分)

19. 解: (1) 由四棱锥 $S-ABCD$ 的三视图, 可知底面 $ABCD$ 是正方形, $SA \perp$ 底面 $ABCD$, $SA = AD = 1$,

(1 分)

又 $CD \subset \text{平面 } ABCD, \therefore SA \perp CD.$

$\because CD \perp AD, AD \cap SA = A,$

$\therefore CD \perp \text{平面 } SAD.$

$\because AM \subset \text{平面 } SAD,$

$\therefore CD \perp AM,$

又 $SA = AD = 1, M$ 是 SD 的中点,

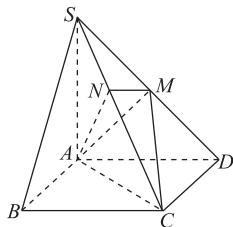
$\therefore AM \perp SD.$

$\because SD \cap CD = D,$

$\therefore AM \perp \text{平面 } SCD.$

$\because SC \subset \text{平面 } SDC,$

$\therefore SC \perp AM.$



(2) $\because M$ 是 SD 的中点,

$\therefore V_{S-ACM} = V_{D-ACM} = V_{M-ADC},$

$\therefore V_{S-ACM} = \frac{1}{3} S_{\triangle ACD} \times \frac{1}{2} SA = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{12}.$

$\because AN \perp SC, AM \perp SC, AN \cap AM = A,$

$\therefore SC \perp \text{平面 } AMN,$

$\therefore V_{S-ACM} = \frac{1}{3} S_{\triangle AMN} \times SC.$

$\because SC = \sqrt{3},$

$\therefore \triangle AMN$ 的面积 $S_{\triangle AMN} = \frac{3V_{S-ACM}}{SC} = \frac{\sqrt{3}}{12}.$

20. 解: (1) $\because f'(x) = \ln x - ax + a,$

$\therefore g(x) = \ln x - ax + a,$

$\therefore g'(x) = \frac{1}{x} - a = \frac{1-ax}{x} (x > 0),$

① 当 $a \leq 0$ 时, $g'(x) > 0,$

$\therefore$ 函数 $g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增;

② 当 $a > 0$ 时, 若 $x \in (0, \frac{1}{a})$, 则 $g'(x) > 0;$

若 $x \in (\frac{1}{a}, +\infty)$, 则 $g'(x) < 0,$

$\therefore$ 函数 $g(x)$ 在 $(0, \frac{1}{a})$ 上单调递增, 在 $(\frac{1}{a}, +\infty)$

上单调递减.

综上所述, 当 $a \leq 0$ 时, 函数 $g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增,

当 $a > 0$ 时, 函数 $g(x)$ 在 $(0, \frac{1}{a})$ 上单调递增, 在

$(\frac{1}{a}, +\infty)$ 上单调递减.

(2) $\because g(1) = 0, \therefore f'(1) = 0.$

① 由(1)知, 当 $a \leq 0$ 时, $f'(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增,

若 $x \in (0, 1)$, 则 $f'(x) < 0;$

若 $x \in (1, +\infty)$, 则 $f'(x) > 0,$

$\therefore f(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增, 在 $(0, 1)$ 上单调递减,

$\therefore f(x)$ 在 $x=1$ 处取得极小值, 不合题意; (6分)

② 当 $a=1$ 时, $f'(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递增, $f'(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上是单调递减,

$\therefore f'(x) \leq f'(1) = 0,$

$\therefore f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减,

$\therefore f(x)$ 无极值, 不合题意;

③ 当 $0 < a < 1$ 时, $\frac{1}{a} > 1,$

由(1)知, $f'(x)$ 在 $(0, \frac{1}{a})$ 上单调递增,

$\therefore f'(1) = 0,$

$\therefore$ 若 $x \in (0, 1)$, 则 $f'(x) < 0;$

若 $x \in (1, \frac{1}{a})$, 则 $f'(x) > 0,$

$\therefore f(x)$ 在 $(1, \frac{1}{a})$ 上单调递增, 在 $(0, 1)$ 上单调递减,

$\therefore f(x)$ 在 $x=1$ 处取得极小值, 不合题意; (9分)

④ 当 $a > 1$ 时, $0 < \frac{1}{a} < 1,$

由(1)知, $f'(x)$ 在 $(\frac{1}{a}, +\infty)$ 上单调递减,

$\therefore f'(1) = 0,$

$\therefore$ 若 $x \in (\frac{1}{a}, 1)$, 则 $f'(x) > 0;$

若 $x \in (1, +\infty)$, 则 $f'(x) < 0,$

$\therefore f(x)$ 在 $(\frac{1}{a}, 1)$ 上单调递增, 在 $(1, +\infty)$ 上单调递减,

$\therefore f(x)$ 在 $x=1$ 处取得极大值, 符合题意. (11分)

综上所述, a 的取值范围是 $(1, +\infty).$ (12分)

21. 解: (1) 设 $R(x_1, y_1), P(x, y)$, 则 $x_1^2 + y_1^2 = 1,$

又 R 在 x 轴, y 轴上的射影分别为点 $S, T,$

所以 $S(x_1, 0), T(0, y_1).$

由 $\overrightarrow{TS} = \overrightarrow{SP}$, 得 $\begin{cases} x_1 = \frac{x}{2}, \\ y_1 = -y \end{cases}$, 代入 $x_1^2 + y_1^2 = 1$,

$$\text{得 } \frac{x^2}{4} + y^2 = 1,$$

故曲线 C 的方程为 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$. (4 分)

(2) 设 $P(x_0, y_0)$ ($x_0 \neq \pm 2$), 则 $\frac{x_0^2}{4} + y_0^2 = 1$. (5 分)

不妨设直线 AP 的方程为 $y = \frac{y_0}{x_0 + 2}(x + 2)$,

令 $x = 4$, 得点 M 的纵坐标为 $y_M = \frac{6y_0}{x_0 + 2}$; (6 分)

直线 BP 的方程为 $y = \frac{y_0}{x_0 - 2}(x - 2)$,

令 $x = 4$, 得点 N 的纵坐标为 $y_N = \frac{2y_0}{x_0 - 2}$. (7 分)

设曲线 C 在点 P 处的切线方程为 $y - y_0 = k(x - x_0)$,

$$\text{由 } \begin{cases} y = k(x - x_0) + y_0, \\ x^2 + 4y^2 = 4, \end{cases}$$

$$\text{得 } (1 + 4k^2)x^2 + 8k(y_0 - kx_0)x + 4(y_0 - kx_0)^2 - 4 = 0. \quad (8 \text{ 分})$$

$$\text{由 } \Delta = 0, \text{ 得 } 64k^2(y_0 - kx_0)^2 - 16(1 + 4k^2)[(y_0 - kx_0)^2 - 1] = 0,$$

$$\text{整理得 } y_0^2 - 2kx_0y_0 + k^2x_0^2 = 1 + 4k^2.$$

将 $y_0^2 = 1 - \frac{x_0^2}{4}$, $x_0^2 = 4(1 - y_0^2)$ 代入上式并整理,

$$\text{得 } \left(2y_0k + \frac{x_0}{2}\right)^2 = 0,$$

$$\text{解得 } k = -\frac{x_0}{4y_0}, \quad (9 \text{ 分})$$

所以曲线 C 在点 P 处的切线方程为 $y - y_0 = -\frac{x_0}{4y_0} \cdot (x - x_0)$.

$$\text{令 } x = 4, \text{ 得点 } Q \text{ 的纵坐标为 } y_Q = y_0 - \frac{x_0(4 - x_0)}{4y_0} = \frac{4y_0^2 - 4x_0 + x_0^2}{4y_0} = \frac{4(1 - x_0)}{4y_0} = \frac{1 - x_0}{y_0}. \quad (10 \text{ 分})$$

设 $\overrightarrow{MQ} = \lambda \overrightarrow{QN}$, 所以 $y_Q - y_M = \lambda(y_N - y_Q)$,

$$\text{所以 } \frac{1 - x_0}{y_0} - \frac{6y_0}{x_0 + 2} = \lambda \left(\frac{2y_0}{x_0 - 2} - \frac{1 - x_0}{y_0} \right), \quad (11 \text{ 分})$$

$$\begin{aligned} \text{所以 } & \frac{(1 - x_0)(x_0 + 2) - 6y_0^2}{y_0(x_0 + 2)} \\ & = \lambda \frac{2y_0^2 - (1 - x_0)(x_0 - 2)}{y_0(x_0 - 2)}. \end{aligned}$$

将 $y_0^2 = 1 - \frac{x_0^2}{4}$ 代入上式, 得 $-2 + \frac{x_0}{2} = \lambda \left(-2 + \frac{x_0}{2} \right)$,

$$\text{解得 } \lambda = 1, \text{ 即 } \frac{|MQ|}{|NQ|} = 1. \quad (12 \text{ 分})$$

22. 解: (1) 联立以极点为圆心的单位圆 $\rho = 1$ 与 $\rho = 2\sin 2\theta$, 得 $2\sin 2\theta = 1$,

$$\text{所以 } \sin 2\theta = \frac{1}{2},$$

$$\text{又因为 } \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right],$$

$$\text{所以 } \theta = \frac{\pi}{12} \text{ 或 } \frac{5\pi}{12},$$

从而得到以极点为圆心的单位圆与玫瑰线的交点的极坐标为 $\left(1, \frac{\pi}{12}\right), \left(1, \frac{5\pi}{12}\right)$. (5 分)

(2) 曲线 $\rho = \frac{2\sqrt{2}}{\sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right)}$ 的直角坐标方程为 $x + y = 4$.

玫瑰线 $\rho = 2\sin 2\theta$ 极径的最大值为 2, 且可于点

$$N\left(2, \frac{\pi}{4}\right) \text{ 取得,}$$

连接 $O, N\left(2, \frac{\pi}{4}\right)$ 与直线 $x + y = 4$ 垂直且交于点

$$M\left(2\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}\right),$$

所以点 M 与点 N 的距离的最小值为 $2\sqrt{2} - 2$,

(8 分)

此时对应的点 M, N 的极坐标分别为 $\left(2\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}\right)$,

$$\left(2, \frac{\pi}{4}\right). \quad (10 \text{ 分})$$

23. 解: (1) 由 $|x + m| \leq n$, 得 $-n \leq x + m \leq n$,

$$\text{即 } -n - m \leq x \leq n - m,$$

$$\text{则 } \begin{cases} -n - m = -6, \\ n - m = 2, \end{cases}$$

$$\text{解得 } \begin{cases} m = 2, \\ n = 4, \end{cases} \quad (5 \text{ 分})$$

$$(2) \text{ 由 (1) 可知, } |2y + z| < \frac{1}{3}, |y - 4z| < \frac{1}{3},$$

$$\text{又因为 } 9|z| = |(2y + z) - 2(y - 4z)| \leq |2y + z| + 2|y - 4z| < \frac{1}{3} + 2 \times \frac{1}{3} = 1,$$

$$\text{所以 } |z| < \frac{1}{9}. \quad (10 \text{ 分})$$