

2019—2020 学年下学期全国百强名校

“领军考试” 高三文数参考答案

1. 【答案】D

【解析】因为 $A = \{x | 2x - 3 < 0\} = \{x | x < \frac{3}{2}\}$, $B = \{x | \log_2 x < \frac{1}{2}\} = \{x | 0 < x < \sqrt{2}\}$, 且 $\sqrt{2} < \frac{3}{2}$, 所以

$$A \cap B = \{x | 0 < x < \sqrt{2}\}, \text{故选 D.}$$

2. 【答案】B

【解析】由 $z = \frac{5+i}{1-i} - i = \frac{(5+i)(1+i)}{2} - i = 2 + 3i - i = 2 + 2i$, 所以 $z \cdot \bar{z} = 2^2 + 2^2 = 8$, 故选 B.

3. 【答案】C

【解析】直线 $y = x$ 绕原点逆时针方向旋转 $\frac{\pi}{12}$ 后得直线 $y = \sqrt{3}x$, 所以 $\frac{b}{a} = \sqrt{3}$, 双曲线 C 的离心率

$$e = \sqrt{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2} = 2, \text{故选 C.}$$

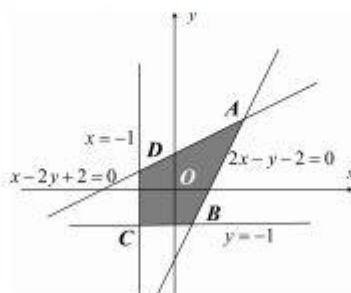
4. 【答案】B

【解析】由题意可得 $\frac{a_3^2 a_9}{a_5^2} = \frac{a_3 a_5 a_9}{a_5^2} = \frac{a_5^3}{a_5^2} = a_5 = 4$, 故选 B.

5. 【答案】A

【解析】作出不等式组 $\begin{cases} x \geq -1 \\ y \geq -1 \\ x - 2y + 2 \geq 0 \\ 2x - y - 2 \leq 0 \end{cases}$ 表示的平面区域, 如图所示, 设 $z = 3x - y$, 则 $y = 3x - z$, 当直

线 $y = 3x - z$ 经过点 $A(2, 2)$ 时, z 取到最大值, $z_{\max} = 3 \times 2 - 2 = 4$, 故选 A.



6. 【答案】C

【解析】记 3 名男生分别为 a, b, c , 2 名女生分别为 x, y , 从这 5 名学生中选 2 名学生结果有:

$ab, ac, ax, ay, bc, bx, by, cx, cy, xy$, 共 10 种, 既有男生又有女生的结果有: ax, ay, bx, by, cx, cy , 共 6 种,

所以所求概率 $P = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$, 故选 C.

7. 【答案】D

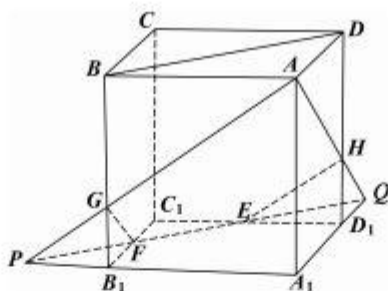
【解析】由题意知 $\bar{x} = 17.5$, $\bar{z} = 39$, 代入 $\hat{z} = -4x + \hat{a}$ 得 $\hat{a} = 109$, 所以 $z = \ln y = \ln ce^{kx} = kx + \ln c$, 所以 $\ln c = 109$, $c = e^{109}$, 故选 D.

8. 【答案】C

【解析】第一次执行循环: $k = 1$, $s = 1 + f(1) = 1 - 1 = 0$; 第二次执行循环: $k = 2$, $s = 0 + 2f(2) = 0 + 2 = 2$; 第三次执行循环: $k = 3$, $s = 2 + 3f(3) = 2 - 3 = -1$; 第四次执行循环: $k = 4$, $s = -1 + 4f(4) = -1 + 4 = 3$, 满足条件, 结束循环, 所以判断框内填入的条件可以是 $s \geq 3$?, 故选 C.

9. 【答案】B

【解析】分别取 D_1C_1 中点 E , B_1C_1 中点 F , BB_1 三等分点 G , DD_1 三等分点 H , 则五边形 $AHEFG$ 就是平面 α 与各面的交线所组成的, 其中 $AH = AG = \frac{2\sqrt{13}}{3}$, $HE = GF = \frac{\sqrt{13}}{3}$, $EF = \sqrt{2}$, 所以平面 α 与正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 各面交线长度之和为 $2\sqrt{13} + \sqrt{2}$, 故选 B.



10. 【答案】B

【解析】 $f(x_1 + x_2) = \frac{1}{2}f(x_1)f(x_2)$ 中令 $x_1 = x_2 = 1$, 得 $f(2) = \frac{1}{2}f(1)f(1) = 18$. 令 $x_1 = x_2 = 0$, 得 $f(0) = 2$, 所以 $2 < f(a+1) < 18$, 即 $f(0) < f(a+1) < f(2)$, 因为 $f(x)$ 为定义在 $(-\infty, +\infty)$ 上的增函数, 所以 $0 < a+1 < 2$, $-1 < a < 1$, 故选 B.

11. 【答案】A

【解析】取特殊位置, 椭圆 C 在长轴右端点与短轴上端点处的切线互相垂直, 两切线方程分别为直线 $x = \sqrt{a+2}$, $y = \sqrt{a}$, 交点为 $(\sqrt{a+2}, \sqrt{a})$, 所以 $(\sqrt{a+2})^2 + (\sqrt{a})^2 = 4$, 所以 $a = 1$, 故选 A.

12. 【答案】D

【解析】由 $a_n = (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} n$ 可得 $a_{4k-3} + a_{4k-2} + a_{4k-1} + a_{4k} = -(4k-3) - (4k-2) + (4k-1) + 4k = 4$ ，所以 $S_{2019} = S_{2020} - a_{2020} = 505 \times 4 - 2020 = 0$ ，故选 D.

13. 【答案】 $3x + 3y + 1 = 0$

【解析】由 $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + x^2$ 可得 $f'(x) = x^2 + 2x$ ，由 $x^2 + 2x = -1$ 得 $x = -1$ ，所以切点为 $\left(-1, \frac{2}{3}\right)$ ，所以

直线 l 的方程为 $y - \frac{2}{3} = -(x + 1)$ ，即 $3x + 3y + 1 = 0$.

14. 【答案】5

【解析】由 $a = (-1, 2), b = (1, 1)$ ，得 $a^2 = 5$ ， $a \cdot b = -1 \times 1 + 2 \times 1 = 1$ ，所以

$a \cdot (a - kb) = a^2 - ka \cdot b = 5 - k = 0$ ，所以 $k = 5$.

15. 【答案】 $\left[\frac{1}{4}, +\infty\right)$

【解析】由 $x \in [-2\pi, 2\pi]$ 得 $\omega x \in [-2\omega\pi, 2\omega\pi]$ ，所以当 $-2\omega\pi \leq -\frac{\pi}{2}$ 或 $2\omega\pi \geq \frac{3\pi}{2}$ ，即 $\omega \geq \frac{1}{4}$ 或 $\omega \geq \frac{3}{4}$ ，所以

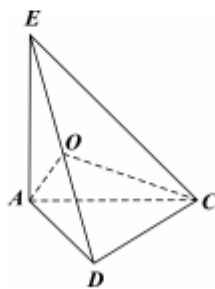
以 ω 的取值范围是 $\left[\frac{1}{4}, +\infty\right)$.

16. 【答案】 3π

【解析】由题意可得 $EA = AC = CD = 1, EC = AD = \sqrt{2}$ ，所以 $EA \perp AC, EC \perp CD$ ，结合平面 $AEC \perp$ 平面

ACD ，可得 $EA \perp AD, EC \perp CD$ ，取 ED 中点 O ，则 $OA = OC = OD = OE = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ，所以 O 是球心，球的半

径 $R = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ，所以该球的表面积 $S = 4\pi R^2 = 3\pi$.



17. 解: (1) 由 $(11-7) \times 0.025 + (15-11) \times 0.075 = 0.4$,

$$(11-7) \times 0.025 + (15-11) \times 0.075 + (19-15) \times 0.100 = 0.8,$$

可得 $15 < t < 19$, 所以 $(11-7) \times 0.025 + (15-11) \times 0.075 + (t-15) \times 0.100 = 0.5$,

解得 $t = 16$, 所以该天顾客购买商品时刻的中位数为 16:00.3 分

该天顾客购买商品时刻的平均值 $\bar{x} = (9 \times 0.025 + 13 \times 0.075 + 17 \times 0.100 + 21 \times 0.050) \times 4 = 15.8$, 即

15:48.6 分

(2) 根据题设中的数据得到如下 2×2 列联表:

	白天	夜晚	总计
男顾客	30	10	40
女顾客	50	10	60
总计	80	20	100

.....8 分

将 2×2 列联表中的数据代入公式计算, 得 $K^2 = \frac{100(50 \times 10 - 30 \times 10)^2}{80 \times 20 \times 60 \times 40} \approx 1.042 < 2.706$.

所以没有 90% 的把握认为“男顾客更喜欢在夜晚购物”.12 分

18. 解: (1) 由 $3AC \tan C + AB(\tan \angle BAC + \tan C) = 0$ 及正弦定理得

$$(3 \sin B + \sin C) \frac{\sin C}{\cos C} + \frac{\sin C \sin \angle BAC}{\cos \angle BAC} = 0, \text{ 由 } 0 < C < \pi, \sin C \neq 0 \text{ 得}$$

$$(3 \sin B + \sin C) \cos \angle BAC + \sin \angle BAC \cos C = 0,$$

$$\text{整理得 } 3 \sin B \cos \angle BAC + \sin C \cos \angle BAC + \sin \angle BAC \cos C = 0,$$

$$\text{即 } 3 \sin B \cos \angle BAC + \sin(\angle BAC + C) = 0, \text{ 即 } 3 \sin B \cos \angle BAC + \sin B = 0, \text{3 分}$$

$$\text{因为 } 0 < B < \pi, \sin B \neq 0,$$

$$\text{所以 } \cos \angle BAC = -\frac{1}{3}. \text{6 分}$$

$$(2) \text{ 由 } \cos \angle BAC = -\frac{1}{3}, \text{ 可得 } \sin \angle BAC = \frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

$$\text{由 } \angle BAD = \angle CAD \text{ 可得 } \sin \angle BAD = \sin \angle CAD = \sqrt{\frac{1 - \cos \angle BAC}{2}} = \sqrt{\frac{1 + \frac{1}{3}}{2}} = \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

由 $S_{\triangle ABC} = S_{\triangle ABD} + S_{\triangle ACD}$ 可得

$$\frac{1}{2} AB \cdot AC \sin \angle BAC = \frac{1}{2} AB \cdot AD \sin \angle BAD + \frac{1}{2} AC \cdot AD \sin \angle CAD,$$

整理得 $2\sqrt{2} = \sqrt{6}AD + \frac{\sqrt{6}}{3}AD$, 所以 $AD = \frac{\sqrt{3}}{2}$6 分

19. (1)证明: 作 $CF \perp DA$, 垂足为 F , 则 $CF \parallel AB$, $CF = AB = 1$,

因为 $CD = \sqrt{2}$, 所以 $DF = \sqrt{CD^2 - CF^2} = \sqrt{2-1} = 1$, 所以点 F 为 AD 中点,

由 $CF \parallel AB$, $CF \not\subset$ 平面 PAB , $AB \subset$ 平面 PAB , 可得 $CF \parallel$ 平面 PAB ,3 分

连接 EF , 则 $EF \parallel PA$, $EF \not\subset$ 平面 PAB , $PA \subset$ 平面 PAB , 可得 $EF \parallel$ 平面 PAB ,

因为 $CF \cap EF = F$, 所以平面 $CFE \parallel$ 平面 PAB ,

因为 $CE \subset$ 平面 CFE , 所以 $CE \parallel$ 平面 PAB5 分

(2)解: 因为 $PA \perp DA$, $DA \perp AB$, $PA \cap AB = A$,

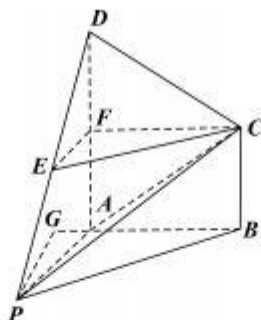
所以 $DA \perp$ 平面 PAB ,

因为 $DA \subset$ 平面 $ABCD$, 所以平面 $PAB \perp$ 平面 $ABCD$,

过点 P 作直线 AB 的垂线, 垂足为 G , 则 $PG \perp$ 平面 $ABCD$,

且 $PG = PA \sin \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$,

所以 $V_{A-PCD} = V_{P-ACD} = \frac{1}{3} \times PG \times \frac{1}{2} \times DA \times CF = \frac{1}{3} \times \sqrt{3} \times \frac{1}{2} \times 2 \times 1 = \frac{\sqrt{3}}{3}$12 分



20. 解: 由于直线与抛物线产生两个交点, 于是直线的斜率一定不为 0, 因此:

(1) 设直线 AB 方程为 $x = my + 4$, $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$,

把 $x = my + 4$ 与 $y^2 = 2px$ 联立得 $y^2 - 2pmy - 8p = 0$,

所以 $y_1 + y_2 = 2pm$, $y_1y_2 = -8p$,2 分

由 $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 0$ 可得 $x_1x_2 + y_1y_2 = (my_1 + 4)(my_2 + 4) + y_1y_2$

$= (m^2 + 1)y_1y_2 + 4m(y_1 + y_2) + 16$

$$= -8p(m^2 + 1) + 8pm^2 + 16 = -8p + 16 = 0,$$

所以 $p = 2$, 抛物线 C 的方程为 $y^2 = 4x$6 分

(2) 假设 x 轴上存在点 $Q(t, 0)$, 使得点 P 到直线 AQ, BQ 的距离相等,

$$\text{则 } k_{QA} + k_{QB} = 0, \text{ 即 } \frac{y_1}{x_1 - t} + \frac{y_2}{x_2 - t} = \frac{y_1}{my_1 + 4 - t} + \frac{y_2}{my_2 + 4 - t}$$

$$= \frac{2my_1y_2 + (4-t)(y_1 + y_2)}{(my_1 + 4 - t)(my_2 + 4 - t)} = 0, \text{9 分}$$

$$\text{所以 } 2my_1y_2 + (4-t)(y_1 + y_2) = -16pm + 2pm(4-t)$$

$$= -2pm(4+t) = 0,$$

所以 $t = -4$.

所以当直线 AB 变动时, x 轴上存在点 $Q(-4, 0)$, 使得点 P 到直线 AQ, BQ 的距离相等.12 分

$$21. \text{解: (1) 因为 } f(x) = \frac{1}{2}x^2 - a \ln x + 1,$$

$$\text{所以 } f'(x) = x - \frac{a}{x} = \frac{x^2 - a}{x} (x > 0),$$

① 当 $a \leq 0$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增;

② 当 $a > 0$ 时, $x \in (0, \sqrt{a})$ 时 $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调递减, $x \in (\sqrt{a}, +\infty)$ 时 $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增.

综上可得, $a \leq 0$ 时 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增; $a > 0$ 时 $f(x)$ 在 $(0, \sqrt{a})$ 上单调递减, 在 $(\sqrt{a}, +\infty)$ 上单调递增.5 分

$$(2) \text{ 证明: ① 解法一: 因为 } g(x) = f(x) + a(\ln x - x) + \ln x = \frac{1}{2}x^2 - ax + \ln x + 1,$$

$$\text{所以 } g'(x) = x - a + \frac{1}{x} = \frac{x^2 - ax + 1}{x},$$

$g(x)$ 有 2 个不同的极值点 x_1, x_2 ($0 < x_1 < x_2$),

则 x_1, x_2 是方程 $x^2 - ax + 1 = 0$ 的两个根, 由 $2 < a < e + \frac{1}{e}$ 得, $\Delta = a^2 - 4 > 0$,

且 $x_1 + x_2 = a, x_1x_2 = 1$, 结合 $0 < x_1 < x_2$, 可得 $0 < x_1 < 1 < x_2$, 由 $x_1 + x_2 = x_1 + \frac{1}{x_1} = a < e + \frac{1}{e}$.

得 $\frac{(x_1 - e)(x_1 - \frac{1}{e})}{x_1} < 0$, 所以 $\frac{1}{e} < x_1 < 1$9 分

解法二: 因为 $g(x) = f(x) + a(\ln x - x) + \ln x = \frac{1}{2}x^2 - ax + \ln x + 1$,

所以 $g'(x) = x - a + \frac{1}{x} = \frac{x^2 - ax + 1}{x}$, $g(x)$ 有 2 个不同的极值点 x_1, x_2 ($0 < x_1 < x_2$).

则 x_1, x_2 是方程 $x^2 - ax + 1 = 0$ 的两个根, 由 $2 < a < e + \frac{1}{e}$ 得, $\Delta = a^2 - 4 > 0$,

且 $x_1 + x_2 = a, x_1 x_2 = 1$, 结合 $0 < x_1 < x_2$, 可得 $0 < x_1 < 1 < x_2$.

设 $m(x) = x^2 - ax + 1 = 0$, 因为 $m(\frac{1}{e}) = \frac{1}{e^2} - \frac{a}{e} + 1 = \frac{1 + e - a}{e} > 0$, $m(1) = 2 - a < 0$,

由零点存在定理得 $\frac{1}{e} < x_1 < 1$9 分

$$\textcircled{2} g(x_1) - g(x_2) = \frac{1}{2}x_1^2 - ax_1 + \ln x_1 + 1 - \frac{1}{2}x_2^2 + ax_2 - \ln x_2 - 1$$

$$= \frac{1}{2}(x_1 + x_2)(x_1 - x_2) - a(x_1 - x_2) + 2\ln x_1$$

$$= -\frac{1}{2}(x_1 + x_2)(x_1 - x_2) + 2\ln x_1 = \frac{1}{2x_1^2} - \frac{1}{2}x_1^2 + 2\ln x_1 \left(\frac{1}{e} < x_1 < 1 \right).$$

$$\text{设 } h(t) = \frac{1}{2t^2} - \frac{1}{2}t^2 + 2\ln t \left(\frac{1}{e} < t < 1 \right),$$

$$\text{则 } h'(t) = -\frac{1}{t^3} - t + \frac{2}{t} = -\frac{(t^2 - 1)^2}{t^3} < 0.$$

$$\text{故 } y = h(t) \text{ 在 } \left(\frac{1}{e}, 1 \right) \text{ 单调递减, } h(t) < h\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{2e^2} - 2.$$

$$\text{所以 } g(x_1) - g(x_2) < \frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{2e^2} - 2. \text{12 分}$$

$$22. \text{ 解: (1) 直线 } l \text{ 的参数方程为 } \begin{cases} x = \sqrt{3}a + \frac{\sqrt{3}}{2}t \\ y = a - \frac{1}{2}t \end{cases}, \text{ 消去参数 } t \text{ 得直线 } l \text{ 普通方程为 } x + \sqrt{3}y = 2\sqrt{3}a, (2 \text{ 分})$$

因为点 $A(0, 4)$ 在直线 l 上, 所以 $4\sqrt{3} = 2\sqrt{3}a, a = 2$,3 分

由 $\rho \cos \theta = x, \rho \sin \theta = y$ 得直线 l 的极坐标方程 $\rho \cos \theta + \sqrt{3}\rho \sin \theta = 4\sqrt{3}$.

即 $\rho \sin\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right) = 2\sqrt{3}$5 分

(2)由曲线 C 的极坐标方程为 $\rho^2 \cos 2\theta + 4\rho^2 \sin^2 \theta = 3$, 即 $\rho^2 \cos^2 \theta + 3\rho^2 \sin^2 \theta = 3$,

得曲线 C 的直角坐标方程为 $x^2 + 3y^2 = 3$, 即 $\frac{x^2}{3} + y^2 = 1$,

则曲线 C 上的点 $Q(\sqrt{3}\cos\varphi, \sin\varphi)$ 到直线 $l: x + \sqrt{3}y = 2\sqrt{3}a$ 的距离

$$d = \frac{|\sqrt{3}\cos\varphi + \sqrt{3}\sin\varphi - 2\sqrt{3}a|}{2} = \frac{|\sqrt{6}\sin\left(\varphi + \frac{\pi}{4}\right) - 2\sqrt{3}a|}{2},$$

因为 $a > 0$, 则由 $|PQ|$ 最小值为 $\frac{\sqrt{6}}{2}$, 可得 $2\sqrt{3}a > \sqrt{6}$, 所以 $d \geq \frac{|\sqrt{6} - 2\sqrt{3}a|}{2} = \frac{2\sqrt{3}a - \sqrt{6}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{2}$,

所以 $a = \sqrt{2}$10 分

23. 解: (1)当 $x < 0$ 时, $f(x) > \frac{|2x|}{x}$ 等价于 $x^2 + 2|x-1| > -2$, 该不等式恒成立,

当 $0 < x \leq 1$ 时, $f(x) > \frac{|2x|}{x}$ 等价于 $\begin{cases} 0 < x \leq 1 \\ x^2 - 2x > 0 \end{cases}$, 该不等式组的解集为 $\emptyset$,

当 $x > 1$ 时, $f(x) > \frac{|2x|}{x}$ 等价于 $\begin{cases} x > 1 \\ x^2 + 2x - 4 > 0 \end{cases}$, 解得 $x > \sqrt{5} - 1$,

综上得 $x < 0$ 或 $x > \sqrt{5} - 1$,

所以不等式 $f(x) > \frac{|2x|}{x}$ 的解集为 $(-\infty, 0) \cup (\sqrt{5} - 1, +\infty)$5 分

(2)当 $x \geq 1$ 时 $f(x) = x^2 + 2x - 2 = (x+1)^2 - 3$,

当 $x = 1$ 时 $f(x)$ 取得最小值 1,

当 $x < 1$ 时 $f(x) = x^2 - 2x + 2 = (x-1)^2 + 1 > 1$,

所以 $f(x)$ 最小值为 1, 所以 $a + b + c = 1$,

因为 $a^2 + b^2 \geq \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2} + ab = \frac{(a+b)^2}{2}$,

所以 $\sqrt{a^2 + b^2} \geq \frac{\sqrt{2}|a+b|}{2} \geq \frac{\sqrt{2}(a+b)}{2}$,

同理可得 $\sqrt{b^2 + c^2} \geq \frac{\sqrt{2}(b+c)}{2}$, $\sqrt{c^2 + a^2} \geq \frac{\sqrt{2}(c+a)}{2}$

所以 $\sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{b^2 + c^2} + \sqrt{c^2 + a^2} \geq \sqrt{2}(a+b+a) = \sqrt{2}$10 分