# 数学试题(理科)

（满分 150 分，考试时间 120 分钟）

**注意事项：**

1．答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上．

2．作答时，务必将答案写在答题卡上，写在试卷及草稿纸上无效.

**一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分．在每小题列出的四个选项中，只有一项是最符合题目要求的．**

1. 设 i 为虚数单位，则 $i^6=$

（A）$-i$　（B）$i$　（C）$-1$　（D）$1$

2. 已知集合 $A=\{x|-3<x<0\}$，$B=\left\{x\left|\frac{2x-1}{x+1}\geq 1\right.\right\}$，则 $A\cap B=$

（A）$(-3,-1]$　（B）$(-3,-1)$　（C）$(-1,0)$　（D）$[-2,0)$

3. 设 $a=\log_3 6$，$b=\log_3 10$，$c=e^{-2}$，则

（A）$b>a>c$　（B）$b>c>a$　（C）$a>c>b$　（D）$a>b>c$

4. 在 $(x-\frac{1}{x})^6$ 的展开式中的常数项为

（A）20　（B）15　（C）$-15$　（D）$-20$

5. 2019 年 11 月 2 日，成都市青羊区开展了 5 种不同类型的 “垃圾分类，大家给力”社会服务活动，其中有 3 种活动在上午开展，2 种活动在下午开展．若小王参加了两种活动, 则分别安排在上、下午的概率为

（A）$\frac{1}{4}$　（B）$\frac{3}{10}$　（C）$\frac{1}{2}$　（D）$\frac{3}{5}$

6. 已知 $F$ 是双曲线 $C$：$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{3}=1$ 的左焦点，则以 $F$ 为圆心且与渐近线相切的圆的方程为

（A）$(x-\sqrt{7})^2+y^2=3$　（B）$(x+\sqrt{7})^2+y^2=3$

（C）$(x-1)^2+y^2=4$　（D）$(x+1)^2+y^2=4$

7. 设 $f(x)=\frac{1}{4^x+1}-\frac{1}{2}$，$x\in\mathbf{R}$,则

（A）$f(x)$为偶函数且在（0，+∞）上单调递减　（B）$f(x)$为偶函数且在（0，+∞）上单调递增

（C）$f(x)$为奇函数且在（0，+∞）上单调递减　（D）$f(x)$为奇函数且在（0，+∞）上单调递增

8. 设椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$，$a>b>0$，点 $A$，$B$ 为 $C$ 的左，右顶点，点 $P$ 为 $C$ 上一点，若 $\angle APB=120°$，则 $C$ 的离心率的最小值为

（A）$\frac{\sqrt{6}}{3}$　（B）$\frac{\sqrt{3}}{2}$　（C）$\frac{2}{3}$　（D）$\frac{1}{2}$

9. 过球的一条半径的中点，作与该半径所在直线成 $30^0$ 的平面，则所得截面的面积与球的表面积的比为

（A）$\frac{15}{256}$　（B）$\frac{45}{256}$　（C）$\frac{15}{64}$　（D）$\frac{45}{64}$

10. 若函数 $f(x)=e^x-ax$ 与 $x$ 轴相切，则实数 $a=$

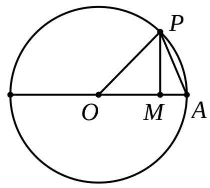
（A） $-1$　　　　（B） $0$　　　　（C） 1　　　　（D） e

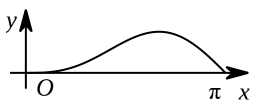
11. 设 $\alpha\in(0,\frac{\pi}{2})$， $\beta\in(0,\frac{\pi}{2})$，且 $\frac{1-\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha}=\frac{1+\cos\beta}{\sin\beta}$，则

（A） $2\alpha-\beta=\pi$　　（B） $2\alpha-\beta=\frac{\pi}{2}$　　（C） $2\alpha+\beta=\pi$　　（D） $2\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}$

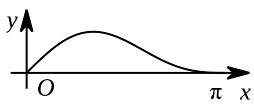
12. 如图，圆 $O$ 的半径为 1， $A$ 是圆上的定点， $P$ 是圆上的动点，角 $x$ 的始边为射线 $OA$，终

边为射线 $OP$，过点 $P$ 作直线 $OA$ 的垂线，垂足为 $M$，将△$AMP$ 的面积表示为 $x$ 的函数 $f(x)$，则 $y=f(x)$ 在 $(0,\pi)$ 上的图象大致为

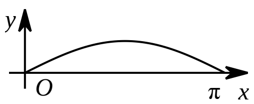


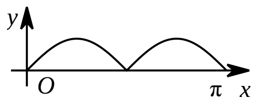

（A）




（B）




（C）




（D）

**二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共计 20 分．**

13. 已知向量 $\overrightarrow{AB}=(2,3)$，$\overrightarrow{BC}=(1,t\text{-}3)$，$\overrightarrow{AB}$ // $\overrightarrow{AC}$，则 $t$＝_______.

14.函数 $y=\tan^2 x-2\tan x+3$， $x\in\left[-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3}\right]$的最小值为_______.

15.在四边形 $ABCD$ 中，$\angle ABC=\angle BCD=120^0$，$CD=3AB=3BC=3\sqrt{3}$，则 $AD$ 的长度为________.

16.在四面体 $ABCD$ 中，$DA\perp$底面 $ABC$，侧面 $ABD\perp$侧面 $BCD$，$BD=BC=2$,，三个侧面△$DAB$、△$DBC$、△$DCA$ 的面积的平方和为8，则∠$ADB$＝_______.

**三、解答题：共 70 分，解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤．第 17-21 题为必考题，每个试题考生都必须作答．第 22，23 题为选考题，考生根据要求作答．**

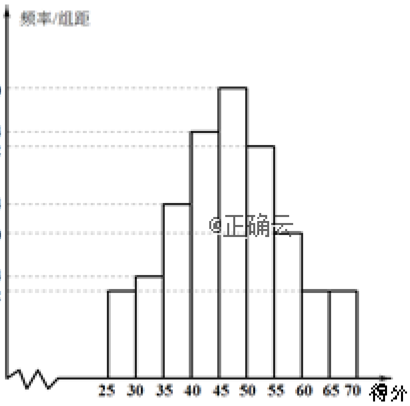
**（一）必考题：共 60 分.**

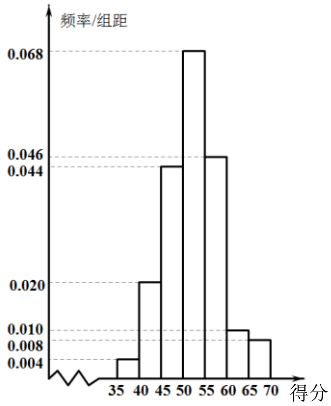
17．(12 分)设数列$\{a_n\}$的前 $n$ 项和为 $S_n=\frac{1}{2}(n^2+n)$ $(n\in\mathrm{N}^*)$ .

（1）求$\{a_n\}$的通项公式；

（2）设 $b_n=a_n\cdot 2^{a_n}$，求数列$\{b_n\}$的前 $n$ 项和 $T_n$ .

18. (12 分)第 32 届夏季奥林匹克运动会（英语：Games of the XXXII Olympiad）又称 2020 年东京奥运会.2013 年 9 月 7 日雅克·罗格宣布 2020 年奥运会的主办城市是东京,东京申办成功后，成为继巴黎（法国）、伦敦（英国）、洛杉矶（美国）和雅典（希腊）后的世界第 5 个至少两次举办夏季奥运会的城市，同时也是亚洲第一个.2018 年 7 月 22 日，东京奥组委公布 2020 年东京奥运会吉祥物名字，蓝色吉祥物被命名为 Miraitowa，寓意未来和永恒.现从甲，乙两所学校各随机抽取了100名高三的学生参加了奥运知识测评（满分70分），其中成绩不低于50分的记为“优秀”.根据测试成绩，学生的分数（单位：分）频率分布直方图如下（左图为甲校的，右图为乙校的）：




（1）根据频率分布直方图估计乙校学生成绩的中位数.（结果保留两位小数）

（2）填写下面列联表，并根据列联表判断是否有 99%的把握认为学生测试成绩是否优秀与他所在学校有关：

| | 非优秀 | 优秀 | 合计 |
|---|---|---|---|
| 甲校 | | | |
| 乙校 | | | |
| 合计 | | | |

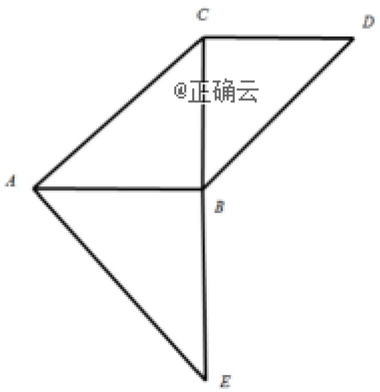
附：$K^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$

| $P(K^2>k)$ | 0.050 | 0.010 | 0.001 |
|---|---|---|---|
| $k$ | 3.841 | 6.635 | 10.828 |

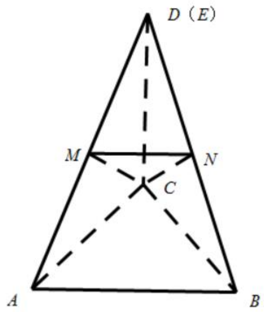
19．(12 分)图 1 是由△$ABC$,△$BCD$ 和△$ABE$ 组成的一个平面图形，其中 $AB=BC=CD=2$，$BE=2\sqrt{2}$，$\angle ABC=\angle ABE=\angle BCD=90^\circ$，将其沿 $AB$，$BC$ 折起，使得 $BD$ 与 $BE$ 重合，连接 $AD$，如图 2.

（1）证明：图 2 中 $CD\perp$ 面 $ABC$；

（2）在图 2 中, $M$ ,$N$ 分别为 $AD$ , $BD$ 的中点，求面 $CMN$ 与面 $CAB$ 所成的二面角的正弦值.








（图一）　　　　　　（图二）

20. (12 分)已知点 $F(1,0)$，点 $Q$ 为直线 $l: x=-1$ 上一动点, $FQ$ 的垂直平分线与过 $Q$ 且垂直于 $l$ 的直线交于点 $P$ ,设 $P$ 的轨迹为曲线 $C$ .

（1）求 $C$ 的轨迹方程;

（2）设 $A,B$ 为曲线 $C$ 上不同的两点, $A,B,F$ 三点不共线，$|AF|+|BF|=6$ ,求△$FAB$ 的面积的最大值.

21. (12 分)已知函数 $f(x)=\ln(1+x)$（$x>-1$）.

（1）证明： $f(x)\le x$，并说明等号成立的条件;

（2）设 $g(x)=(x+1)f(x)-ax$，是否存在实数 $a$，使得 $g(x)\ge 0$ 在其定义域恒成立？若存在，求出所有满足条件的实数 $a$ 的集合；若不存在，说明理由;

（3）设 $T_n=1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{n}$（$n\in \mathrm{N}^*$），$[x]$ 表示不超过 $x$ 的最大整数，试求 $[T_n-f(n)]$ .

**（二）选考题：共 10 分.请考生在第 22、23 题中任选一题作答。如果多做，则按所做的第一题计分.**

22．[选修 4－4：坐标系与参数方程]（10 分）

在直线坐标系 $xOy$ 中，曲线 $C_1$ 的参数方程为 $\begin{cases} x=2t^2 \\ y=2t \end{cases}$ ($t$ 为参数)，以坐标原点为极点，$x$ 轴正半轴为极轴，建立极坐标系，曲线 $C_2$ 的极坐标方程为 $\rho\sin\left(\theta-\dfrac{\pi}{4}\right)=2\sqrt{2}$ .

(1)写出 $C_1$ 的普通方程和 $C_2$ 的直角坐标方程;

(2)设点 $P$ 在 $C_1$ 上，点 $Q$ 在 $C_2$ 上，求 $|PQ|$ 的最小值及此时 $P$ 的直角坐标.

23．[选修 4－5：不等式选讲]（10 分）

设 $a>0$， $b>0$ 且 $a^2+b^2=4$ .

（1）证明： $a^6+b^6\ge 16$；

（2）求 $ab-a-b$ 的最大值.