

2019—2020 学年下学期全国百强名校

“领军考试” 高三数学（理数）

注意事项：

1. 答卷前，考生务必将自己的姓名，准考证号填写在本试题相应的位置。
 2. 全部答案在答题卡上完成，答在本试题上无效。
 3. 回答选择题时，选出每小题答案后，用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。回答非选择题时，将答案用 0.5mm 黑色笔迹签字笔写在答题卡上。
 4. 考试结束后，将本试题和答题卡一并交回。
- 一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 若 $\frac{z}{2-i} = 1-i$, 则 $\bar{z} =$

- A. $3+3i$ B. $1+3i$ C. $3-3i$ D. $1-3i$

2. 已知集合 $A = \{x | x^2 < 4\}$, $B = \left\{x \left| \left(\frac{1}{2}\right)^x < 2\right.\right\}$, 则

- A. $A \cap B = \{x | -2 < x < 1\}$ B. $A \cap B = \{x | 1 < x < 2\}$
C. $A \cup B = \{x | x > -2\}$ D. $A \cup B = \{x | x < 1\}$

3. 已知角 α 的终边经过点 $P(-3, 1)$, 则 $\cos 2\alpha =$

- A. $\frac{3}{5}$ B. $-\frac{3}{5}$ C. $\frac{4}{5}$ D. $-\frac{4}{5}$

4. 已知变量 x, y 的关系可以用模型 $y = ce^{kx}$ 拟合, 设 $z = \ln y$, 其变换后得到一组数据如下:

x	16	17	18	19
z	50	34	41	31

由上表可得线性回归方程 $\hat{z} = -4x + \hat{a}$, 则 $c =$

- A. -4 B. e^{-4} C. 109 D. e^{109}

5. 双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的两条渐近线与圆 $x^2 + y^2 - 2x + \frac{1}{5} = 0$ 相切, 则双曲线 C 的离心率为

- A. $\frac{\sqrt{5}}{2}$ B. $\sqrt{2}$ C. $\sqrt{5}$ D. $\frac{\sqrt{17}}{2}$

6. 已知实数 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} x \geq -1 \\ y \geq -1 \\ x - 2y + 2 \geq 0 \\ 2x - y - 2 \leq 0 \end{cases}$, 则 $3x - y$ 的取值范围是

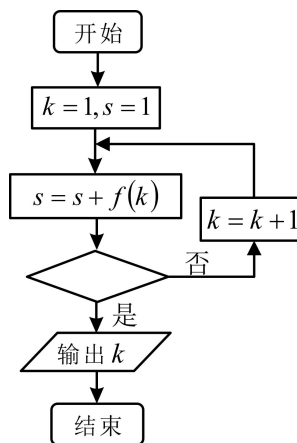
A. $\left[-\frac{7}{2}, 4\right]$ B. $\left[-\frac{5}{2}, 4\right]$ C. $[-2, 2]$ D. $[-2, 3]$

7. $(x^2 - 3)\left(\frac{2}{x} + 1\right)^5$ 的展开式中的常数项为

A. 77 B. 37
C. -3 D. -23

8. 已知 $f(k) = k + (-1)^k$, 执行如图所示的程序框图, 若输出 k 的值为 4, 则判断框内可填入的条件是

A. $s > 3?$ B. $s > 5?$
C. $s > 10?$ D. $s > 15?$



9. 已知正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 2, 过点 A 及 C_1D_1 中点作与直线 BD 平行的平面 α , 则平面 α 与该正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 各面交线长度之和为

A. $5\sqrt{5}$ B. $2\sqrt{13} + \sqrt{2}$
C. $2\sqrt{5} + 3\sqrt{2}$ D. $5\sqrt{2}$

10. 已知 $a > 0$ 且 $a \neq 1$, $f(x) = \begin{cases} 8x - 1, & x \leq \frac{1}{2} \\ 2 + \log_a x, & x > \frac{1}{2} \end{cases}$, 若 $f(x)$ 有最大值, 则 a 的取值范围是

A. $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ B. $\left(0, \frac{1}{2}\right]$ C. $\left(0, \frac{1}{2}\right) \cup (1, +\infty)$ D. $\left[\frac{1}{2}, 1\right) \cup [2, +\infty)$

11. 蒙日圆涉及的是几何学中的一个著名定理, 该定理的内容为: 椭圆上两条互相垂直的切线的交点必在一个与椭圆同心的圆上, 该圆称为原椭圆的蒙日圆, 若椭圆 C :

$$\frac{x^2}{a+2} + \frac{y^2}{a} = 1 (a > 0) \text{ 的蒙日圆为 } x^2 + y^2 = 4, a =$$

A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

12. 关于函数 $f(x) = |\sin x| + \sqrt{3} \cos x$ 有下述四个结论:

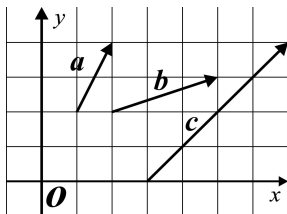
① $f(x)$ 是周期函数; ② $f(x)$ 的图象关于直线 $x = 2k\pi (k \in \mathbf{Z})$ 对称,
③ $f(x)$ 在 $(-\pi, 0)$ 上没有零点; ④ $f(x)$ 的值域为 $[-\sqrt{3}, 2]$, 其中正确结论的个数为

A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. $f(x) = e^{x-1} - 2\sqrt{x}$ 的图象在 $x=1$ 处的切线方程为_____.

14. 如图所示,直角坐标系中网格小正方形的边长为 1,若向量 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 满足 $(\mathbf{a} + t\mathbf{c}) \cdot \mathbf{b} = 0$, 则 $t =$ _____.



15. 已知 $\triangle ABC$ 中,角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , 若 $b \cos C = 2c \cos B, c = 2$, 且 $\triangle ABC$ 面积为 1, 则 $\sin 2B =$ _____.

16. 已知三棱锥 $P-ABC$ 中 $PA = AB = 3, AC = 5, BC = 7, PB = 3\sqrt{2}, PC = \sqrt{34}$ 则三棱锥 $P-ABC$ 的外接球表面积为_____.

三、解答题：共 70 分。解答题写出文字说明、证明过程或演算步骤。第 17~21 题为必考题，每个试题考生都必须作答。第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答。

(一) 必考题：共 60 分。

17. (12 分)

已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = a_{n+1} - 2$.

(1) 若 $a_1 = 2$, 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 若数列 $1, a_2, a_4, b_1, b_2, \dots, b_n, \dots$ 成等差数列, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 S_n .

18. (12 分)

如图,在四棱锥 $P-ABCD$ 中 $AD \parallel BC, DA \perp AB, AD=2, AB=BC=1, CD = \sqrt{2}$, 点 E 为 PD 中点.

(1) 求证: $CE \parallel$ 平面 PAB ;

(2) 若 $PA = 2, PD = 2\sqrt{2}, \angle PAB = \frac{2\pi}{3}$, 求平面 PBD 与平面

ECD 所成锐二面角的余弦值.

19. (12 分)

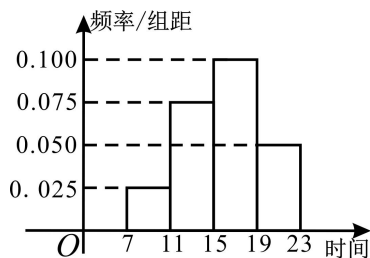
已知过点 $P(4,0)$ 的动直线与抛物线 $C: y^2 = 2px (p > 0)$ 交于点 A, B , 且 $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 0$ (点 O 为坐标原点).

(1) 求抛物线 C 的方程;

(2) 当直线 AB 变动时, x 轴上是否存在点 Q , 使得点 P 到直线 AQ, BQ 的距离相等, 若存在, 求出点 Q 坐标, 若不存在, 说明理由.

20. (12 分)

2019 年国庆节假期期间, 某商场为掌握假期期间顾客购买商品人次, 统计了 10 月 1 日 7:00 ~ 23:00 这一时间段内顾客购买商品人次, 统计发现这一时间段内顾客购买商品共 5000 人次, 顾客购买商品时刻的频率分布直方图如下图所示, 其中时间段 7:00 ~ 11:00, 11:00 ~ 15:00, 15:00 ~ 19:00, 19:00 ~ 23:00, 依次记作 $[7, 11), [11, 15), [15, 19), [19, 23]$.



(1)求该天顾客购买商品时刻的中位数 t 与平均值 $\bar{x}$ (同一组中的数据用该组区间的中点值代表);

(2)由频率分布直方图可以近似认为国庆节假期期间该商场顾客购买商品时刻服从正态分布 $N(\mu, \delta^2)$,其中 μ 近似为 $\bar{x}$, $\delta = 3.6$,估计2019年国庆节假期期间(10月1日-10月7日)该商场顾客在12:12~19:24之间购买商品的总人次(结果保留整数);

(3)为活跃节日气氛,该商场根据题中的4个时间段分组,采用分层抽样的方法从这5000个样本中随机抽取10个样本(假设这10个样本为10个不同顾客)作为幸运客户,再从这10个幸运客户中随机抽取4人每人奖励500元购物券,其他幸运客户每人奖励200元购物券,记获得500元购物券的4人中在15:00~19:00之间购买商品的人数为 X ,求 X 的分布列与数学期望;

参考数据:若 $T \sim N(\mu, \sigma^2)$,则① $P(\mu - \sigma < T \leq \mu + \sigma) = 0.6827$;

② $P(\mu - 2\sigma < T \leq \mu + 2\sigma) = 0.9545$; ③ $P(\mu - 3\sigma < T \leq \mu + 3\sigma) = 0.9973$.

21. (12分)

已知函数 $f(x) = a\left(\ln x + \frac{1}{x}\right) + \ln x - x - 1$.

(1)讨论函数 $f(x)$ 的单调性;

(2)若函数 $g(x) = f(x) - \ln x$ 有2个不同的极值点 x_1, x_2 ($x_1 < x_2$),求证:

$$f(x_1) + f(x_2) - 2x_1x_2 > 5\ln\frac{4}{e^2}.$$

(二)选考题:共10分.请考生在第22、23题中任选一题作答.如果多做,则按所做的第一题计分.

22. [选修4-4:坐标系与参数方程](10分)

在平面直角坐标系 xOy 中,直线 l 的参数方程为
$$\begin{cases} x = \sqrt{3}a + \frac{\sqrt{3}}{2}t \\ y = a - \frac{1}{2}t \end{cases}, (t \text{ 为参数}, a \in \mathbf{R}).$$
在以

坐标原点为极点, x 轴的非负半轴为极轴的极坐标系中,曲线 C 的极坐标方程为 $\rho^2 \cos 2\theta + 4\rho^2 \sin^2 \theta = 3$.

(1)若点 $A(0, 4)$ 在直线 l 上,求直线 l 的极坐标方程;

(2)已知 $a > 0$,若点 P 在直线 l 上,点 Q 在曲线 C 上,若 $|PQ|$ 最小值为 $\frac{\sqrt{6}}{2}$,求 a 的值.

23. [选修4-5:不等式选讲](10分)

已知 $f(x) = x^2 + 2|x-1|$.

(1)求不等式 $f(x) > \frac{|2x|}{x}$ 的解集;

(2)若 $f(x)$ 的最小值为 M ,且 $a+b+c=M$ ($a, b, c \in \mathbf{R}$),求证:

$$\sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{b^2 + c^2} + \sqrt{c^2 + a^2} \geq \sqrt{2}.$$