绝密★启用前

长郡中学2020届高三适应性考试（二）

数学（理科）试卷参考答案

一、选择题：本大题共12小题，每小题5分，共60分。

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	D	C	B	A	B	B	C	A	D	B	D	C

二、填空题：本大题共4小题，每小题5分，共20分。

13．－2　　14．4　　15．②④　　16．$\dfrac{64\sqrt{3}}{27}$

三、解答题：共70分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17．解：（Ⅰ）由 $a_1a_2+a_2a_3+\ldots+a_na_{n+1}=\dfrac{1}{3}n(n+1)(n+2)(*)$ 得：

$a_1a_2+a_2a_3+\ldots+a_{n-1}a_n=\dfrac{1}{3}(n-1)n(n+1)(*)$，

两式相减得 $a_na_{n+1}=n(n+1)(n\geq 2)$．……………………………………（3分）

当 n＝1时，a_1a_2＝2满足此式，

故对 $n\in\mathbf{N}^*$，有 $a_na_{n+1}=n(n+1)$，化为：$\dfrac{a_n}{n}\cdot\dfrac{a_{n+1}}{n+1}=1$．

令 $b_n=\dfrac{a_n}{n}$，则 b_1＝1，

且 $b_nb_{n+1}=1$ 与 $b_{n-1}b_n=1$ 相减得：$b_n(b_{n+1}-b_{n-1})=0,b_n\neq 0$，

故 $b_{n+1}=b_{n-1}$．即 $b_{2k-1}=b_{2k-3}=\ldots=b_1=1$，

故 n 为奇数时，$b_n=1\Rightarrow a_n=n$．又 $b_2=1$，

故 $b_{2k}=b_{2k-2}=\ldots=b_2=1$，

故 n 为偶数时，$b_n=1\Rightarrow a_n=n$，故 $a_n=n$．……………………………（8分）

（Ⅱ）

$$\frac{1}{a_1a_2}+\frac{1}{a_2a_3}+\ldots+\frac{1}{a_na_{n+1}}=\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\ldots+\frac{1}{n\times(n+1)}$$

$$=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$$ ．…………（12分）

$$=1-\frac{1}{n+1}<1$$

18．解：（Ⅰ）依题意，直线 MN 的方程为 $y=x+\dfrac{p}{2}$．

设 $M\left(x_1,y_2\right),N\left(x_2,y_2\right)$，

将直线 MN 的方程代入 $x^2=2py$ 中，得 $x^2-2px-p^2=0$，

因此 $x_1+x_2=2p,x_1x_2=-p^2$．……………………………………………（1 分）

设直线 l 和抛物线 C 相切于点 $T\left(t,\dfrac{t^2}{2p}\right)$，

由题意和切线的几何意义知，曲线 C 在 T 处的切线斜率即导数为 1，
因此得 $t=p$，

$\therefore$切点 T 的坐标为$\left(p,\dfrac{p}{2}\right)$，因此切线 l 的方程为 $y=x-\dfrac{p}{2}$．………（2 分）

设 $P\left(x_0,x_0-\dfrac{p}{2}\right)$，

$$\overrightarrow{PM}\cdot\overrightarrow{PN}=\left(x_1-x_0,y_1-x_0+\frac{p}{2}\right)\cdot\left(x_2-x_0,y_2-x_0+\frac{p}{2}\right)$$

于是 $$=\left(x_1-x_0,x_1-x_0+p\right)\cdot\left(x_2-x_0,x_2-x_0+p\right)$$ （3 分）

$$=2x_0^2-2x_0\left(x_1+x_2\right)+2x_1x_2+\left(x_1+x_2\right)p-2px_0+p^2$$

将 $x_1+x_2=2p,x_1x_2=-p^2$ 代入其中，

可得 $\overrightarrow{PM}\cdot\overrightarrow{PN}=2x_0^2-6px_0+p^2=2\left(x_0-\dfrac{3p}{2}\right)^2-\dfrac{7}{2}p^2$．……………（5 分）

当 $x_0=\dfrac{3}{2}p$ 时，$\overrightarrow{PM}\cdot\overrightarrow{PN}$ 取得最小值$-\dfrac{7}{2}p^2$，

由$-\dfrac{7}{2}p^2=-14$，

可解得正数 p 值为 2，

因此所求的抛物线方程为 $x^2=4y$．………………………………………（6 分）

（Ⅱ）显然，直线 AB 的斜率一定存在，

设 AB 的方程为 $y=kx+b,A\left(x_3,y_3\right),B\left(x_4,y_4\right)$，

则 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=x_3x_4+y_3y_4=-4$，

故 $x_3x_4+\left(kx_3+b\right)\left(kx_4+b\right)=-4$，

也即 $\left(k^2+1\right)x_3x_4+kb\left(x_3+x_4\right)+b^2+4=0$．①………………………（8 分）

将 $y=kx+b$ 带入抛物线 C 中，得 $x^2-4kx-4b=0$，

故 $x_3+x_4=4k, x_3x_4=-4b$. ……………………………………………（10 分）

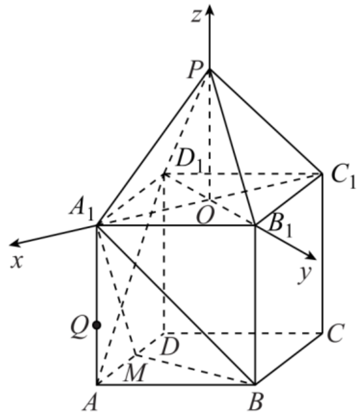
将它们代入到①中，得 $\left(k^2+1\right)\left(-4b\right)+kb\cdot 4k+b^2+4=0$，………（11 分）

解得 b＝2，因此直线 AB 恒过点（0，2）. …………………………（12 分）

19．解：（Ⅰ）矩形 ADD_1A_1 中，$\tan\angle D_1AA_1=\dfrac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$，$\tan\angle A_1MA=\dfrac{\sqrt{2}}{1}=\sqrt{2}$，

∴$\angle D_1AA_1=\angle A_1MA$，
∴$A_1M\perp AD_1$.
∵四边形 $ABCD$ 是菱形，且$\angle DAB=60°$，
∴$AD=BD$，
∴$\triangle ABD$ 为正三角形.
∵M 为 AD 的中点，∴$BM\perp AD$，
∴$BM\perp$平面 ADD_1A_1，∴$BM\perp AD_1$，
∵$A_1M\cap BM=M$，
∴$AD_1\perp$平面 A_1MB. ……………………………………………………（5 分）

（Ⅱ）以 O 为原点，$\overrightarrow{OA_1},\overrightarrow{OB_1},\overrightarrow{OP}$ 方向分别为 x 轴，y 轴，z 轴正方向建立如图所示的空间直角坐标系，



则 $P\left(0,0,\sqrt{2}\right),B\left(0,1,-\sqrt{2}\right),C_1\left(-\sqrt{3},0,0\right)$.

设 $Q\left(\sqrt{3},0,\lambda\right)$，则 $\begin{aligned}&\overrightarrow{PC_1}=\left(-\sqrt{3},0,-\sqrt{2}\right),\overrightarrow{BC_1}=\left(-\sqrt{3},-1,\sqrt{2}\right),\\&\overrightarrow{C_1Q}=\left(2\sqrt{3},0,\lambda\right)\end{aligned}$

平面 PBC_1 的一个法向量为 $\boldsymbol{m}=\left(a,b,c\right)$，

则 $\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{PC_1}=0\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{BC_1}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-\sqrt{3}a-\sqrt{2}c=0\\ -\sqrt{3}a-b+\sqrt{2}c=0\end{cases}$，

取 $c=\sqrt{3}$，则 $\boldsymbol{m}=\left(-\sqrt{2},2\sqrt{6},\sqrt{3}\right)$.

同理求得平面 BC_1Q 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=\left(\lambda,-\sqrt{3}\lambda-2\sqrt{6},-2\sqrt{3}\right)$. …（9 分）

$$\left|\cos\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle\right|=\frac{|\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{m}||\boldsymbol{n}|}\Rightarrow\frac{5\sqrt{29}}{29}$$

∴

$$=\left|\frac{-\sqrt{2}\lambda-6\sqrt{2}\lambda-24-6}{\sqrt{29}\cdot\sqrt{\lambda^2+\left(\sqrt{3}\lambda+2\sqrt{6}\right)^2+12}}\right|\Rightarrow\lambda\left(\lambda-60\sqrt{2}\right)=0$$

由 $\lambda\in\left[-\sqrt{2},0\right]$，得 $\lambda=0$. 故 Q 与 A_1 重合，A_1Q＝0. ……………（12 分）

20．解：（Ⅰ）由题意，$X\sim B(a、p)$

则 $P(X)=C_a^X p^X(1-p)^{a-X}$，$EX=ap$. ………………………………（4 分）

（Ⅱ）（i）第 n 天被感染人数为 $(1+ap)^{n-1}$，第 n－1 天被感染人数为 $(1+ap)^{n-2}$.

由题目中均值的定义可知，

$E_n=(1+ap)^{n-1}-(1+ap)^{n-2}=ap(1+ap)^{n-2}$. …………………（6 分）

则 $\dfrac{E_n}{E_{n-1}}=1+ap$，且 $E_1=ap$.

∴ $\{E_n\}$ 是以 ap 为首项，1＋ap 为公比的等比数列. ………………（7 分）

（ii）令 $f(p)=\ln(1+p)-\dfrac{2}{3}p$，则 $f'(p)=\dfrac{1}{p+1}-\dfrac{2}{3}=\dfrac{-2p+1}{3(p+1)}$.

∴ $f(p)$ 在 $\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$ 上单调递增，在 $\left(\dfrac{1}{2},1\right)$ 上单调递减. …………（9 分）

$$f(p)_{\max}=f\left(\frac{1}{2}\right)=\ln\frac{2}{3}-\frac{1}{3}=\ln3-\ln2-\frac{1}{3}\approx1.1-0.7-0.3=0.1.$$

…………………………………（10 分）

则当 a＝10，$E_n=10p(1+10p)^{n-2}$.

$E_6{}'=10\times0.1(1+10\times0.1)^4\approx1.46$.

$E_6=10\times0.5(1+10\times0.5)^4\approx25.31$.

∵ $E_6>E_6{}'$

∴戴口罩很有必要. ……………………………………………………(12 分)

21．解:(Ⅰ) $f'(x)=2e^{2x}=1\Rightarrow x=-\frac{\ln 2}{2}$, $f\left(-\frac{\ln 2}{2}\right)=\frac{1}{2}-a$.

$f(x)$在$\left(-\frac{\ln 2}{2},\frac{1}{2}-a\right)$处的切线方程为$y-\left(\frac{1}{2}-a\right)=x+\frac{\ln 2}{2}$,

即$y=x+\frac{\ln 2}{2}+\frac{1}{2}-a$. ……………………………………………………(2 分)

$g'(x)=e^{x}=1\Rightarrow x=0,g(0)=1-b$.

$g(x)$在(0,1－b)处的切线方程为$y-(1-b)=x\Rightarrow y=x+1-b$,

故$\frac{\ln 2}{2}+\frac{1}{2}-a=1-b\Rightarrow b-a=\frac{1}{2}-\frac{\ln 2}{2}$. ……………………………(4 分)

(Ⅱ) $h(x)=e^{2x}-a-\left(e^{x}-b\right)-mx+\frac{\ln 2}{2}-\frac{1}{2}=e^{2x}-e^{x}-mx$,

$h'(x)=2e^{2x}-e^{x}-m$,

令$t=e^{x}$, 则$y=2t^{2}-t-m$,

m＞1 时, $2t^{2}-t-m=0$有两根 t_1, t_2 且 t_1＜0＜t_2,

$h'(x)=2\left(e^{x}-t_1\right)\left(e^{x}-t_2\right)=0$, 得: $x=\ln t_2$.

在$(-\infty,\ln t_2)$上, $h'(x)<0$, 在$(\ln t_2,+\infty)$上, $h'(x)>0$.

此时, $h(\ln t_2)<h(0)=0$.

又$x\to-\infty$时, $h(x)\to+\infty,x\to+\infty$时, $h(x)\to+\infty$.

故在$(-\infty,\ln t_2)$和$(\ln t_2,+\infty)$上, h(x)各有 1 个零点. ……………(6 分)

m＝1 时, $h'(x)=2\left(e^{x}+\frac{1}{2}\right)\left(e^{x}-1\right)$.

h(x)最小值为 h(0)＝0, 故 h(x)仅有 1 个零点.

0＜m＜1 时, $h'(x)=2\left(e^{x}-t_1\right)\left(e^{x}-t_2\right)$.

其中 t_1＜0＜t_2, 同 m＞1, h(x)在$(-\infty,\ln t_2)$与$(\ln t_2,+\infty)$上,

h(x)各有 1 个零点. ……………………………………………………………(8 分)

m＝0 时, $h(x)=e^{2x}-e^{x}$, 仅有 1 个零点,

$-\dfrac{1}{8}<m<0$ 时，对方程 $2t^2-t-m=0,\Delta=1+8m>0$.

方程有两个正根 t_1，t_2，$h'(x)=2\left(e^x-t_1\right)\left(e^x-t_2\right)$.

在 $\left(-\infty,\ln t_1\right)$ 上，$h'(x)>0$，在 $\left(\ln t_1,\ln t_2\right)$ 上，$h'(x)<0$，

在 $\left(\ln t_2,+\infty\right)$ 上，$h'(x)>0$.

由 $\begin{cases} t_1+t_2=\dfrac{1}{2} \\ 0<t_1<t_2 \end{cases} \Rightarrow 0<t_1<\dfrac{1}{4}<t_2<\dfrac{1}{2}$，故 $\ln t_2<0,h\left(\ln t_2\right)<h(0)=0$.

$$\begin{aligned} h\left(\ln t_1\right)&=t_1^2-t_1-m\ln t_1=t_1^2-t_1-\left(2t_1^2-t_1\right)\ln t_1 \\ &=t_1\left[\left(t_1-1\right)+\left(1-2t_1\right)\ln t_1\right] \end{aligned}.$$

$\because t_1-1<0,1-2t_1>0,\ln t_1<0$，故 $h\left(\ln t_1\right)<0$.

故在 $\left(-\infty,\ln t_1\right)$ 上，$h(x)<h\left(\ln t_1\right)<0$，在 $\left(\ln t_1,\ln t_2\right)$ 上，$h(x)<0$，

在 $\left(\ln t_2,+\infty\right)$ 上，$h(x)$ 有 1 个零点：$x=0$.

$m\le-\dfrac{1}{8}$ 时，$h'(x)=2e^{2x}-e^x-m\ge0$ 恒成立，

h（x）为增函数，h（x）仅有 1 个零点：$x=0$. ……………………（10 分）

综上，$m\leqslant0$ 或 $m=1$ 时，h（x）有 1 个零点，

$0<m<1$ 或 $m>1$ 时，h（x）有 2 个零点. ……………………………（12 分）

22．解：（Ⅰ）由 $x=\rho\cos\theta,y=\rho\sin\theta$ 可得点 A 的直角坐标为 A（$2\sqrt{3}$，2），

点 B 的直角坐标为 B（$-2\sqrt{3}$，2），

点 C 的直角坐标为 C（0，-4）. …………………………………………（2 分）

设圆 C_2 的直角坐标方程为 $x^2+\left(y-m\right)^2=r^2$，

代入 A，C 可得 $\begin{cases} 12+\left(2-m\right)^2=r^2 \\ \left(-4-m\right)^2=r^2 \end{cases}$，$\therefore m=0$，$r=4$.

$\therefore$ 圆 C_2 的直角坐标方程为 $x^2+y^2=16$. ………………………………（4 分）

故曲线 C_3 的直角坐标方程为：$\left(x-3\right)^2+y^2=16$. ……………………（5 分）

（Ⅱ）由（Ⅰ）联立曲线 C_1，C_3 可得 $\left(1-\dfrac{\sqrt{2}}{2}t-3\right)^2+\left(1+\dfrac{\sqrt{2}}{2}t\right)^2=16$，…（7 分）

整理可得，$t^2+3\sqrt{2}t-11=0$，

$\therefore t_1+t_2=-3\sqrt{2},t_1t_2=-11$，…………………………………………………（8 分）

$\therefore |MP|\cdot|MQ|=|t_1|\cdot|t_2|=-t_1t_2=11$．………………………………（10 分）

23．解：（Ⅰ）原不等式可化为$|3x-1|+|x-2|\geq 3$，

①当$x\leq\dfrac{1}{3}$时，原不等式可化为$-3x+1+2-x\geqslant 3$，

解得$x\leqslant 0$，$\therefore x\leqslant 0$；………………………………………………………………（2 分）

②当$\dfrac{1}{3}<x<2$时，原不等式可化为$3x-1+2-x\geqslant 3$，

解得$x\geqslant 1$，$\therefore 1\leqslant x<2$；…………………………………………………………（3 分）

③当$x\geqslant 2$时，原不等式可化为$3x-1-2+x\geqslant 3$，

解得$x\geqslant\dfrac{3}{2}$，$\therefore x\geqslant 2$；………………………………………………………（4 分）

综上，不等式的解集为$\{x|x\leq 0或x\geq 1\}$．……………………………………（5 分）

（Ⅱ）$\because f(x)=\begin{cases}-4x+3, x\leq\dfrac{1}{3},\\ 2x+1,\dfrac{1}{3}<x<2,\\ 4x-3, x\geq 2,\end{cases}$

$\therefore f(x)_{\min}=f\left(\dfrac{1}{3}\right)=\dfrac{5}{3}$．…………………………………………………（6 分）

$\therefore$由$3\log_2 m\cdot\log_2 n\geq\dfrac{5}{f(x)}$恒成立可知，

不等式$\log_2 m\cdot\log_2 n\geq 1$恒成立．………………………………………………（8 分）

$\because \log_2 m+\log_2 n\geq 2\sqrt{\log_2 m\cdot\log_2 n}\geq 2$，

$\therefore \log_2(m\cdot n)\geq 2$，$\therefore m\cdot n\geqslant 4$，当且仅当$m=n=2$时等号成立．

$\therefore$故mn的最小值 4．……………………………………………………………（10 分）