

理科数学测试题答案

(本试卷满分150分, 考试用时120分钟)

第I卷 (选择题)

一、单选题: 本大题共12小题, 每小题5分, 共60分。在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合 $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $A = \{1, 3, 5\}$, $B = \{2, 3, 4\}$, 则集合 $A \cap \complement_U B$ 是()

A. $\{1, 3, 5, 6\}$ B. $\{1, 3, 5\}$ C. $\{1, 3\}$ D. $\{1, 5\}$

【答案】D $\because$ 集合 $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $A = \{1, 3, 5\}$, $B = \{2, 3, 4\}$, 则 $\complement_U B = \{1, 5, 6\}$, 因此, $A \cap \complement_U B = \{1, 5\}$. 故选: D.

2. 已知复数 z 满足 $\bar{z}(1-i) = 3+i$ (i 为虚数单位), 则复数 $z =$ ()

A. $1+2i$ B. $1-2i$ C. $2+i$ D. $2-i$

【答案】B 由题意 $\bar{z}(1-i) = 3+i$, 可变形为 $\bar{z} = \frac{3+i}{1-i} = \frac{(3+i)(1+i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{2+4i}{2} = 1+2i$. 则复数 $z = 1-2i$. 故选: B.

3. 等比数列 $\{a_n\}$ 的各项均为正数, 已知向量 $\vec{a} = (a_4, a_5)$, $\vec{b} = (a_7, a_6)$, 且 $\vec{a} \cdot \vec{b} = 4$, 则 $\log_2 a_1 + \log_2 a_2 + \dots + \log_2 a_{10} =$ ()

A. 12 B. 10 C. 5 D. $2 + \log_2 5$

【答案】C 向量 $\vec{a} = (a_4, a_5)$, $\vec{b} = (a_7, a_6)$, 且 $\vec{a} \cdot \vec{b} = 4$, $\therefore a_4 a_7 + a_5 a_6 = 4$, 由等比数列的性质可得: $a_1 a_{10} = \dots = a_4 a_7 = a_5 a_6 = 2$, 则 $\log_2 a_1 + \log_2 a_2 + \dots + \log_2 a_{10} = \log_2 (a_1 a_2 \cdot a_{10}) = \log_2 (a_1 a_{10})^5 = \log_2 2^5 = 5$. 故选 C.

4. 下列四个命题:

- ① 函数 $f(x) = \cos x \sin x$ 的最大值为1;
- ② “ $\forall x \in R, x^3 - x^2 + 1 \leq 0$ ”的否定是“ $\exists x_0 \in R, x^3 - x^2 + 1 > 0$ ”;
- ③ 若 $\triangle ABC$ 为锐角三角形, 则有 $\sin A + \sin B + \sin C > \cos A + \cos B + \cos C$;
- ④ “ $a \leq 0$ ”是“函数 $f(x) = |x^2 - ax|$ 在区间 $(0, +\infty)$ 内单调递增”的充分必要条件.

其中错误的个数是()

A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

【答案】A

解: ① 由 $f(x) = \cos x \sin x = \frac{1}{2} \sin 2x$, 得 $f(x)$ 的最大值为 $\frac{1}{2}$, 故 ① 错误;

② “ $\forall x \in R, x^3 - x^2 + 1 \leq 0$ ”的否定是“ $\exists x_0 \in R, x_0^3 - x_0^2 + 1 > 0$ ”, 故 ② 正确;

③ $\because \triangle ABC$ 为锐角三角形, $\therefore A + B > \frac{\pi}{2}$, 则 $A > \frac{\pi}{2} - B$,

$\because y = \sin x$ 在 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 上是增函数, $\sin A > \sin\left(\frac{\pi}{2} - B\right) = \cos B$, 同理可得 $\sin B > \cos C$,

$\sin C > \cos A$, $\therefore \sin A + \sin B + \sin C > \cos A + \cos B + \cos C$, 故 ③ 正确;

④ $a \leq 0$, 函数 $f(x) = |x^2 - ax|$ 的零点是 $a, 0$, 结合二次函数的对称轴,

可得函数 $f(x) = |x^2 - ax|$ 在区间 $(0, +\infty)$ 内单调递增;

若函数 $f(x) = |x^2 - ax|$ 在区间 $(0, +\infty)$ 内单调递增, 结合二次函数的对称轴, 可得

$$\frac{a}{2} \leq 0,$$

$\therefore a \leq 0$, $\therefore$ “ $a \leq 0$ ”是“函数 $f(x) = |x^2 - ax|$ 在区间 $(0, +\infty)$ 内单调递增”的充分必要条件, 故 ④ 正确. 其中错误的个数是 1. 故选: A.

5. 在锐角 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 若 $\sin^2 C - \cos^2 C = \frac{1}{2}$,

则下列各式正确的是 ()

A. $a + b = 2c$

B. $a + b \leq 2c$

C. $a + b < 2c$

D. $a + b \geq 2c$

【答案】B

$$\sin^2 C - \cos^2 C = -\cos 2C = \frac{1}{2} \text{ 即 } \cos 2C = -\frac{1}{2}, \quad C \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\therefore 2C = \frac{2}{3}\pi, \quad \therefore C = \frac{\pi}{3}, \text{ 根据正弦定理可知 } \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R,$$

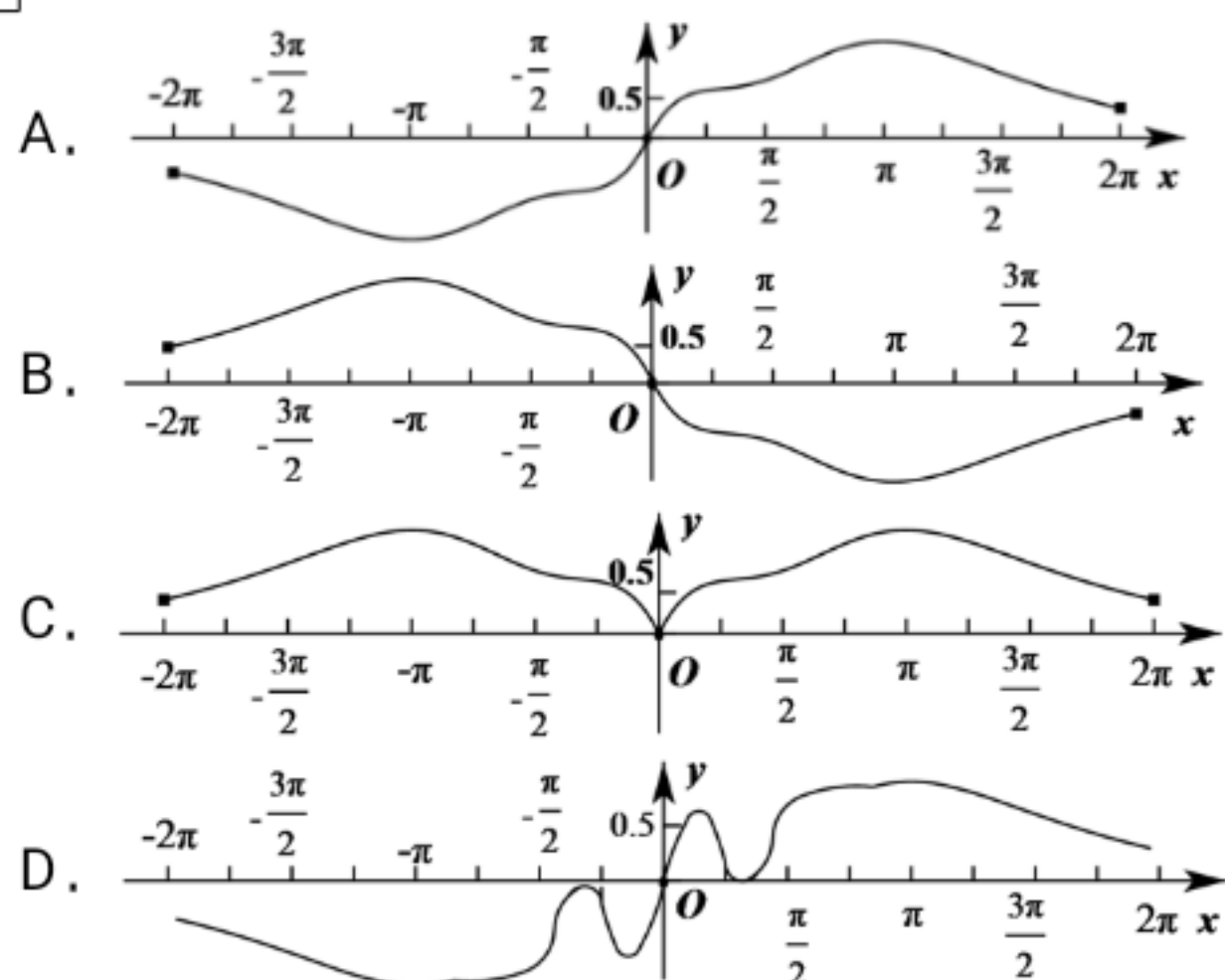
$$\therefore a + b - 2c = 2R(\sin A + \sin B - 2\sin C),$$

$$= \frac{3}{2}\sin A + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos A - \sqrt{3} = \sqrt{3}\sin\left(A + \frac{\pi}{6}\right) - \sqrt{3} \leq 0, \text{ 当 } A = \frac{\pi}{3}$$

$$\sin A + \sin B - 2\sin C = \sin A + \sin\left(A + \frac{\pi}{3}\right) - \sqrt{3} \text{ 时, 等号成立,}$$

$$\therefore a + b - 2c \leq 0 \text{ 即 } a + b \leq 2c. \text{ 故选: B}$$

6. 函数 $f(x) = \frac{\sin 2x + x^3}{e^{|x|}}$ 在 $[-2\pi, 2\pi]$ 上的图象大致为 ()



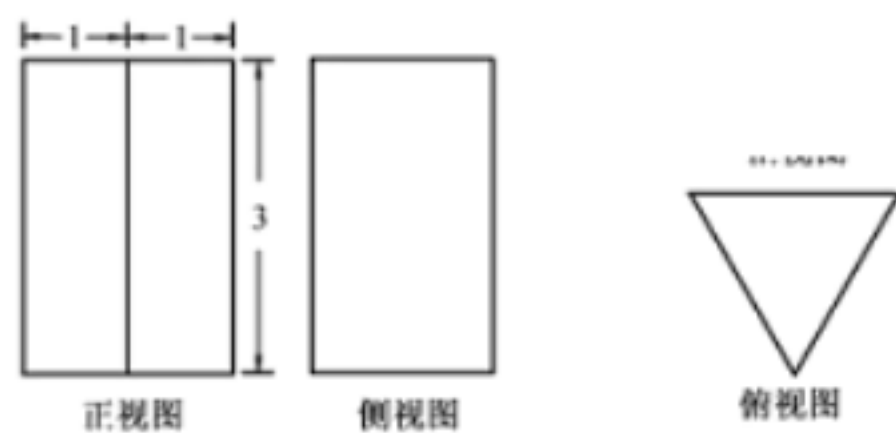
【答案】A

依题意, $f(-x) = \frac{\sin 2(-x) + (-x)^3}{e^{-|x|}} = -\frac{\sin 2x + x^3}{e^{|x|}} = -f(x)$, 故函数 $f(x)$ 为奇函数, 图象关于原点对称, 排除C;

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sin \frac{\pi}{2} + \left(\frac{\pi}{4}\right)^3}{e^{\frac{\pi}{4}}} > \frac{1 + \frac{\pi^3}{64}}{e} > \frac{1 + \frac{3^3}{4}}{2.8} = \frac{1 + \frac{27}{4}}{2.8} = \frac{91}{2.8 \times 64} = \frac{91}{179.2} > \frac{91}{182} = 0.5, \text{ 排除B, D. 故选: A}$$

除B, D. 故选: A

7. 某简单几何体的三视图 (俯视图为等边三角形) 如图所示 (单位: cm), 则该几何体的体积 (单位: cm^3) 为



- A. 18 B. $6\sqrt{3}$ C. $3\sqrt{3}$ D. $2\sqrt{3}$

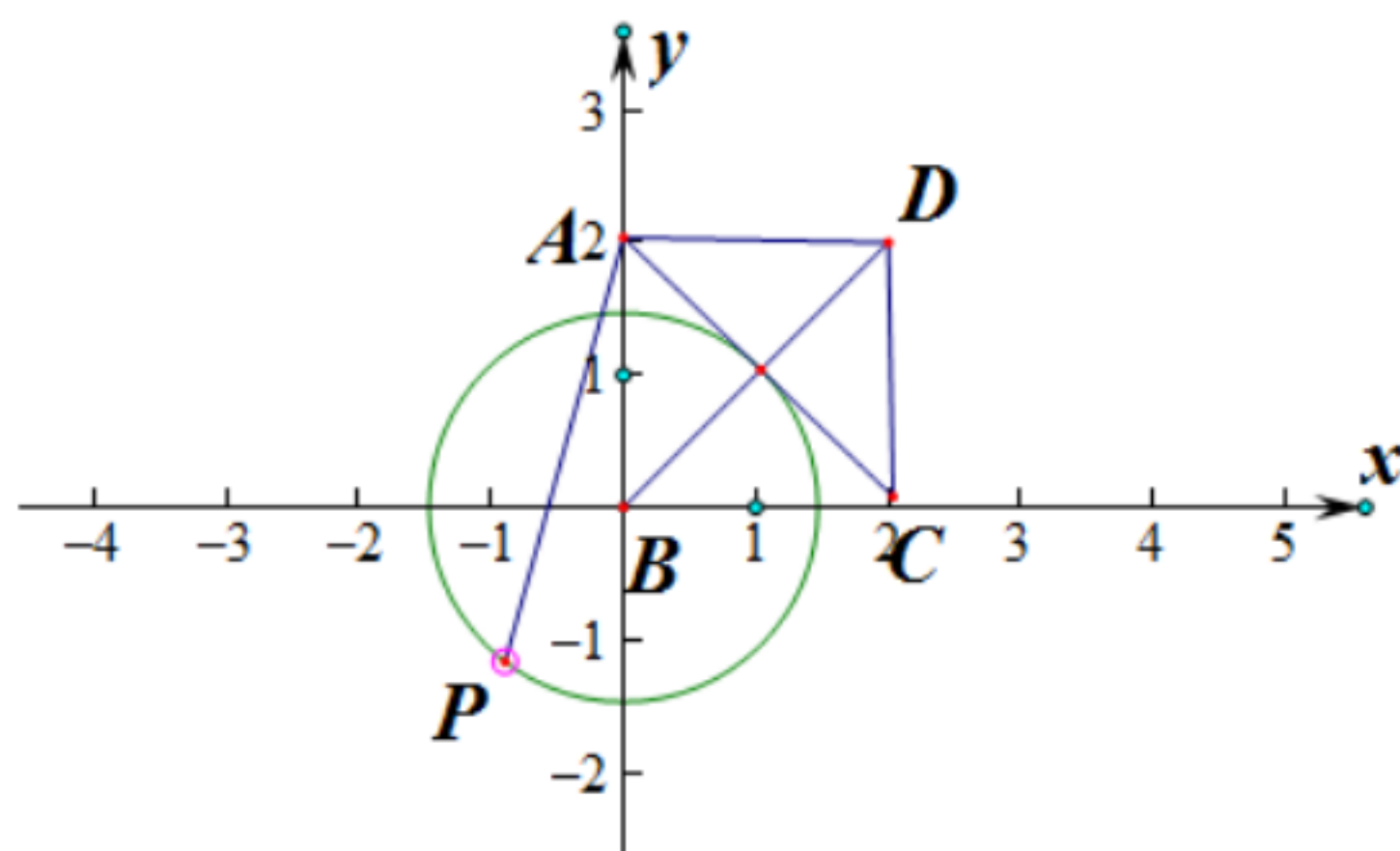
【答案】C

由题意可知几何体是底面为正三角形的三棱柱, 底面边长为2, 高为3, 所以几何体的体积为 $\frac{\sqrt{3}}{4} \times 2^2 \times 3 = 3\sqrt{3}$, 故选C.

8. 已知正方形 $ABCD$ 的边长为2, 以 B 为圆心的圆与直线 AC 相切. 若点 P 是圆 B 上的动点, 则 $\overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{AP}$ 的最大值是 ()

- A. $2\sqrt{2}$ B. $4\sqrt{2}$ C. 4 D. 8

【答案】D如图，建立平面直角坐标系，则 $B(0,0)$ ， $A(0,2)$ ， $D(2,2)$ ，
圆 B 的方程为： $x^2 + y^2 = 2$ ， $\therefore P(\sqrt{2}\cos\theta, \sqrt{2}\sin\theta)$ ， $\therefore \overrightarrow{DB} = (-2, -2)$ ，
 $\overrightarrow{AP} = (\sqrt{2}\cos\theta, \sqrt{2}\sin\theta - 2)$ ，
 $\therefore \overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{AP} = -2\sqrt{2}\cos\theta - 2\sqrt{2}\sin\theta + 4 = 4 - 4\sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right)$ $\therefore \sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) = -1$ 时，
 $\overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{AP}$ 的最大值是 8，故选：D



9. 已知函数 $f(x) = 2\sin(\omega x + \varphi) + 1$ ($\omega > 1$, $|\varphi| \leq \frac{\pi}{2}$)，其图像与直线 $y = -1$
相邻两个交点的距离为 π ，若 $f(x) > 1$ 对于任意的 $x \in \left(-\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{3}\right)$ 恒成立，则 φ 的
取值范围是

A $\left[\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{3}\right]$ B $\left[\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{2}\right]$ C $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right]$ D $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right]$

【答案】C

令 $f(x) = 2\sin(\omega x + \varphi) + 1 = -1$ ，可得 $\sin(\omega x + \varphi) = -1$ ， $\therefore$ 函数

$f(x) = 2\sin(\omega x + \varphi) + 1$ ($\omega > 1$, $|\varphi| \leq \frac{\pi}{2}$) 的图像与直线 $y = -1$ 相邻两个交点的
距离为 π ， $\therefore$ 函数 $g(x) = \sin(\omega x + \varphi)$ 的图像与直线 $y = -1$ 相邻两个交点的距离
为 π ， $\therefore$ 函数 $g(x)$ 的周期为 π ，故 $\frac{2\pi}{\omega} = \pi$ ， $\therefore \omega = 2$ 。 $\therefore$

$f(x) = 2\sin(2x + \varphi) + 1$ 。由题意得“ $f(x) > 1$ 对于任意的 $x \in \left(-\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{3}\right)$ 恒成立”等价
于“ $\sin(2x + \varphi) > 0$ 对于任意的 $x \in \left(-\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{3}\right)$ 恒成立”。 $\therefore -\frac{\pi}{12} < x < \frac{\pi}{3}$ $\therefore$

$$-\frac{\pi}{6} + \varphi < 2x + \varphi < \frac{2\pi}{3} + \varphi, \therefore \left(-\frac{\pi}{6} + \varphi, \frac{2\pi}{3} + \varphi\right) \subseteq (2k\pi, 2k\pi + \pi), k \in \mathbb{Z}, \therefore$$

$$\frac{\pi}{6} + 2k\pi \leq \varphi \leq 2k\pi + \frac{\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}。故结合所给选项可得C正确。选C。$$

10. 已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 , 点 P 为椭圆上不同于左、右顶点的任意一点, I 为 $\triangle PF_1F_2$ 的内心, 且 $S_{\triangle IPF_1} = \lambda S_{\triangle IF_1F_2} - S_{\triangle IPF_2}$, 若椭圆的离心率为 e , 则 $\lambda =$ ()

- A. $\frac{1}{e}$ B. $\frac{2}{e}$ C. e D. $2e$

【答案】A 设 $\triangle PF_1F_2$ 内切圆的半径为 r

$$\text{则 } S_{\triangle IPF_1} = \frac{1}{2}r \cdot |PF_1|, \quad S_{\triangle IPF_2} = \frac{1}{2}r \cdot |PF_2|, \quad S_{\triangle IF_1F_2} = \frac{1}{2}r \cdot |F_1F_2|.$$

$$\because S_{\triangle IPF_1} = \lambda S_{\triangle IF_1F_2} - S_{\triangle IPF_2}, \quad \therefore \frac{1}{2}r \cdot |PF_1| = \frac{\lambda}{2}r \cdot |F_1F_2| - \frac{1}{2}r \cdot |PF_2|$$

整理得 $\lambda |F_1F_2| = |PF_1| + |PF_2|$. $\because P$ 为椭圆上的点, $\therefore \lambda \cdot 2c = 2a$, 解得 $\lambda = \frac{1}{e}$. 故

选: A

11. 已知椭圆 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ 的右焦点 F 是抛物线 $y^2 = 2px (p > 0)$ 的焦点, 则过 F 作倾斜角为 60° 的直线分别交抛物线于 A, B (A 在 x 轴上方) 两点, 则 $\frac{|AF|}{|BF|}$ 的值为 ()

- A. $\sqrt{3}$ B. 2 C. 3 D. 4

【答案】C

由椭圆 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$, 可得右焦点为 $(1, 0)$, 所以 $\frac{p}{2} = 1$, 解得 $p = 2$,

设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, 由抛物线的定义可得

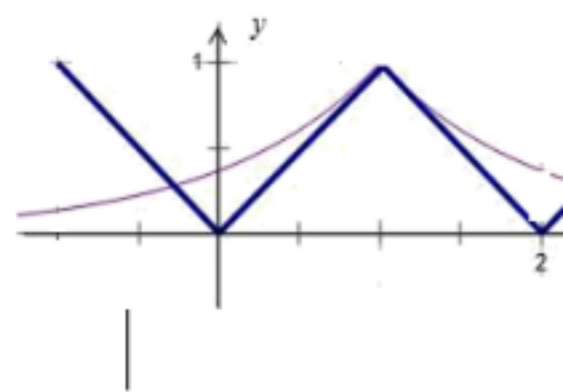
$$|AB| = x_1 + x_2 + p = \frac{2p}{\sin^2 60^\circ} = \frac{8p}{3} = \frac{16}{3}, \text{ 所以 } x_1 + x_2 = \frac{10}{3},$$

又由 $x_1 x_2 = \frac{p^2}{4} = 1$, 可得 $x_1 = 3, x_2 = \frac{1}{3}$, 所以 $\frac{|AF|}{|BF|} = \frac{x_1 + \frac{p}{2}}{x_2 + \frac{p}{2}} = \frac{3+1}{\frac{1}{3}+1} = 3$. 故选 C.

12. 已知定义在 $\mathbb{R}$ 上的偶函数 $f(x)$ 满足 $f(1+x) = f(1-x)$, 当 $x \in [0, 1]$ 时, $f(x) = x$. 函数 $g(x) = e^{-|x-1|} (-1 < x < 3)$, 则 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的图象所有交点的横坐标之和为

- A. 3 B. 4 C. 5 D. 6

【答案】A 【解析】根据题意, 函数 $f(x)$ 满足 $f(1+x) = f(1-x)$, 则 $f(x)$ 的图象关于直线 $x = 1$ 对称, 函数 $g(x) = e^{-|x-1|} (-1 < x < 3)$ 的图象也关于直线 $x = 1$ 对称, 函数 $y = f(x)$ 的图象与函数 $g(x) = e^{-|x-1|} (-1 < x < 3)$ 的图象的位置关系如图所示,



可知两个图象有3个交点，一个在直线 $x=1$ 上，另外2个关于直线 $x=1$ 对称，则两个函数图象所有交点的横坐标之和为3；故选：A.

第II卷（非选择题）

二、填空题：本大题共4小题，每小题5分，共20分。把答案填在题中的横线上。

13. 已知 x, y 满足条件 $\begin{cases} x+y-2 \leq 0 \\ x-2y-2 \leq 0 \\ 2x-y+2 \geq 0 \end{cases}$ ，若目标函数 $z=-ax+y$ 取得最大值的最

优解不唯一，则实数 a 的值为_____.

【答案】2或-1. 【详解】画出不等式组 $\begin{cases} x+y-2 \leq 0 \\ x-2y-2 \leq 0 \\ 2x-y+2 \geq 0 \end{cases}$ 对应的平面区域如图

中阴影所示

将 $z=-ax+y$ 转化为 $y=ax+z$ ，所以目标函数 z 代表直线 $y=ax+z$ 在 y 轴上的截距

若目标函数 $z=-ax+y$ 取得最大值的最优解不唯一

则直线 $y=ax+z$ 应与直线 $x+y-2=0$ 或 $2x-y+2=0$ 平行，如图中虚线所示

又直线 $x+y-2=0$ 和 $2x-y+2=0$ 的斜率分别为-1和2

所以 $a=2$ 或 $a=-1$ 故答案为：2或-1.

14. 函数 $f(x)=\sqrt{x}\ln x+a$ 的图象在 $x=1$ 处的切线被圆

$C: x^2+y^2-2x+4y-4=0$ 截得弦长为2，则实数 a 的值为_____.

14. -6或2 【解析】本题考查导数的几何意义以及直线与圆的位置关系. 由

题可知切线的斜率 $k=f'(1)=1$. 又 $f(1)=a$ ，所以切点坐标为 $(1, a)$ ，所以函数

$f(x)=\sqrt{x}\ln x+a$ 的图象在 $x=1$ 处的切线方程为 $y=x+a-1$. 又因为圆

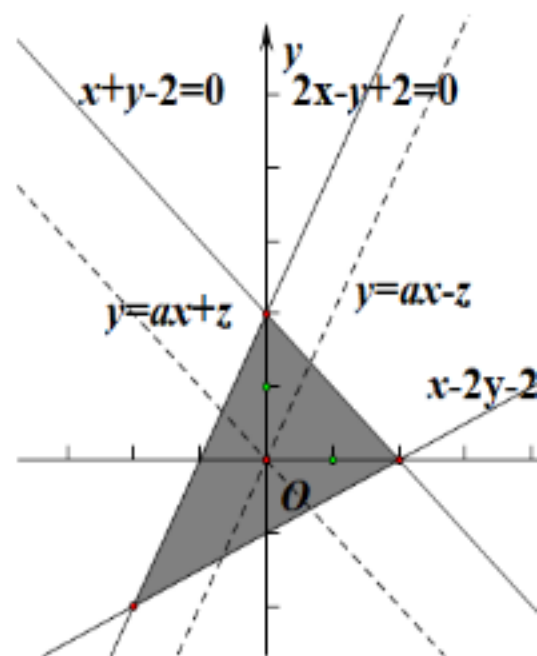
$C: x^2+y^2-2x+4y-4=0$ 的圆心坐标为 $(1, -2)$ ，半径为3，所以圆心到切线的

距离 $d=\frac{|2+a|}{\sqrt{2}}$. 因为切线被圆 $C: x^2+y^2-2x+4y-4=0$ 截得弦长为2，则

$\left(\frac{|2+a|}{\sqrt{2}}\right)^2+1^2=3^2$ ，解得实数 a 的值是-6或2.

15. 已知 $(1+2x)^6$ 展开式的二项式系数的最大值为 a ，系数的最大值为 b ，则

$\frac{b}{a}=\frac{b}{a}$.



【答案】12

由题意可知 $(1+2x)^6$ 展开式的二项式系数为 $C_6^r (r=0,1,\dots,6)$ ，当 $r=3$ 时，取得最大值 $a=C_6^3=20$

$(1+2x)^6$ 展开式的系数为 $C_6^r 2^r (r=0,1,\dots,6)$ ，当满足 $\begin{cases} C_6^r 2^r \geq C_6^{r+1} 2^{r+1} \\ C_6^r 2^r \geq C_6^{r-1} 2^{r-1} \end{cases}$ 时，系数最大。

$$\text{即 } \begin{cases} \frac{6!}{r!(6-r)!} 2^r \geq \frac{6!}{(r+1)!(6-(r+1))!} 2^{r+1} \\ \frac{6!}{r!(6-r)!} 2^r \geq \frac{6!}{(r-1)!(6-(r-1))!} 2^{r-1} \end{cases} \therefore \begin{cases} \frac{1}{6-r} \geq \frac{2}{r+1} \\ \frac{2}{r} \geq \frac{1}{7-r} \end{cases}, \text{ 即 } \begin{cases} r+1 \geq 2(6-r) \\ 2(7-r) \geq r \end{cases} \text{ 解得 } \frac{11}{3} \leq r \leq \frac{14}{3}$$

又 $\because r=0,1,\dots,6 \therefore r=4$ 时，系数的最大值为 $b=C_6^4 2^4=240$ 则 $\frac{b}{a}=\frac{240}{20}=12$ 故答案为：12

16. 平行四边形 $ABCD$ 中， $\triangle ABD$ 是腰长为 2 的等腰直角三角形，

$\angle ABD=90^\circ$ ，现将 $\triangle ABD$ 沿 BD 折起，使二面角 $A-BD-C$ 大小为 $\frac{2\pi}{3}$ ，若

A, B, C, D 四点在同一球面上，则该球的表面积为_____。

【答案】 20π 由题意，取 AD, BC 的中点分别为 O_1, O_2 ，

过 O_1 作面 ABD 的垂线与过 O_2 作面 BCD 的垂线，两垂线交点 O 即为所求外接球的球心，

取 BD 中点 E ，连结 O_1E, O_2E ，

则 $\angle O_1EO_2$ 即为二面角 $A-BD-C$ 的平面角，又由 $O_1E=O_2E=1$ ，连接 OE ，在

$Rt\triangle O_1OE$ 中，则 $O_1O=\sqrt{3}$ ，在 $Rt\triangle O_1OA$ 中， $O_1A=\sqrt{2}$ ，得 $OA=\sqrt{5}$ ，

即球半径为 $R=OA=\sqrt{5}$ ，所以球面积为 $S=4\pi R^2=20\pi$ 。

三、解答题：本大题共6小题，共70分。解答应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤。第17-21题为必做题，每个考生都必须作答。第22/23题为选考题，考生根据要求作答。

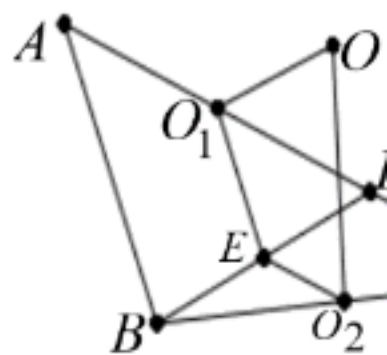
(一) 必考题：共60分

17. 已知 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c 。

(1) 若 $B=\frac{\pi}{3}$ ， $b=\sqrt{7}$ ， $\triangle ABC$ 的面积 $S=\frac{3\sqrt{3}}{2}$ ，求 $a+c$ 值；

(2) 若 $2\cos C(\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}) = c^2$ ，求角 C 。

【答案】(1) 5 (2) $\frac{\pi}{3}$



解: (1) $\because B = \frac{\pi}{3}, b = \sqrt{7}, \triangle ABC$ 的面积 $S = \frac{3\sqrt{3}}{2}, \therefore \frac{3\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2} ac \sin B = \frac{\sqrt{3}}{4} ac$, 可得: $ac = 6$, $\because$ 由余弦定理 $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$, 可得: $7 = a^2 + c^2 - ac = (a + c)^2 - 3ac = (a + c)^2 - 18$, 解得: $a + c = 5$.

(2) $\because 2\cos C (\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}) = c^2$,
 $\therefore 2\cos C (a \cos B + b \cos A) = c^2$, 可得: $2\cos C (a \cos B + b \cos A) = c$,
 $\therefore$ 由正弦定理可得: $2\cos C (\sin A \cos B + \sin B \cos A) = \sin C$, 即 $2\cos C \sin C = \sin C$,
 $\because \sin C \neq 0, \therefore \cos C = \frac{1}{2}, \because C \in (0, \pi), \therefore C = \frac{\pi}{3}$.

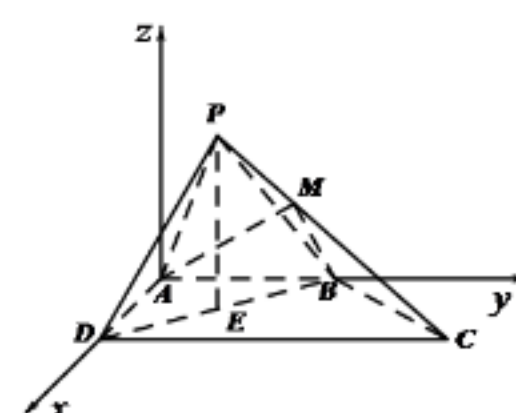
18. (12分) 如图, 四棱锥 $P-ABCD$ 中, $AB \parallel DC, \angle ADC = \frac{\pi}{2}$,

$AB = AD = \frac{1}{2}CD = 2, PD = PB = \sqrt{6}, PD \perp BC$.

(1) 求证: 平面 $PBD \perp$ 平面 PBC ;

(2) 在线段 PC 上是否存在点 M , 使得平面 ABM 与平面 PBD 所成锐二面角为 $\frac{\pi}{3}$?

若存在, 求 $\frac{CM}{CP}$ 的值; 若不存在, 说明理由.



(1) 证明: 因为四边形 $ABCD$ 为直角梯形, 且 $AB \parallel DC, AB = AD = 2, \angle ADC = \frac{\pi}{2}$,

所以 $BD = 2\sqrt{2}$, 又因为 $CD = 4, \angle BDC = \frac{\pi}{4}$. 根据余弦定理得 $BC = 2\sqrt{2}$, 所以

$CD^2 = BD^2 + BC^2$, 故 $BC \perp BD$. 又因为 $BC \perp PD, PD \cap BD = D$, 且 $BD, PD \subset$ 平面 PBD , 所以 $BC \perp$ 平面 PBD ,

又因为 $BC \subset$ 平面 PBC , 所以平面 $PBC \perp$ 平面 PBD .

(2) 由 (1) 得平面 $ABCD \perp$ 平面 PBD , 设 E 为 BD 的中点, 连结 PE , 因为 $PB = PD = \sqrt{6}$, 所以 $PE \perp BD, PE = 2$, 又平面 $ABCD \perp$ 平面 PBD , 平面 $ABCD \cap$ 平面 $PBD = BD$, $PE \perp$ 平面 $ABCD$.

如图, 以 A 为原点分别以 $\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AB}$ 和垂直平面 $ABCD$ 的方向为 x, y, z 轴正方向, 建立空间直角坐标系 $A-xyz$,

则 $A(0,0,0), B(0,2,0), C(2,4,0), D(2,0,0), P(1,1,2)$,

假设存在 $M(a,b,c)$ 满足要求, 设 $\frac{CM}{CP} = \lambda (0 \leq \lambda \leq 1)$, 即 $\vec{CM} = \lambda \vec{CP}$,

所以 $M(2-\lambda, 4-3\lambda, 2\lambda)$, 易得平面 PBD 的一个法向量为 $\vec{BC} = (2, 2, 0)$.

设 $\vec{n} = (x, y, z)$ 为平面 ABM 的一个法向量, $\vec{AB} = (0, 2, 0), \vec{AM} = (2-\lambda, 4-3\lambda, 2\lambda)$

由 $\begin{cases} \vec{n} \cdot \vec{AB} = 0 \\ \vec{n} \cdot \vec{AM} = 0 \end{cases}$ 得 $\begin{cases} 2y = 0 \\ (2-\lambda)x + (4-3\lambda)y + 2\lambda z = 0 \end{cases}$, 不妨取 $\vec{n} = (2\lambda, 0, \lambda-2)$.

因为平面 PBD 与平面 ABM 所成的锐二面角为 $\frac{\pi}{3}$, 所以 $\frac{|\vec{BC} \cdot \vec{n}|}{|\vec{BC}| |\vec{n}|} = \frac{1}{2}$,

解得 $\lambda = \frac{2}{3}, \lambda = -2$, (不合题意舍去). 故存在 M 点满足条件, 且 $\frac{CM}{CP} = \frac{2}{3}$.

19. 近来天气变化无常, 陡然升温、降温幅度大于 10°C 的天气现象出现增多. 陡然降温幅度大于 10°C 容易引起幼儿伤风感冒疾病.为了解伤风感冒疾病是否与性别有关, 在某妇幼保健院随机对人院的100 名幼儿进行调查,得到了如下的列联表,若在全部100 名幼儿中随机抽取1人, 抽到患伤风感冒疾病的幼儿的概率为 $\frac{2}{5}$,

(1)请将下面的列联表补充完整;

	患伤风感冒疾病	不患伤风感冒疾病	合计
男		25	
女	20		
合计			100

(2)能否在犯错误的概率不超过0.1的情况下认为患伤风感冒疾病与性别有关?说明你的理由;

(3)已知在患伤风感冒疾病的 20 名女性幼儿中,有 2 名又患黄痘病.现在从患伤风感冒疾病的 20 名女性中,选出 2 名进行其他方面的排查,记选出患黄痘病的女性人数为 X ,求 X 的分布列以及数学期望.下面的临界值表供参考:

$P(K^2 \geq k_0)$	0.15	0.10	0.05	0.025	0.010	0.005	0.001
k_0	2.072	2.076	3.841	5.024	6.635	7.879	10.828

参考公式: $K^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$, 其中 $n = a + b + c + d$.

【答案】(1)见解析,(2) 不能在犯错误的概率不超过0.1的情况下认为患伤风感冒疾病与性别有关.(3)分布列见解析, $\frac{1}{5}$

(1)列联表补充如下;

	患伤风感冒疾病	不患伤风感冒疾病	合计
男	20	25	45
女	20	35	55

合计	40	60	100
----	----	----	-----

$$(2) \text{ 计 } K^2 \text{ 算的观测值为 } K^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$$

$$= \frac{100 \times (20 \times 35 - 20 \times 25)^2}{40 \times 60 \times 45 \times 55} \approx 0.6734 < 2.706,$$

所以不能在犯错误的概率不超过 0.1 的情况下认为患伤风感冒疾病与性别有美.

(3) 根据题意, X 的值可能为 0, 1, 2.

$$\text{则 } P(X=0) = \frac{C_{12}^2}{C_{20}^2} = \frac{153}{190}, P(X=1) = \frac{C_{15}^1}{C_{20}^2} = \frac{18}{95}, P(X=2) = \frac{C_2^2}{C_{20}^2} = \frac{1}{190},$$

故 X 的分布列如下:

X	0	1	2
P	$\frac{153}{190}$	$\frac{18}{95}$	$\frac{1}{190}$

$$\text{故 } X \text{ 的数学期望: } E(X) = 0 \times \frac{153}{190} + 1 \times \frac{18}{95} + 2 \times \frac{1}{190} = \frac{1}{5}.$$

20. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 , 过 F_2 的一条直线交椭圆于 P, Q 两点, 若 $\triangle PF_1F_2$ 的周长为 $4 + 4\sqrt{2}$, 且长轴长与短轴长之比为 $\sqrt{2}:1$.

(1) 求椭圆 C 的方程;

(2) 若 $|\overrightarrow{F_1P} + \overrightarrow{F_2Q}| = |\overrightarrow{PQ}|$, 求直线 PQ 的方程.

$$\text{【答案】 (1) } \frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} = 1; (2) \sqrt{2}x \pm y - 2\sqrt{2} = 0$$

(1) 由条件可知: $2a + 2c = 4 + 4\sqrt{2}$, $a:b = \sqrt{2}:1$,

$\therefore a^2 = b^2 + c^2$, 解得: $a = 2\sqrt{2}, b = 2, c = 2$, 所以椭圆 C 的方程为

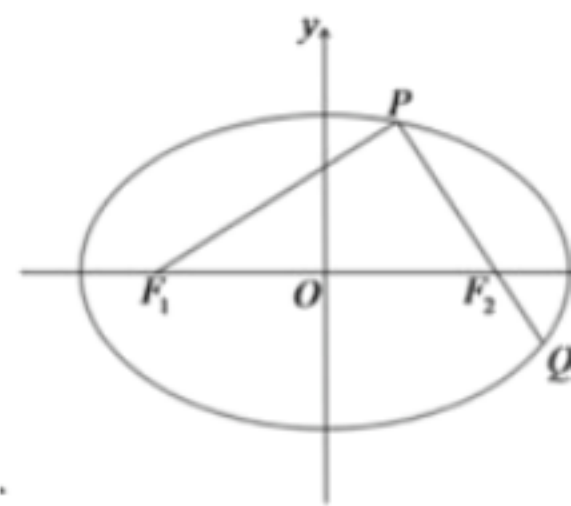
$$\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} = 1$$

(2) 设直线 PF_2 的方程为: $x = ty + 2, P(x_1, y_1), Q(x_2, y_2)$;

因为 $\overrightarrow{F_1P} + \overrightarrow{F_2Q} = \overrightarrow{F_1O} + \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{F_2O} + \overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ}$,

所以 $|\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ}| = |\overrightarrow{PQ}|$, 所以 $OP \perp OQ$, 所以 $x_1x_2 + y_1y_2 = 0$,

$$\begin{cases} \frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} = 1 \\ x = ty + 2 \end{cases} \Rightarrow (t^2 + 2)y^2 + 4ty - 4 = 0, \quad y_1 + y_2 = \frac{-4t}{t^2 + 2}, \quad y_1y_2 = \frac{-4}{t^2 + 2}$$



$$x_1 + x_2 + y_1 y_2 = (t^2 + 1)y_1 y_2 + 2(t^4 + 1)y_1 y_2, \text{ 解得: } t^2 = \frac{1}{2}, t = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$$

所以直线 PQ 的方程为 $\sqrt{2}x \pm y - 2\sqrt{2} = 0$.

21. 已知函数 $f(x) = e^x - \cos x$.

(1) 求 $f(x)$ 在点 $(0, f(0))$ 处的切线方程;

(2) 求证: $f(x)$ 在 $\left(-\frac{\pi}{2}, +\infty\right)$ 上仅有 2 个零点.

【答案】(1) $x - y = 0$; (2) 证明见解析.

(1) $\because f(x) = e^x - \cos x$, 则 $f'(x) = e^x + \sin x$, $\therefore f(0) = 0, f'(0) = 1$.

因此, 函数 $y = f(x)$ 在点 $(0, f(0))$ 处的切线方程为 $y = x$, 即 $x - y = 0$;

(2) 当 $x > 0$ 时, $e^x > 1 \geq \cos x$, 此时, $f(x) = e^x - \cos x > 0$, 所以, 函数 $y = f(x)$ 在区间 $(0, +\infty)$ 上没有零点;

又 $f(0) = 0$, 下面只需证明函数 $y = f(x)$ 在区间 $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$ 上有且只有一个零点.

$f'(x) = e^x + \sin x$, 构造函数 $g(x) = e^x + \sin x$, 则 $g'(x) = e^x + \cos x$,

当 $-\frac{\pi}{2} < x < 0$ 时, $g'(x) = e^x + \cos x > 0$,

所以, 函数 $y = f'(x)$ 在区间 $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$ 上单调递增,

$\because f'\left(-\frac{\pi}{2}\right) = e^{-\frac{\pi}{2}} - 1 < 0, f'(0) = 1 > 0$, 由零点存在定理知, 存在 $t \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$,

使得 $f'(t) = 0$, 且当 $-\frac{\pi}{2} < x < t$ 时, $f'(x) < 0$, 当 $t < x < 0$ 时, $f'(x) > 0$.

所以, 函数 $y = f(x)$ 在 $x = t$ 处取得极小值, 则 $f(t) < f(0) = 0$,

又 $f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = e^{-\frac{\pi}{2}} > 0$, 所以 $f\left(-\frac{\pi}{2}\right) \cdot f(t) < 0$, 由零点存在定理可知, 函数

$y = f(x)$ 在区间 $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$ 上有且只有一个零点.

综上所述, 函数 $y = f(x)$ 在区间 $\left(-\frac{\pi}{2}, +\infty\right)$ 上有且仅有两个零点.

(二) 选考题: 共10分. 请考生在22,23题中任选一题作答. 如果多做, 则按所做的第一题计分.

22. (10分) 在平面直角坐标系 xOy 中, 曲线 C_1 的参数方程为

$\begin{cases} x = 1 + \cos \alpha \\ y = \sin \alpha \end{cases}$ (α 为参数), 以坐标原点 O 为极点, x 轴非负半轴为极轴建立极坐标

系, 点 A 为曲线 C_1 上的动点, 点 B 在线段 OA 的延长线上, 且满足

$|OA| \cdot |OB| = 8$, 点 B 的轨迹为 C_2 .

(1) 求曲线 C_1 , C_2 的极坐标方程;

(2) 设点 M 的极坐标为 $(2, \frac{\pi}{2})$, 求 $\triangle ABM$ 面积的最小值。

解: (1) 因为 C_1 的参数方程为 $\begin{cases} x = 1 + \cos\alpha \\ y = \sin\alpha \end{cases}$ (α 为参数), 消去参数得

$(x-1)^2 + y^2 = 1$, 则一般式为 $x^2 + y^2 - 2x = 0$, 由 $\rho^2 = x^2 + y^2, x = \rho\cos\theta$, 可得 C_1 的极坐标方程为; 设, 则 $\rho_1 = |OA|$, 而为曲线 C_1 上的动点, 则 $\rho_1 = 2\cos\theta$, 因为点在线段的延长线上, 则设, 有, 因为 $|OA| \cdot |OB| = \rho_1 \cdot \rho = 8$, 所以得 $2\cos\theta \cdot \rho = 8$, 即, 所以 C_2 的极坐标方程为.

(2) 由 (1) 可知, $|AB| = |OB| - |OA| = \rho - \rho_1 = \frac{4}{\cos\theta} - 2\cos\theta$, 边上的高为

$h = |OM|\sin(\frac{\pi}{2} - \theta) = 2\cos\theta$, 则 $S_{\triangle ABM} = \frac{1}{2} \cdot (\frac{4}{\cos\theta} - 2\cos\theta) \cdot 2\cos\theta = 4 - 2\cos^2\theta$, 因为 $\cos^2\theta \in [0, 1]$, 所以当 $\cos^2\theta = 1$ 时, $S_{\min} = 4 - 2 = 2$.

23. 选修4-5: 不等式选讲

设 $f(x) = |x+2| + |2x-1| - m$.

(1) 当 $m=5$ 时, 解不等式 $f(x) \geq 0$;

(2) 若 $f(x) \geq \frac{3}{2}$ 对任意 $x \in R$ 恒成立, 求实数 m 的取值范围.

【答案】 (1) $\left\{x \mid x \leq -2 \text{ 或 } x \geq \frac{4}{3}\right\}$; (2) $(-\infty, 1]$.

【解析】 (1) 当 $m=5$ 时, $f(x) = |x+2| + |2x-1| - 5$,

不等式 $f(x) \geq 0$ 为 $|x+2| + |2x-1| \geq 5$,

① 当 $x \leq -2$ 时, 不等式为: $-3x-1 \geq 5$, 即 $x \leq -2$, 满足;

② 当 $-2 < x < \frac{1}{2}$ 时, 不等式为: $-x+3 \geq 5$, 即 $x \leq -2$, 不满足;

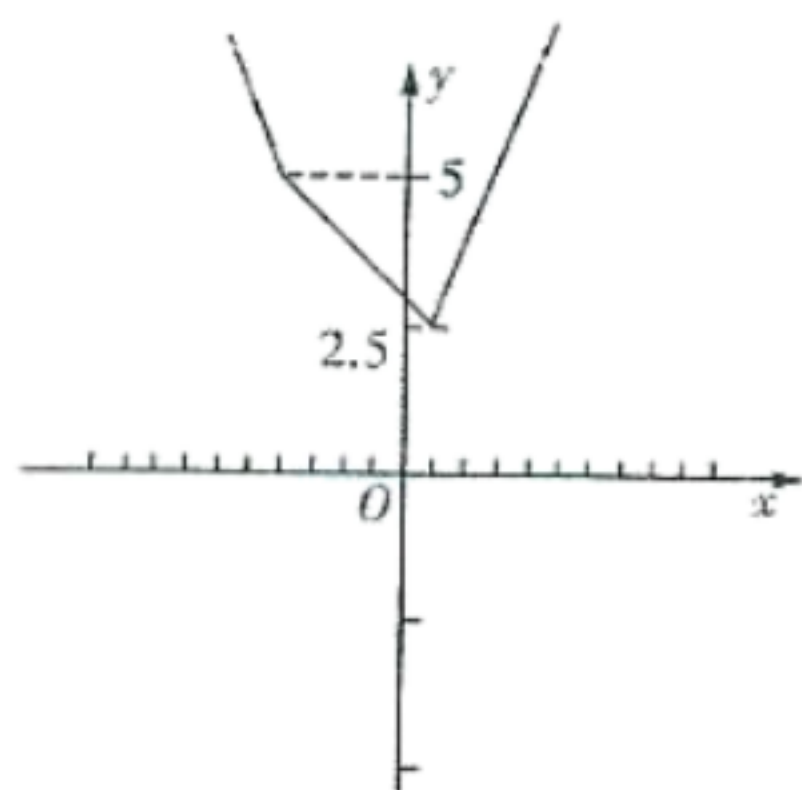
③ 当 $x \geq \frac{1}{2}$ 时, 不等式为: $3x+1 \geq 5$, 即 $x \geq \frac{4}{3}$, 满足.

综上所述, 不等式 $f(x) \geq 0$ 的解集为 $\left\{x \mid x \leq -2 \text{ 或 } x \geq \frac{4}{3}\right\}$.

设 $g(x) = |x+2| + |2x-1|$, 若 $f(x) \geq \frac{3}{2}$ 对于任意 $x \in R$ 恒成立,

即 $g(x) = |x+2| + |2x-1| \geq m + \frac{3}{2}$ 对于任意 $x \in R$ 恒成立,

$$g(x) = |x+2| + |2x-1| = \begin{cases} -3x-1 & (x \leq -2), \\ -x+3 & (-2 < x < \frac{1}{2}), \\ 3x+1 & (x \geq \frac{1}{2}). \end{cases}$$



由图可看出 $g(x) = |x+2| + |2x-1|$ 的最小值是 $\frac{5}{2}$,

所以 $m + \frac{3}{2} \leq \frac{5}{2}$, $\therefore m \leq 1$, 即 m 的取值范围是 $(-\infty, 1]$.

考点：绝对值不等式的解法，恒成立问题的转化。