

2019—2020 学年下学期全国百强名校

“领军考试” 高三理数参考答案

1. 【答案】B

【解析】由 $\frac{\bar{z}}{2-i} = 1-i$ 可得 $z = (1-i)(2-i) = 1-3i$, 所以 $\bar{z} = 1+3i$, 故选 B.

2. 【答案】C

【解析】因为 $A = \{x | x^2 < 4\} = \{x | -2 < x < 2\}$, $B = \left\{x \left| \left(\frac{1}{2}\right)^x < 2\right.\right\} = \{x | x > -1\}$, 所以 $A \cap B = \{x | -1 < x < 2\}$, $A \cup B = \{x | x > -2\}$, 故选 C.

3. 【答案】C

【解析】因为角 α 的终边经过点 $P(-3, 1)$, 所以 $\sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{10}}$, 所以 $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha = 1 - \frac{2}{10} = \frac{4}{5}$, 故选 C.

4. 【答案】D

【解析】由题意知 $\bar{x} = 17.5$, $\bar{z} = 39$, 代入 $\hat{z} = -4x + \hat{a}$ 得 $\hat{a} = 109$, 所以 $z = \ln y = \ln ce^{kx} = kx + \ln c$, 所以 $\ln c = 109$, $c = e^{109}$, 故选 D.

5. 【答案】C

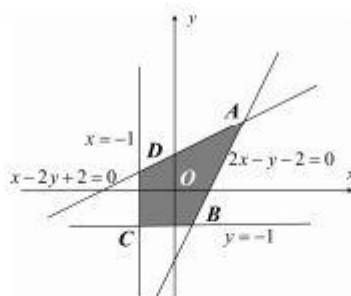
【解析】双曲线 C 的渐近线 $y = \pm \frac{b}{a}x$ 与 $x^2 + y^2 - 2x + \frac{1}{5} = 0$ 相切, 则圆心 $(1, 0)$ 到渐近线 $bx - ay = 0$ 的距离 $d = \frac{b}{\sqrt{b^2 + a^2}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$, 整理得 $\frac{b}{a} = 2$, 所以双曲线 C 的离心率 $e = \sqrt{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2} = \sqrt{5}$, 故选 C.

6. 【答案】A

【解析】作出不等式组 $\begin{cases} x \geq -1 \\ y \geq -1 \\ x - 2y + 2 \geq 0 \\ 2x - y - 2 \leq 0 \end{cases}$ 表示的平面区域, 如图所示, 设 $z = 3x - y$, 则 $y = 3x - z$, 当直线

$y = 3x - z$ 经过点 $A(2, 2)$ 时, z 取到最大值, $z_{\max} = 3 \times 2 - 2 = 4$, 当直线 $y = 3x - z$ 经过点 $D\left(-1, \frac{1}{2}\right)$ 时, z

取到最小值, $z_{\min} = 3 \times (-1) - \frac{1}{2} = -\frac{7}{2}$, 即 $3x - y$ 的取值范围是 $\left[-\frac{7}{2}, 4\right]$, 故选 A.



7. 【答案】B

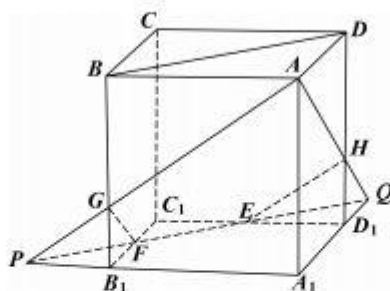
【解析】用 $x^2 - 3$ 中的 x^2 与 $\left(\frac{2}{x} + 1\right)^5$ 展开式中的 $C_3^3 \left(\frac{2}{x}\right)^2$ 项相乘及用 $x^2 - 3$ 中的 -3 与 $\left(\frac{2}{x} + 1\right)^5$ 展开式中的 1 相乘均得常数, 所以展开式中的常数项为 $C_3^3 \cdot 2^2 - 3 = 37$, 故选 B.

8. 【答案】C

【解析】第一次执行循环: $k = 1, s = 1 + f(1) = 1 + 0 = 1$; 第二次执行循环: $k = 2, s = 1 + f(2) = 1 + 3 = 4$; 第三次执行循环: $k = 3, s = 4 + f(3) = 4 + 2 = 6$; 第四次执行循环: $k = 4, s = 6 + f(4) = 6 + 5 = 11$, 满足条件, 结束循环, 所以判断框内填入的条件可以是 $s > 10$, 故选 C.

9. 【答案】B

【解析】分别取 D_1C_1 中点 E, B_1C_1 中点 F, BB_1 三等分点 G, DD_1 三等分点 H , 则五边形 $AHEFG$ 就是平面 α 与各面的交线所组成的, 其中 $AH = AG = \frac{\sqrt{13}}{3}, HE = GF = \frac{\sqrt{13}}{3}, EF = \sqrt{2}$, 所以平面 α 与正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 各面交线长度之和为 $2\sqrt{13} + \sqrt{2}$, 故选 B.



10. 【答案】B

【解析】由题意可得 $f(x)$ 在 $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right]$ 上的值域为 $(-\infty, 3]$, 若 $a > 1$, 则 $f(x)$ 在 $\left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$ 上的值域为 $\left(2 + \log_a \frac{1}{2}, +\infty\right)$, 所以 $f(x)$ 没有最大值; 若 $0 < a < 1$, 则 $f(x)$ 在 $\left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$ 上的值域为 $\left(-\infty, 2 + \log_a \frac{1}{2}\right)$, 若 $f(x)$ 有最大值, 则 $2 + \log_a \frac{1}{2} \leq 3$, 即 $\log_a \frac{1}{2} \leq 1$, 所以 $0 < a \leq \frac{1}{2}$, 故选 B.

11. 【答案】A

【解析】取特殊位置，椭圆 C 在长轴右端点与短轴上端点处的切线互相垂直，两切线方程分别为直线 $x = \sqrt{a+2}$, $y = \sqrt{a}$ ，交点为 $(\sqrt{a+2}, \sqrt{a})$ ，所以 $(\sqrt{a+2})^2 + (\sqrt{a})^2 = 4$, $a = 1$ ，故选 A.

12. 【答案】C

【解析】由 $f(x) = |\sin x| + \sqrt{3} \cos x$ ，可得

$f(x+2\pi) = |\sin(x+2\pi)| + \sqrt{3} \cos(x+2\pi) = |\sin x| + \sqrt{3} \cos x = f(x)$ ，所以 $f(x)$ 是周期函数，①正确；

由 $f(x)$ 是偶函数，图象关于 y 轴对称及 $f(x+2\pi) = f(x)$ ，可得 $f(x)$ 的图象关于直线 $x = 2k\pi (k \in \mathbb{Z})$ 对

称，②正确；由 $f\left(-\frac{2\pi}{3}\right) = \left|\sin \frac{2\pi}{3}\right| + \sqrt{3} \cos \frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \sqrt{3} \times \left(-\frac{1}{2}\right) = 0$ ，可 $x = -\frac{2\pi}{3}$ 是 $f(x)$ 在 $(-\pi, 0)$ 上

的零点，故③错误；由 $f(x)$ 是偶函数及 $f(x+2\pi) = f(x)$ 可得 $f(x)$ 的值域即 $f(x)$ 在 $[0, \pi]$ 上的值域。

当 $x \in [0, \pi]$ 时 $f(x) = \sin x + \sqrt{3} \cos x = 2 \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$ ，

由 $x \in [0, \pi]$ 可得 $x + \frac{\pi}{3} \in \left[\frac{\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right]$ ，所以 $2 \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \in [-\sqrt{3}, 2]$ ，④正确，故选 C.

13. 【答案】 $y = -1$

【解析】由 $f(x) = e^{x-1} - 2\sqrt{x}$ 可得 $f'(x) = e^{x-1} - \frac{1}{\sqrt{x}}$ ，所以 $f(1) = -1$, $f'(1) = 0$ ， $f(x) = e^{x-1} - 2\sqrt{x}$ 的图象在 $x = 1$ 处的切线方程为 $y = -1$.

14. 【答案】 $-\frac{5}{16}$

【解析】由图可知 $a + tc = (1, 2) + t(4, 4) = (1+4t, 2+4t)$, $b = (3, 1)$ ，所以由 $(a + tc) \cdot b = 0$ ，得

$3(1+4t) + (2+4t) = 0$ ，所以 $t = -\frac{5}{16}$.

15. 【答案】 $\frac{1}{3}$

【解析】由 $b \cos C = 2c \cos B$ 得 $\sin B \cos C = 2 \cos B \sin C$ ，所以

$\sin A = \sin(B+C) = \sin B \cos C + \cos B \sin C = 3 \cos B \sin C$ ，由 $c = 2$ 可得 $\frac{2}{\sin C} = 2R$ ，所以 $\triangle ABC$ 面积

$S = \frac{1}{2} ab \sin C$

$= \frac{1}{2} \cdot 2R \sin A \cdot 2R \sin B \sin C = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{2}{\sin C}\right)^2 \cdot \sin A \sin B \sin C = \frac{2 \sin A \sin B}{\sin C} = 6 \sin B \cos B = 3 \sin 2B = 1$ ，

所以 $\sin 2B = \frac{1}{3}$.

16. 【答案】 $\frac{223\pi}{3}$

【解析】由 $PA = AB = 3$, $PB = 3\sqrt{2}$ ，可得 $PA \perp AB$ ，由 $PA = 3$, $AC = 5$, $PC = \sqrt{34}$ ，可得 $PA \perp AC$ ，所以 $PA \perp$ 平面 ABC ，以 $\triangle ABC$ 为底面， PA 为侧棱，把三棱锥 $P-ABC$ 补成一个直三棱柱，则该三棱柱的高 $h = 3$ ，由 $AB = 3$, $AC = 5$, $BC = 7$ 可得 $\cos \angle BAC = -\frac{1}{2}$ ， $\angle BAC = 120^\circ$ ，所以 $\triangle ABC$ 的外接圆半径

$r = \frac{1}{2} \cdot \frac{BC}{\sin \angle BAC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{7}{\sin 120^\circ} = \frac{7\sqrt{3}}{3}$, 所以三棱锥 $P-ABC$ 的外接球半径

$$R = \sqrt{\left(\frac{h}{2}\right)^2 + r^2} = \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{7\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{223}{12}}, \text{ 所以该球的表面积 } S = 4\pi R^2 = \frac{223\pi}{3}.$$

17. 解: (1) 因为 $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = a_{n+1} - 2$,

当 $n \geq 2$ 时, 有 $a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} = a_n - 2$,

两式相减得 $a_{n+1} = 2a_n (n \geq 2)$,3 分

因为 $a_1 = 2, a_1 + a_2 + \cdots + a_n = a_{n+1} - 2$ 中令 $n = 1$, 得 $a_2 = a_1 + 2 = 2 + 2 = 4$,

所以 $a_2 = 2a_1$, 数列 $\{a_n\}$ 是首项为 2, 公比为 2 的等比数列,

所以 $a_n = 2^n$6 分

(2) 由 $1, a_2, a_4, b_1, b_2, \dots, b_n, \dots$ 成等差数列, 得 $1 + a_4 = 2a_2$, 又 $a_4 = 4a_2$,

所以 $a_2 = -\frac{1}{2}$, 数列 $1, a_2, a_4, b_1, b_2, \dots, b_n, \dots$ 的公差 $d = a_2 - 1 = -\frac{3}{2}$,

b_n 是该数列的第 $n+3$ 项, 所以 $b_n = 1 + (n+2)\left(-\frac{3}{2}\right) = -\frac{3}{2}n - 2$,10 分

$$\text{所以 } S_n = \frac{n(b_1 + b_n)}{2} = \frac{n\left(-\frac{7}{2} - \frac{3}{2}n - 2\right)}{2} = -\frac{3}{4}n^2 - \frac{11}{4}n. \text{12 分}$$

18. (1) 证明: 作 $CF \perp DA$, 垂足为 F , 则 $CF \parallel AB, CF = AB = 1$.

因为 $CD = \sqrt{2}$, 所以 $DF = \sqrt{CD^2 - CF^2} = \sqrt{2-1} = 1$, 所以点 F 为 AD 中点,

由 $CF \parallel AB, CF \not\subset$ 平面 $PAB, AB \subset$ 平面 PAB , 可得 $CF \parallel$ 平面 PAB , (3 分)

连接 EF , 则 $EF \parallel PA, EF \not\subset$ 平面 $PAB, PA \subset$ 平面 PAB , 可得 $EF \parallel$ 平面 PAB ,

因为 $CF \cap EF = F$, 所以平面 $CFE \parallel$ 平面 PAB ,

因为 $CE \subset$ 平面 CFE , 所以 $CE \parallel$ 平面 PAB5 分

(2) 解: 因为 $PA = 2, AD = 2, PD = 2\sqrt{2}$, 所以 $PA^2 + AD^2 = PD^2$, 所以 $PA \perp AD$.

因为 $DA \perp AB, AB \cap PA = A$, 所以 $DA \perp$ 平面 PAB ,6 分

以点 A 为坐标原点, 过点 A 在平面 PAB 内作与 AB 垂直的直线为 x 轴, 直线 AB 为 y 轴, 直线 AD 为 z 轴, 建立如图所示的空间直角坐标系, 则

$$A(0, 0, 0), B(0, 1, 0), C(0, 1, 1), D(0, 0, 2), P(\sqrt{3}, -1, 0), E\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}, 1\right),$$

$$\overrightarrow{DP} = (\sqrt{3}, -1, -2), \overrightarrow{DB} = (0, 1, -2), \overrightarrow{DC} = (0, 1, -1), \text{8 分}$$

$$\text{设平面 } PBD \text{ 的一个法向量为 } \mathbf{n} = (x_1, y_1, z_1), \text{ 则 } \begin{cases} \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{DP} = 0 \\ \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{DB} = 0 \end{cases}, \text{ 即 } \begin{cases} \sqrt{3}x_1 - y_1 - 2z_1 = 0 \\ y_1 - 2z_1 = 0 \end{cases},$$

$$\text{取 } z_1 = 1, \text{ 得 } \mathbf{n} = \left(\frac{4\sqrt{3}}{3}, 2, 1\right).$$

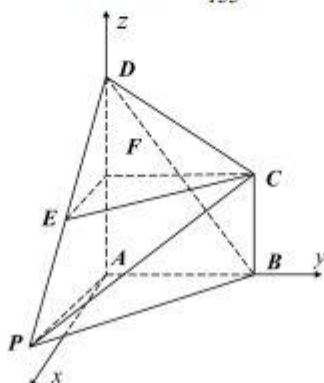
设平面 ECD 的一个法向量为 $\mathbf{m} = (x_2, y_2, z_2)$, 则 $\begin{cases} \mathbf{m} \cdot \overrightarrow{DP} = 0 \\ \mathbf{m} \cdot \overrightarrow{DC} = 0 \end{cases}$, 即 $\begin{cases} \sqrt{3}x_2 - y_2 - 2z_2 = 0 \\ y_2 - z_2 = 0 \end{cases}$.

取 $z_2 = 1$, 得 $\mathbf{m} = (\sqrt{3}, 1, 1)$,10 分

设平面 PBD 与平面 ECD 所成锐二面角为 θ , 则

$$\cos \theta = \frac{|\mathbf{n} \cdot \mathbf{m}|}{|\mathbf{n}| |\mathbf{m}|} = \frac{\left| \frac{4\sqrt{3}}{3} \times \sqrt{3} + 2 \times 1 + 1 \times 1 \right|}{\sqrt{\left(\frac{4\sqrt{3}}{3} \right)^2 + 2^2 + 1^2} \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2 + 1^2}} = \frac{7\sqrt{465}}{155}.$$

所以平面 PBD 与平面 ECD 所成锐二面角的余弦值为 $\frac{7\sqrt{465}}{155}$,12 分



19. 解: 由于直线与抛物线产生两个交点, 于是直线的斜率一定不为 0, 因此:

(1) 设直线 AB 方程为 $x = my + 4$, $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$,

把 $x = my + 4$ 与 $y^2 = 2px$ 联立得 $y^2 - 2pmy - 8p = 0$,

所以 $y_1 + y_2 = 2pm$, $y_1 y_2 = -8p$,2 分

由 $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 0$ 可得 $x_1 x_2 + y_1 y_2 = (my_1 + 4)(my_2 + 4) + y_1 y_2$

$$= (m^2 + 1)y_1 y_2 + 4m(y_1 + y_2) + 16$$

$$= -8p(m^2 + 1) + 8pm^2 + 16 = -8p + 16 = 0,$$

所以 $p = 2$, 抛物线 C 的方程为 $y^2 = 4x$,6 分

(2) 假设 x 轴上存在点 $Q(t, 0)$, 使得点 P 到直线 AQ , BQ 的距离相等,

$$\text{则 } k_{QA} + k_{QB} = 0, \text{ 即 } \frac{y_1}{x_1 - t} + \frac{y_2}{x_2 - t} = \frac{y_1}{my_1 + 4 - t} + \frac{y_2}{my_2 + 4 - t}$$

$$= \frac{2my_1 y_2 + (4 - t)(y_1 + y_2)}{(my_1 + 4 - t)(my_2 + 4 - t)} = 0, \text{ (9 分)}$$

$$\text{所以 } 2my_1 y_2 + (4 - t)(y_1 + y_2) = -16pm + 2pm(4 - t)$$

$$= -2pm(4 + t) = 0,$$

所以 $t = -4$.

所以当直线 AB 变动时, x 轴上存在点 $Q(-4, 0)$, 使得点 P 到直线 AQ, BQ 的距离相等.12 分

20. 解: (1) 由 $(11-7) \times 0.025 + (15-11) \times 0.075 = 0.4$,

$$(11-7) \times 0.025 + (15-11) \times 0.075 + (19-15) \times 0.100 = 0.8,$$

可得 $15 \leq t < 19$, 所以 $(11-7) \times 0.025 + (15-11) \times 0.075 + (t-15) \times 0.100 = 0.5$,

解得 $t = 16$. 所以该天顾客购买商品时刻的中位数为 16:00.2 分

该天顾客购买商品时刻的平均值 $\bar{x} = (9 \times 0.025 + 13 \times 0.075 + 17 \times 0.100 + 21 \times 0.050) \times 4 = 15.8$, 即

15:48.4 分

(2) 由题意可得顾客购买商品时刻 $T \sim N(15.8, 3.6^2)$, $\mu - \delta = 12.2$, $\mu + \delta = 19.4$,

所以 2019 年国庆节假期期间, 每天 12:12 ~ 19:24 之间顾客在该商场购买商品的概率

为 $P(\mu - \delta < T \leq \mu + \delta) = 0.6827$.

所以 2019 年国庆节假期期间 12:12 ~ 19:24 之间顾客在该商场购买商品的人次为

$5000 \times 0.6827 \times 7 \approx 23895$8 分

(3) 由频率分布直方图和分层抽样的方法可知抽取的 10 名幸运客户中, 在 15:00 ~ 19:00 之间购买商品的人数为 4, 所以 X 的可能取值为 0, 1, 2, 3, 4.

$$\text{所以 } P(X=0) = \frac{C_6^4}{C_{10}^4} = \frac{1}{14}, \quad P(X=1) = \frac{C_6^3 C_4^1}{C_{10}^4} = \frac{8}{21},$$

$$P(X=2) = \frac{C_6^2 C_4^2}{C_{10}^4} = \frac{3}{7}, \quad P(X=3) = \frac{C_6^1 C_4^3}{C_{10}^4} = \frac{4}{35},$$

$$P(X=4) = \frac{C_6^0 C_4^4}{C_{10}^4} = \frac{1}{210},$$

所以 X 的分布列为

X	0	1	2	3	4
P	$\frac{1}{14}$	$\frac{8}{21}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{4}{35}$	$\frac{1}{210}$

$$\text{所以 } E(X) = 0 \times \frac{1}{14} + 1 \times \frac{8}{21} + 2 \times \frac{3}{7} + 3 \times \frac{4}{35} + 4 \times \frac{1}{210} = 1.6. \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

21. 解: (1) 因为 $f(x) = a \left(\ln x + \frac{1}{x} \right) + \ln x - x - 1$,

$$\text{所以 } f'(x) = \frac{a}{x} - \frac{a}{x^2} + \frac{1}{x} - 1 = -\frac{x^2 - (a+1)x + a}{x^2} = -\frac{(x-1)(x-a)}{x^2} (x > 0),$$

① 当 $a \leq 0$ 时, $x \in (0, 1)$ 时 $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增, $x \in (1, +\infty)$ 时 $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调递减;

② 当 $0 < a < 1$ 时, $x \in (a, 1)$ 时 $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增, $x \in (0, a)$ 或 $x \in (1, +\infty)$ 时 $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调递减;

③ 当 $a = 1$ 时 $f'(x) \leq 0$, $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减;

④ 当 $a > 1$ 时, $x \in (1, a)$ 时 $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增, $x \in (0, 1)$ 或 $x \in (a, +\infty)$ 时 $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调递减.

综上可得, $a \leq 0$ 时 $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递增, 在 $(1, +\infty)$ 单调递减; $0 < a < 1$ 时 $f(x)$ 在 $(a, 1)$ 上单调递增, 在 $(0, a)$ 或 $(1, +\infty)$ 上单调递减; $a = 1$ 时 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减; $a > 1$ 时 $f(x)$ 在 $(1, a)$ 上单调递增, 在 $(0, 1)$ 或 $(a, +\infty)$ 上单调递减, ……………6 分

(2) 证明: 因为 $g(x) = f(x) - \ln x = a\left(\ln x + \frac{1}{x}\right) - x - 1$,

$$\text{所以 } g'(x) = \frac{a}{x} - \frac{a}{x^2} - 1 = -\frac{x^2 - ax + a}{x^2},$$

$g(x) = f(x) - \ln x$ 有 2 个不同的极值点 x_1, x_2 ($0 < x_1 < x_2$),

则 x_1, x_2 是方程 $x^2 - ax + a = 0$ 的两个根, 所以 $\begin{cases} a > 0 \\ a^2 - 4a > 0 \end{cases}$, 即 $a > 4$,

且 $x_1 + x_2 = a, x_1 x_2 = a$,

$$\text{所以 } f(x_1) + f(x_2) - 2x_1 x_2 = (a+1) \ln x_1 x_2 + \frac{a(x_1 + x_2)}{x_1 x_2} - (x_1 + x_2) - 2 - 2x_1 x_2$$

$$= (a+1) \ln a - 2 - 2a,$$

设 $h(a) = (a+1) \ln a - 2 - 2a$ ($a > 4$),

$$\text{因为 } a > 4, \text{ 则 } h'(a) = \frac{a+1}{a} + \ln a - 2 = \frac{1+a(\ln a - 1)}{a} > 0,$$

所以 $h(a)$ 在 $(4, +\infty)$ 上是增函数, 所以 $h(a) > h(4) = 5 \ln 4 - 10 = 5 \ln \frac{4}{e^2}$,

即 $f(x_1) + f(x_2) - 2x_1 x_2 > 5 \ln \frac{4}{e^2}$, ……………12 分

$$22. \text{ 解: (1) 直线 } l \text{ 的参数方程为 } \begin{cases} x = \sqrt{3}a + \frac{\sqrt{3}}{2}t \\ y = a - \frac{1}{2}t \end{cases}, \text{ 消去参数 } t \text{ 得直线 } l \text{ 普通方程为 } x + \sqrt{3}y = 2\sqrt{3}a, (2 \text{ 分})$$

因为点 $A(0, 4)$ 在直线 l 上, 所以 $4\sqrt{3} = 2\sqrt{3}a, a = 2$, ……………3 分

由 $\rho \cos \theta = x, \rho \sin \theta = y$ 得直线 l 的极坐标方程 $\rho \cos \theta + \sqrt{3}\rho \sin \theta = 4\sqrt{3}$,

即 $\rho \sin\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right) = 2\sqrt{3}$, ……………5 分

(2) 由曲线 C 的极坐标方程为 $\rho^2 \cos 2\theta + 4\rho^2 \sin^2 \theta = 3$, 即 $\rho^2 \cos^2 \theta + 3\rho^2 \sin^2 \theta = 3$,

得曲线 C 的直角坐标方程为 $x^2 + 3y^2 = 3$, 即 $\frac{x^2}{3} + y^2 = 1$,

则曲线 C 上的点 $Q(\sqrt{3} \cos \varphi, \sin \varphi)$ 到直线 $l: x + \sqrt{3}y = 2\sqrt{3}a$ 的距离

$$d = \frac{|\sqrt{3} \cos \varphi + \sqrt{3} \sin \varphi - 2\sqrt{3}a|}{2} = \frac{\left| \sqrt{6} \sin\left(\varphi + \frac{\pi}{4}\right) - 2\sqrt{3}a \right|}{2}.$$

因为 $a > 0$, 则由 $|PQ|$ 最小值为 $\frac{\sqrt{6}}{2}$, 可得 $2\sqrt{3}a > \sqrt{6}$, 所以 $d \geq \frac{|\sqrt{6} - 2\sqrt{3}a|}{2} = \frac{2\sqrt{3}a - \sqrt{6}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{2}$,

所以 $a = \sqrt{2}$10 分

23. 解: (1) 当 $x < 0$ 时, $f(x) > \frac{|2x|}{x}$ 等价于 $x^2 + 2|x - 1| > -2$, 该不等式恒成立,

当 $0 < x \leq 1$ 时, $f(x) > \frac{|2x|}{x}$ 等价于 $\begin{cases} 0 < x \leq 1 \\ x^2 - 2x > 0 \end{cases}$, 该不等式组的解集为 $\emptyset$,

当 $x > 1$ 时, $f(x) > \frac{|2x|}{x}$ 等价于 $\begin{cases} x > 1 \\ x^2 + 2x - 4 > 0 \end{cases}$, 解得 $x > \sqrt{5} - 1$,

综上得 $x < 0$ 或 $x > \sqrt{5} - 1$,

所以不等式 $f(x) > \frac{|2x|}{x}$ 的解集为 $(-\infty, 0) \cup (\sqrt{5} - 1, +\infty)$5 分

(2) 证明: 当 $x \geq 1$ 时 $f(x) = x^2 + 2x - 2 = (x + 1)^2 - 3$,

当 $x = 1$ 时 $f(x)$ 取得最小值 1,

当 $x < 1$ 时 $f(x) = x^2 - 2x + 2 = (x - 1)^2 + 1 > 1$,

所以 $f(x)$ 最小值为 1, 所以 $a + b + c = 1$,

因为 $a^2 + b^2 \geq \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2} + ab = \frac{(a + b)^2}{2}$,

所以 $\sqrt{a^2 + b^2} \geq \frac{\sqrt{2}|a + b|}{2} \geq \frac{\sqrt{2}(a + b)}{2}$,

同理可得 $\sqrt{b^2 + c^2} \geq \frac{\sqrt{2}(b + c)}{2}$, $\sqrt{c^2 + a^2} \geq \frac{\sqrt{2}(c + a)}{2}$

所以 $\sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{b^2 + c^2} + \sqrt{c^2 + a^2} \geq \sqrt{2}(a + b + a) = \sqrt{2}$10 分