绝密★启用前

长郡中学2020届高三适应性考试（二）

数学（文科）试卷参考答案

一、选择题：本大题共12小题，每小题5分，共60分。

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	A	D	D	B	C	B	B	D	A	C	D	D

二、填空题：本大题共4小题，每小题5分，共20分。

13．$9x+4y-2=0$ 或 $y=-4$　　14．丙　　15．3　　16．$\sqrt{10}-1$

三、解答题：共70分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17．解：（Ⅰ）$\because \left(a\cos C+c\cos A\right)\tan A=\sqrt{3}b$，

$\therefore \left(\sin A\cos C+\sin C\cos A\right)\tan A=\sqrt{3}\sin B$，

即 $\sin\left(A+C\right)\tan A=\sqrt{3}\sin B$.

又 $\because A+B+C=\pi$，$\therefore \sin\left(A+C\right)=\sin B\neq 0$.

$\therefore \tan A=\sqrt{3}$，故 $A=\dfrac{\pi}{3}$. ……………………………………………（5分）

（Ⅱ）设 $\angle OBC=\alpha$，$\because O$ 为 $\triangle ABC$ 的内心，且 $A=\dfrac{\pi}{3}$，$\therefore \angle BOC=\dfrac{2\pi}{3}$.

$\therefore \angle OCB=\dfrac{\pi}{3}-\alpha$，在 $\triangle OBC$ 中，$\dfrac{OC}{\sin\alpha}=\dfrac{OB}{\sin\left(\dfrac{\pi}{3}-\alpha\right)}=\dfrac{\sqrt{3}}{\sin\dfrac{2\pi}{3}}=2$，

$\therefore OC=2\sin\alpha, OB=2\sin\left(\dfrac{\pi}{3}-\alpha\right)$.

$\therefore OB+OC=2\sin\alpha+2\sin\left(\dfrac{\pi}{3}-\alpha\right)=2\sin\left(\alpha+\dfrac{\pi}{3}\right)\leq 2$.

当且仅当 $\alpha=\dfrac{\pi}{6}$，即 $\triangle ABC$ 为等边三角形时取等号，

故 $OB+OC$ 的最大值为2. ……………………………………………（12分）

18．解：（Ⅰ）在直角梯形 $PABC$ 中，点 A 恰好在线段 PC 的垂直平分线上，$AD\perp PC$.

$\therefore AD$ 即为线段 PC 的垂直平分线，

即 D 是线段 PC 的中点，

$\therefore PD=CD$. ……………………………………………………（2分）

又 $AB\perp BC$，$AB\parallel PC$，$AD\perp PC$，

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 为矩形.

$\because P'D\perp AD$，平面 $ADP'\perp$ 底面 $ABCD$，平面 $ADP'\cap$ 底面 $ABCD=AD$，

$\therefore P'D\perp$底面 $ABCD$，$\therefore P'D\perp BC$. ……………………………………（3 分）

$\because P'D\perp BC$，$CD\perp BC$，$CD\cap P'D=D$，

$\therefore BC\perp$平面 $P'CD$，$\therefore BC\perp DQ$. ……………………………………（4 分）

又$\because Q$ 是线段 $P'C$ 的中点，$P'D=DC$，

$\therefore DQ\perp P'C$. ……………………………………………………………（5 分）

又 $P'C\cap BC=C$，$\therefore DQ\perp$平面 $P'BC$. ………………………………（6 分）

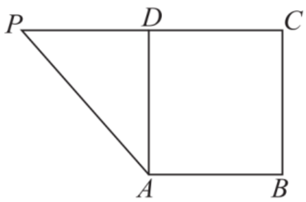

图1

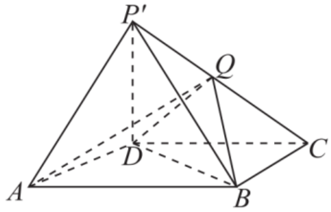

图2

（Ⅱ）由（Ⅰ）知，$DC\perp P'D$，$DC\perp AD$，

又 $AD\cap P'D=D$，$\therefore CD\perp$平面 $P'AD$.

$\because Q$ 是线段 $P'C$ 的中点，

$\therefore$三棱锥 $Q-P'AD$ 的高等于$\dfrac{1}{2}CD$. ……………………………………（8 分）

由（Ⅰ）及 $PC=4$，得 $P'D=CD=2$. ………………………………………（9 分）

而$V_{P'-ADQ}=V_{Q-AP'D}=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}\times2\times a\times1=1$，

解得 $a=3$. ………………………………………………………………………（12 分）

19．解：（Ⅰ）设这 6 人中花 150 元/袋的价格购买 A 蔬菜的顾客为 a，b，其余 4 人为 c，d，e，f.

则从 6 人中任选 2 人的基本事件为：（a，b），（a，c），（a，d），（a，e），（a，f），（b，c），（b，d），（b，e），（b，f），（c，d），（c，e），（c，f），（d，e），（d，f），（e，f），共 15 个.

其中至少选中 1 人是以 150 元/袋的价格购买的基本事件有：（a，c），（a，d），（a，e），（a，f），（b，c），（b，d），（b，e），（b，f），（a，b），共 9 个.

$\therefore$至少选中 1 人是以 150 元/袋的价格购买的概率为 $P=\dfrac{9}{15}=\dfrac{3}{5}$. …（6 分）

（Ⅱ）（i）该蔬菜批发商经销 A 蔬菜的总盈利值为 100×［（100×4－50×2）×0.3＋（100×5－50）×0.6＋600×0.1］＝42000（元）. ………（8 分）

（ii）当购进 A 蔬菜 4 袋时，每天所获平均利润为 $\overline{x}_1=100\times4=400$（元），

当购进 A 蔬菜 5 袋时，每天所获平均利润为 $\overline{x}_2=$（100×4－50）×0.3＋100×5×0.7＝455（元），

当购进 A 蔬菜 6 袋时，每天所获平均利润为 $\overline{x}_3=$（100×4－50×2）×0.3＋（100×5－50）×0.6＋100×6×0.1＝420（元）.

综上，该批发商明年每天购进 A 蔬菜 5 袋，所获平均利润最大. …（12 分）

20．解：（Ⅰ）设椭圆 C 的半焦距为 c.

∵椭圆 C 的离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$，∴ $\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{2}}{2}$. ①……………………………（1 分）

又椭圆 C 经过点 $\left(1,\frac{\sqrt{6}}{2}\right)$,

∴ $\frac{1^2}{a^2}+\frac{\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2}{b^2}=1$. ②……………………………………………………（2 分）

结合 $a^2=b^2+c^2$，③

由①②③，解得 $a=2,b=c=\sqrt{2}$. ……………………………………（3 分）

故椭圆 C 的标准方程是 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$. …………………………………（4 分）

（Ⅱ）

$$\begin{aligned}|OA|^2|OB|^2-\left(\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}\right)^2&=|OA|^2|OB|^2-\left(|OA||OB|\cos\angle AOB\right)^2\\&=|OA|^2|OB|^2\sin^2\angle AOB\\&=4\times\frac{1}{4}|OA|^2|OB|^2\sin^2\angle AOB\\&=4\times\left(\frac{1}{2}|OA||OB|\sin\angle AOB\right)^2\\&=4\left(S_{\Delta AOB}\right)^2\end{aligned}$$

，

①当直线 l 的斜率不存在时，不妨设 $x=t$，$t>0$，根据对称性知两平行线的交点在 x 轴上，又因为交点刚好在椭圆 C 上，所以交点为长轴端点，则满足条件的直线的方程是 $x=1$.

此时点 $A\left(1,\frac{\sqrt{6}}{2}\right),B\left(1,-\frac{\sqrt{6}}{2}\right)$ 或 $A\left(1,-\frac{\sqrt{6}}{2}\right),B\left(1,\frac{\sqrt{6}}{2}\right)$,

$S_{\Delta OAB}=\frac{1}{2}\times1\times\sqrt{6}=\frac{\sqrt{6}}{2}$,

故 $|OA|^2|OB|^2-\left(\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}\right)^2=4\times\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2=6$；………………………（6 分）

②当直线 l 的斜率存在时，设直线 l 的方程为 $y=kx+m$，A（x_1，y_1），B（x_2，y_2）.

联立方程$\begin{cases} y = kx + m \\ \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{2} = 1 \end{cases}$消去 y，

得$\left(2k^2+1\right)x^2+4kmx+2m^2-4=0$，

则$\Delta=8\left(4k^2+2-m^2\right)>0, x_1+x_2=-\dfrac{4km}{2k^2+1}, x_1x_2=\dfrac{2m^2-4}{2k^2+1}$，

$y_1+y_2=k\left(x_1+x_2\right)+2m=\dfrac{2m}{2k^2+1}$. ……………………………………（8 分）

不妨设两平行线的交点为点 D，则$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OD}$，

故点 D 的坐标为$\left(-\dfrac{4km}{2k^2+1}, \dfrac{2m}{2k^2+1}\right)$.

∵点 D 刚好在椭圆 C 上，

$\therefore \dfrac{\left(-\dfrac{4km}{2k^2+1}\right)^2}{4}+\dfrac{\left(\dfrac{2m}{2k^2+1}\right)^2}{2}=1$，

即$2k^2+1=2m^2$. ……………………………………………………………（9 分）

此时$\Delta=8\left(4k^2+2-m^2\right)=24m^2>0$，

则

$$\begin{aligned}|AB|&=\sqrt{1+k^2}\left|x_1-x_2\right|=\sqrt{1+k^2}\sqrt{\left(x_1+x_2\right)^2-4x_1x_2}\\&=\sqrt{1+k^2}\sqrt{\left(-\frac{4km}{2k^2+1}\right)^2-4\times\frac{2m^2-4}{2k^2+1}}\\&=\sqrt{1+k^2}\frac{\sqrt{24m^2}}{2k^2+1}=\sqrt{1+k^2}\frac{\sqrt{6m^2}}{m^2}\end{aligned}$$

（10 分）

设点 O 到直线 l 的距离为 d，则$d=\dfrac{|m|}{\sqrt{1+k^2}}$. ………………………（11 分）

$\therefore S_{\Delta OAB}=\dfrac{1}{2}\times|AB|\times d=\dfrac{1}{2}\times\sqrt{1+k^2}\dfrac{\sqrt{6m^2}}{m^2}\times\dfrac{|m|}{\sqrt{1+k^2}}=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$.

故$|OA|^2|OB|^2-\left(\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}\right)^2=4\times\left(\dfrac{\sqrt{6}}{2}\right)^2=6$.

综上，$|OA|^2|OB|^2-\left(\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}\right)^2$取得定值 6. ………………………（12 分）

21．解：（Ⅰ）$f'(x)=2e^{2x}=1\Rightarrow x=-\frac{\ln 2}{2}$，$f\left(-\frac{\ln 2}{2}\right)=\frac{1}{2}-a$.

$f(x)$在$\left(-\frac{\ln 2}{2},\frac{1}{2}-a\right)$处的切线方程为$y-\left(\frac{1}{2}-a\right)=x+\frac{\ln 2}{2}$，

即$y=x+\frac{\ln 2}{2}+\frac{1}{2}-a$. ……………………………………………………（2分）

$g'(x)=e^{x}=1\Rightarrow x=0,g(0)=1-b$.

$g(x)$在（0，1－b）处的切线方程为$y-(1-b)=x\Rightarrow y=x+1-b$，

故$\frac{\ln 2}{2}+\frac{1}{2}-a=1-b\Rightarrow b-a=\frac{1}{2}-\frac{\ln 2}{2}$. ……………………………（4分）

（Ⅱ）$h(x)=e^{2x}-a-\left(e^{x}-b\right)-mx+\frac{\ln 2}{2}-\frac{1}{2}=e^{2x}-e^{x}-mx$，

$h'(x)=2e^{2x}-e^{x}-m$，

令$t=e^{x}$，则$y=2t^{2}-t-m$，

m＞1时，$2t^{2}-t-m=0$有两根t_1，t_2且t_1＜0＜t_2，

$h'(x)=2\left(e^{x}-t_{1}\right)\left(e^{x}-t_{2}\right)=0$，得：$x=\ln t_{2}$.

在$\left(-\infty,\ln t_{2}\right)$上，$h'(x)<0$，在$\left(\ln t_{2},+\infty\right)$上，$h'(x)>0$.

此时，$h\left(\ln t_{2}\right)<h(0)=0$.

又$x\to-\infty$时，$h(x)\to+\infty,x\to+\infty$时，$h(x)\to+\infty$.

故在$\left(-\infty,\ln t_{2}\right)$和$\left(\ln t_{2},+\infty\right)$上，$h$（$x$）各有1个零点. ……………（6分）

m＝1时，$h'(x)=2\left(e^{x}+\frac{1}{2}\right)\left(e^{x}-1\right)$.

h（x）最小值为h（0）＝0，故h（x）仅有1个零点.

0＜m＜1时，$h'(x)=2\left(e^{x}-t_{1}\right)\left(e^{x}-t_{2}\right)$.

其中t_1＜0＜t_2，同m＞1，h（x）在$\left(-\infty,\ln t_{2}\right)$与$\left(\ln t_{2},+\infty\right)$上，

h（x）各有1个零点. ……………………………………………………………（8分）

m＝0时，$h(x)=e^{2x}-e^{x}$，仅有1个零点，

$-\dfrac{1}{8}$＜m＜0 时，对方程 $2t^2-t-m=0,\Delta=1+8m>0$.

方程有两个正根 t_1，t_2，$h'(x)=2\left(e^x-t_1\right)\left(e^x-t_2\right)$.

在 $\left(-\infty,\ln t_1\right)$ 上，$h'(x)>0$，在 $\left(\ln t_1,\ln t_2\right)$ 上，$h'(x)<0$，

在 $\left(\ln t_2,+\infty\right)$ 上，$h'(x)>0$.

由 $\begin{cases}t_1+t_2=\dfrac{1}{2}\\ 0<t_1<t_2\end{cases}\Rightarrow 0<t_1<\dfrac{1}{4}<t_2<\dfrac{1}{2}$，故 $\ln t_2<0,h\left(\ln t_2\right)<h(0)=0$.

$$\begin{aligned}h\left(\ln t_1\right)&=t_1^2-t_1-m\ln t_1=t_1^2-t_1-\left(2t_1^2-t_1\right)\ln t_1\\&=t_1\left[\left(t_1-1\right)+\left(1-2t_1\right)\ln t_1\right]\end{aligned}.$$

$\because t_1-1<0,1-2t_1>0,\ln t_1<0$，故 $h\left(\ln t_1\right)<0$.

故在 $\left(-\infty,\ln t_1\right)$ 上，$h(x)<h\left(\ln t_1\right)<0$，在 $\left(\ln t_1,\ln t_2\right)$ 上，$h(x)<0$，

在 $\left(\ln t_2,+\infty\right)$ 上，$h(x)$ 有 1 个零点：x＝0.

$m\le-\dfrac{1}{8}$ 时，$h'(x)=2e^{2x}-e^x-m\ge0$ 恒成立，

h（x）为增函数，h（x）仅有 1 个零点：x＝0. ……………………（10 分）

综上，m≤0 或 m＝1 时，h（x）有 1 个零点，

0＜m＜1 或 m＞1 时，h（x）有 2 个零点. ……………………………（12 分）

22．解：（Ⅰ）由已知曲线 C 的普通方程为 $(x-2)^2+y^2=4$，即 $x^2+y^2=4x$，

$\because x=\rho\cos\theta,\rho^2=x^2+y^2$，可得 $\rho^2=4\rho\cos\theta$，化简为 $\rho=4\cos\theta$，

$\therefore$ 曲线 C 的极坐标方程为 $\rho=4\cos\theta$.

直线 l 的参数方程：$\begin{cases}x=-1+t\cos\alpha\\ y=-3\sqrt{3}+t\sin\alpha\end{cases}$（$t$ 为参数，$0\le\alpha\le\pi$）.（4 分）

（Ⅱ）设 A，B 对应的参数分别为 t_A，t_B，

将直线 l 的参数方程代入 C 并整理，得 $t^2-6t\left(\sqrt{3}\sin\alpha+\cos\alpha\right)+32=0$，

$\therefore t_A+t_B=6\left(\sqrt{3}\sin\alpha+\cos\alpha\right),t_A\cdot t_B=32$.

又 A 为 MB 的中点，∴t_B＝$2t_A$，

因此 $t_A=2\left(\sqrt{3}\sin\alpha+\cos\alpha\right)=4\sin\left(\alpha+\dfrac{\pi}{6}\right),t_B=8\sin\left(\alpha+\dfrac{\pi}{6}\right)$，

$\therefore t_A \cdot t_B = 32\sin^2\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)=32$，即$\sin^2\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)=1$.

$\because 0\le\alpha\le\pi$，$\therefore \frac{\pi}{6}\le\alpha+\frac{\pi}{6}<\frac{7\pi}{6}$.

从而$\alpha+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}$，即$\alpha=\frac{\pi}{3},\tan\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$. ……………………………（10 分）

23．解：（Ⅰ）原不等式可化为$|3x-1|+|x-2|\ge 3$，

①当$x\le\frac{1}{3}$时，原不等式可化为$-3x+1+2-x\geqslant 3$，

解得$x\leqslant 0$，$\therefore x\leqslant 0$；…………………………………………………………（2 分）

②当$\frac{1}{3}<x<2$时，原不等式可化为$3x-1+2-x\geqslant 3$，

解得$x\geqslant 1$，$\therefore 1\leqslant x<2$；……………………………………………………（3 分）

③当$x\geqslant 2$时，原不等式可化为$3x-1-2+x\geqslant 3$，

解得$x\geqslant\frac{3}{2}$，$\therefore x\geqslant 2$；……………………………………………………（4 分）

综上，不等式的解集为$\left\{x\middle|x\le 0或x\ge 1\right\}$. ………………………………（5 分）

（Ⅱ）$\because f(x)=\begin{cases}-4x+3, x\le\frac{1}{3},\\ 2x+1,\frac{1}{3}<x<2,\\ 4x-3, x\ge 2,\end{cases}$

$\therefore f(x)_{\min}=f\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{5}{3}$. ……………………………………………………（6 分）

$\therefore$由$3\log_2 m\cdot\log_2 n\ge\frac{5}{f(x)}$恒成立可知，

不等式$\log_2 m\cdot\log_2 n\ge 1$恒成立. ……………………………………………（8 分）

$\because \log_2 m+\log_2 n\ge 2\sqrt{\log_2 m\cdot\log_2 n}\ge 2$，

$\therefore \log_2(m\cdot n)\ge 2$，$\therefore m\cdot n\geqslant 4$，当且仅当$m=n=2$时等号成立.

$\therefore$故mn的最小值 4. ……………………………………………………………（10 分）