

绝密★启用前

长郡中学 2020 届高三适应性考试（二）

数学（理科）试卷

本试题卷共 8 页，共 23 题（含选考题）。全卷满分 150 分。考试建议用时 120 分钟。

注意事项：

1. 答题前，考生可能需要输入信息。请务必正确输入所需的信息，如姓名、考生号等。
2. 选择题的作答：请直接在选择页面内作答并提交。写在试题卷、草稿纸等非答题区域均无效。
3. 非选择题的作答：用签字笔直接答在答题卡上对应的答题区域内或空白纸张上，按规定上传。
4. 选考题的作答：先把所选题目的题号在答题卡上指定的位置用笔涂黑，或者在空白纸张上注明所写题目，然后开始作答。

一、选择题：本大题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合 $A = \{x \in \mathbf{Z} | x \geq a\}$ ，集合 $B = \{x \in \mathbf{Z} | 2^x \leq 4\}$ ，若 $A \cap B$ 只有 4 个子集，则 a 的取值范围是
A. $(-2, -1]$ B. $[-2, -1]$ C. $[0, 1]$ D. $(0, 1]$
2. 已知复数 $z_1(1+i) = 3-i$ ，复数 $z_2 = i(1-i)^2$ ，给出下列命题：① $z_1 > z_2$ ；② $|z_1| > |z_2|$ ；
③ 复数 z_1 与其共轭复数在复平面内的点关于实轴对称；④ 复数 z_2 的虚部为 0。
其中真命题的个数为
A. 1 B. 2 C. 3 D. 4
3. 已知某一组散点数据对应的线性回归方程为 $\hat{y} = -0.76x + \hat{a}$ ，数据中心点为 $(5, 1)$ ，则 $x=7.5$ 的预报值是
A. 0.9 B. -0.9 C. 1 D. -1
4. 斐波那契数列（Fibonacci sequence）又称黄金分割数列，因数学家列昂纳多·斐波那契（Leonardoda Fibonacci）以兔子繁殖为例子而引入，故又称为“兔子数列”。在数学上，斐波那契数列被以下递推的方法定义：数列 $\{a_n\}$ 满足： $a_1 = a_2 = 1$ ， $a_{n+2} = a_n + a_{n+1}$ ，
现从数列的前 2024 项中随机抽取 1 项，能被 3 整除的概率是
A. $\frac{1}{4}$ B. $\frac{1}{3}$ C. $\frac{2}{3}$ D. $\frac{1}{2}$
5. 已知 $\left(x + \frac{2}{\sqrt{x}} + 1\right)^5$ 的展开式的常数项为 a ，则 $\int_1^{a-118} (2x-1)dx =$

适应考（二）理数试题一1

- A. 5 B. 6 C. 7 D. 9

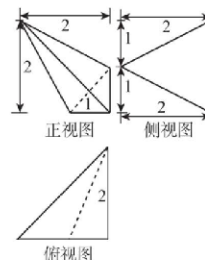
6. 已知 $a > b > 0$, $ab = 1$, 设 $x = \frac{b}{2^a}$, $y = \log_2(a+b)$, $z = a + \frac{1}{b}$, 则 $\log_x 2x$, $\log_y 2y$, $\log_z 2z$

的大小关系为

- A. $\log_x 2x > \log_y 2y > \log_z 2z$ B. $\log_y 2y > \log_z 2z > \log_x 2x$
C. $\log_x 2x > \log_z 2z > \log_y 2y$ D. $\log_y 2y > \log_x 2x > \log_z 2z$

7. 某几何体的三视图如图所示, 则该几何体中, 最长的棱的长度为

- A. $2\sqrt{3}$
B. $2\sqrt{2}$
C. 3
D. $\sqrt{6}$



8. 将函数 $f(x) = \cos x$ 的图象先向右平移 $\frac{5}{6}\pi$ 个单位长度, 再把所得函数图象的横坐标变

为原来的 $\frac{1}{\omega}$ ($\omega > 0$) 倍, 纵坐标不变, 得到函数 $g(x)$ 的图象. 若函数 $g(x)$ 在 $(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$

上没有零点, 则 ω 的取值范围是

- A. $(0, \frac{2}{9}] \cup [\frac{2}{3}, \frac{8}{9}]$ B. $(0, \frac{2}{9}]$
C. $(0, \frac{2}{9}] \cup [\frac{8}{9}, 1]$ D. $(0, 1]$

9. 已知 F_1, F_2 分别为椭圆 $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{8} = 1$ 的左、右焦点, M 是椭圆上一点, 过点 F_2 作 $\angle F_1MF_2$

的角平分线的垂线, 垂足为 N , 若 $|ON| = 2$ (O 为坐标原点), 则 $|OM| =$

- A. $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ C. $\sqrt{3}$ D. $2\sqrt{3}$

10. 已知三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 内接于一个半径为 $\sqrt{3}$ 的球, 四边形 A_1ACC_1 与 B_1BCC_1 均为

正方形, M, N 分别是 A_1B_1, A_1C_1 的中点, $C_1M = \frac{1}{2}A_1B_1$, 则异面直线 BM 与 AN 所成角的余弦值为

- A. $\frac{3}{10}$ B. $\frac{\sqrt{30}}{10}$ C. $\frac{7}{10}$ D. $\frac{\sqrt{70}}{10}$

11. 函数 $f(x) = (x^2 - 3)e^x$, 关于 x 的方程 $f^2(x) - mf'(x) + 1 = 0$ 恰有四个不同实数根,

则实数 m 的取值范围为

- A. $(0, 2)$ B. $(2, +\infty)$

C. $(0, \frac{6}{e^3} + \frac{e^3}{6})$

D. $(\frac{6}{e^3} + \frac{e^3}{6}, +\infty)$

12. 已知函数 $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$ 满足对于任意 $x_1 \in [\frac{1}{2}, 2]$, 存在 $x_2 \in [\frac{1}{2}, 2]$, 使得

$f(x_1^2 + 2x_1 + a) \leq f(\frac{\ln x_2}{x_2})$ 成立, 则实数 a 的取值范围为

A. $[\frac{\ln 2}{2} - 8, +\infty)$

B. $[\frac{\ln 2}{2} - 8, -\frac{5}{4} - 2\ln 2]$

C. $(-\infty, \frac{\ln 2}{2} - 8]$

D. $(-\infty, -\frac{5}{4} - 2\ln 2]$

二、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 已知向量 $\overrightarrow{AC} = (1, \sin \alpha - 1)$, $\overrightarrow{BA} = (3, 1)$, $\overrightarrow{BD} = (2, \cos \alpha)$, 若 B, C, D 三点共线, 则 $\tan(2019\pi - \alpha) = \underline{\hspace{2cm}}$.

14. 已知实数 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} y \leq 2 \\ x + y \geq 1 \\ y \geq 2(x - 2) \end{cases}$, 若 $z = x + ty (t > 0)$ 的最大值为 11, 则实数 $t = \underline{\hspace{2cm}}$.

15. 若存在 m , 使得 $f(x) \geq m$ 对任意 $x \in D$ 恒成立, 则函数 $f(x)$ 在 D 上有下界, 其中 m 为函数 $f(x)$ 的一个下界; 若存在 M , 使得 $f(x) \leq M$ 对任意 $x \in D$ 恒成立, 则函数 $f(x)$ 在 D 上有上界, 其中 M 为函数 $f(x)$ 的一个上界. 如果一个函数既有上界又有下界, 那么称该函数有界. 下列四个结论: ① 1 不是函数 $f(x) = x + \frac{1}{x} (x > 0)$ 的一个下界; ② 函数 $f(x) = x \ln x$ 有下界, 无上界; ③ 函数 $f(x) = \frac{e^x}{x^2}$ 有上界, 无下界; ④ 函数 $f(x) = \frac{\sin x}{x^2 + 1}$ 有界. 其中所有正确结论的编号为 .

16. 圆锥 Ω 的底面半径为 2, 其侧面展开图是圆心角为 180° 的扇形. 圆锥的内接正四棱柱 (底面为正方形的直棱柱) $ABCD - A'B'C'D'$ 的上底面的顶点 A', B', C', D' 均在圆锥 Ω 的侧面上, 棱柱下底面在圆锥 Ω 的底面上, 则此正四棱柱体积的最大值为 .

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (本小题满分 12 分)

已知数列 $\{a_n\}$ 满足: $a_1=1, a_1a_2+a_2a_3+\dots+a_na_{n+1}=\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$.

(I) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(II) 求证: $\frac{1}{a_1a_2}+\frac{1}{a_2a_3}+\dots+\frac{1}{a_na_{n+1}}<1$.

18. (本小题满分 12 分)

已知抛物线 $C: x^2=2py$ ($p>0$) 的焦点为 F , 过点 F 且斜率为 1 的直线与抛物线相交于 M, N 两点. 设直线 l 是抛物线 C 的切线, 且直线 $l \parallel MN$, P 为 l 上一点, 且 $\overrightarrow{PM} \cdot \overrightarrow{PN}$ 的最小值为 -14 .

(I) 求抛物线 C 的方程;

(II) 设 A, B 是抛物线 C 上分别位于 y 轴两侧的两个动点, O 为坐标原点, 且 $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = -4$. 求证: 直线 AB 必过定点, 并求出该定点的坐标.

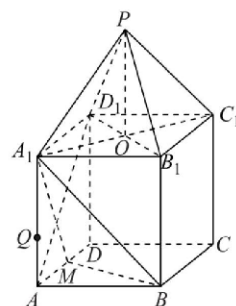
19. (本小题满分 12 分)

四棱锥 $P-A_1B_1C_1D_1$ 与直四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 组合而成的几何体中, 四边形 $ABCD$ 是菱形, $AB=2$, $AA_1=\sqrt{2}$, $PO=\sqrt{2}$, $\angle DAB=60^\circ$, A_1C_1 交 B_1D_1 于 O , $PO \perp$ 平面 $A_1B_1C_1D_1$, M 为 AD 的中点.

(I) 证明: $AD_1 \perp$ 平面 A_1MB ;

(II) 动点 Q 在线段 AA_1 上 (包括端点), 若二面角 $P-BC_1-Q$ 的余弦值为 $\frac{5\sqrt{29}}{29}$, 求

A_1Q 的长度.



20. (本小题满分 12 分)

2019 年 12 月以来, 湖北武汉市发现多起病毒性肺炎病例, 并迅速在全国范围内开始传播, 专家组认为, 本次病毒性肺炎病例的病原体初步判定为新型冠状病毒, 该病毒存在人与人之间的传染, 可以通过与患者的密切接触进行传染。我们把与患者有过密切接触的人群称为密切接触者, 每位密切接触者被感染后即被称为患者。已知每位密切接触者在接触一个患者后被感染的概率为 P ($0 < p < 1$), 某位患者在隔离之前, 每天有 a 位密切接触者, 其中被感染的人数为 X ($0 \leq X \leq a$), 假设每位密切接触者不再接触其他患者。

(I) 求一天内被感染人数为 X 的概率 $P(X)$ 与 a 、 p 的关系式和 X 的数学期望;

(II) 该病毒在进入人体后有 14 天的潜伏期, 在这 14 天的潜伏期内患者无任何症状, 为病毒传播的最佳时间, 设每位患者在被感染后的第二天又有 2 位密切接触者, 从某一名患者被感染, 按第 1 天算起, 第 n 天新增患者的数学期望记为 E_n ($n \geq 2$).

(i) 求数列 $\{E_n\}$ 的通项公式, 并证明数列 $\{E_n\}$ 为等比数列;

(ii) 若戴口罩能降低每位密切接触者患病概率, 降低后的患病概率 $p' = \ln(1+p)$

$-\frac{2}{3}p$. 当 p 取最大值时, 计算此时 p' 所对应的 E_6' 值和此时 p 对应的 E_6 值,

根据计算结果说明戴口罩的必要性。(取 $a=10$)

(结果保留整数, 参考数据: $\ln 5 \approx 1.6$, $\ln 3 \approx 1.1$, $\ln 2 \approx 0.7$)

21. (本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x) = e^{2x} - a$, $g(x) = e^x - b$. 且 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的图像有一个斜率为 1 的公切线 (e 为自然对数的底数).

(I) 求 $b - a$;

(II) 设函数 $h(x) = f(x) - g(x) - mx + \frac{\ln 2}{2} - \frac{1}{2}$, 讨论函数 $h(x)$ 的零点个数.

请考生在第 22、23 题中任选一题作答，如果多做，则按所做的第一题计分。作答时用 2B 铅笔在答题卡上把所选题号涂黑。

22. (本小题满分 10 分) 选修 4-4: 坐标系与参数方程

在平面直角坐标系 xOy 中，曲线 C_1 的参数方程为
$$\begin{cases} x = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}t \\ y = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}t \end{cases} \quad (t \text{ 为参数})$$
，以坐标原

点为极点， x 轴正半轴为极轴建立极坐标系，已知点 A, B, C 的极坐标分别为 $(4, \frac{\pi}{6})$, $(4, \frac{5\pi}{6})$, $(4, \frac{3\pi}{2})$ ，且 $\triangle ABC$ 的顶点都在圆 C_2 上，将圆 C_2 向右平移 3 个单位长度后，得到曲线 C_3 。

(I) 求曲线 C_3 的直角坐标方程；

(II) 设 $M(1, 1)$ ，曲线 C_1 与 C_3 相交于 P, Q 两点，求 $|MP| \cdot |MQ|$ 的值。

23. (本小题满分 10 分) 选修 4-5: 不等式选讲

已知函数 $f(x) = |3x - 1| + |x - 2|$ 。

(I) 求不等式 $f(x) \geq 3$ 的解集；

(II) 若 $m > 1, n > 1$ ，对 $\forall x \in \mathbf{R}$ ，不等式 $3\log_2 m \cdot \log_2 n \geq \frac{5}{f(x)}$ 恒成立，求 mn 的最小值。