

2020 届高三“线上教学”质量检测

理科数学参考答案及评分细则

评分说明：

1. 本解答给出了解法供参考，如果考生的解法与本解答不同，可根据试题的主要考查内容比照评分标准制定相应的评分细则。

2. 对计算题，当考生的解答在某一步出现错误时，如果后继部分的解答未改变该题的内容和难度，可视影响的程度决定后继部分的给分，但不得超过该部分正确解答应给分数的一半；如果后继部分的解答有较严重的错误，就不再给分。

3. 解答右端所注分数，表示考生正确做到这一步应得的累加分数。

4. 只给整数分数。选择题和填空题不给中间分。

一、选择题：本大题考查基础知识和基本运算，每小题 5 分，满分 60 分。

1. C 2. C 3. A 4. B 5. D 6. D
7. A 8. A 9. B 10. C 11. B 12. A

二、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. $-2\sqrt{2}$ 14. $\frac{4}{15}$ 15. -13 16. 8

三、解答题：本大题共 6 小题，共 70 分。

17. 【命题意图】本题主要考查解三角形、正弦定理和余弦定理等基础知识，意在考查逻辑推理、数学运算、直观想象的数学核心素养。满分 12 分。

【解析】(1) 因为 $\sqrt{7}(a \cos B + b \cos A) = ac$ ，根据正弦定理得，

$$\sin A \cos B + \sin B \cos A = \frac{\sqrt{7}}{7} a \sin C, \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$$

$$\therefore \sin C = \frac{\sqrt{7}}{7} a \sin C, \text{ 又因为 } \sin C \neq 0,$$

$$\therefore a = \sqrt{7}. \dots\dots\dots 3 \text{ 分}$$

$$Q \sin 2A = \sin A, \therefore 2 \sin A \cos A = \sin A, \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$$

$$\text{因为 } \sin A \neq 0, \text{ 所以 } \cos A = \frac{1}{2}, \dots\dots\dots 5 \text{ 分}$$

$$Q A \in (0, \pi), \therefore A = \frac{\pi}{3}. \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

$$(2) \text{ 由 (1) 知, } a = \sqrt{7}, A = \frac{\pi}{3}.$$

$$\text{由余弦定理得 } a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A,$$

$$\therefore 7 = b^2 + c^2 - bc, \therefore 7 = (b-c)^2 + bc, \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

$$\text{因为 } b-c=2, \text{ 所以 } 7=4+bc, \text{ 所以 } bc=3. \dots\dots\dots 9 \text{ 分}$$

设 BC 边上的高为 h.

$$\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} bc \sin A = \frac{1}{2} \times 3 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{4}. \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

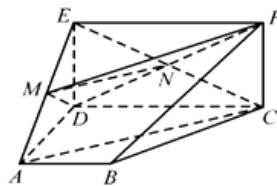
$$Q S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} ah, \therefore \frac{1}{2} \times \sqrt{7} h = \frac{3\sqrt{3}}{4}, \therefore h = \frac{3\sqrt{21}}{14}.$$

$$\text{即 BC 边上的高为 } \frac{3\sqrt{21}}{14}. \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

18. 【命题意图】本题主要考查直线与直线、直线与平面的位置关系，二面角等基础知识，意在考查直观想象、逻辑推理与数学运算的数学核心素养。满分 12 分。

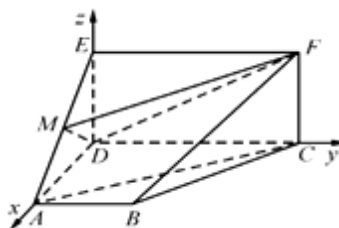
【解析】(1) 连结 CE，交 DF 于 N，连结 MN，如图所示，

因为四边形 $CDEF$ 是矩形, 所以 N 是 CE 的中点, 1 分
 由于 M 是 AE 的中点,
 所以 $MN \parallel AC$, 2 分
 由于 $MN \subset$ 平面 MDF , $AC \not\subset$ 平面 MDF ,
 所以 $AC \parallel$ 平面 MDF 4 分



(2) 因为平面 $ABCD \perp$ 平面 $CDEF$,
 平面 $ABCD \cap$ 平面 $CDEF = CD$, $DE \perp CD$,
 所以 $DE \perp$ 平面 $ABCD$,
 可知 AD, CD, DE 两两垂直, 5 分

以点 D 为原点, 分别以 $\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DE}$ 的方向为 x 轴、 y 轴、 z 轴
 的正方向, 建立空间直角坐标系 $O-xyz$.



因为 $AB = 2$, 则 $M(1, 0, 1)$, $F(0, 4, 2)$, $\overrightarrow{DM} = (1, 0, 1)$,

$\overrightarrow{DF} = (0, 4, 2)$, 设平面 MDF 的法向量为 $\vec{n}_1 = (x, y, z)$,

则 $\begin{cases} \vec{n}_1 \cdot \overrightarrow{DM} = 0, \\ \vec{n}_1 \cdot \overrightarrow{DF} = 0, \end{cases}$ 所以 $\begin{cases} x + z = 0, \\ 4y + 2z = 0, \end{cases}$ 7 分

取 $y = 1$, 则 $\vec{n}_1 = (2, 1, -2)$, 8 分

依题意, 得平面 $ABCD$ 的一个法向量为 $\vec{n}_2 = (0, 0, 1)$, 9 分

$\therefore \cos \langle \vec{n}_1, \vec{n}_2 \rangle = \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{|\vec{n}_1| |\vec{n}_2|} = \frac{-2}{\sqrt{4+1+4} \times 1} = -\frac{2}{3}$, 11 分

故平面 MDF 与平面 $ABCD$ 所成锐二面角的余弦值为 $\frac{2}{3}$ 12 分

19. 【命题意图】 本题主要考查线性回归、相关系数等基础知识, 意在考查数学建模、数学抽象、数学运算、数据分析的数学核心素养. 满分 12 分.

【解析】(1) 由折线图中的数据 and 附注中参考数据得

$\bar{t} = \frac{1+2+3+4+5+6+7+8+9}{9} = 5$, 1 分

$\sum_{i=1}^9 (t_i - \bar{t})^2 = 60$, 2 分

$\sum_{i=1}^9 (t_i - \bar{t})(y_i - \bar{y}) = \sum_{i=1}^9 t_i y_i - \bar{t} \sum_{i=1}^9 y_i = 3254.80 - 5 \times 582.01 = 344.75$, 4 分

所以 $r = \frac{344.75}{345.90} \approx 0.997$, 5 分

因为 y 与 t 的相关系数近似为 0.997, 说明 y 与 t 的线性相关程度相当高,
 从而可以用线性回归模型拟合 y 与 t 的关系. 6 分

(2) 由已知及 (1) 得 $\hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^9 (t_i - \bar{t})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^9 (t_i - \bar{t})^2} = \frac{344.75}{60} \approx 5.746$, 8 分

$\hat{a} = \bar{y} - \hat{b}\bar{t} \approx 64.668 - 5.746 \times 5 = 35.94$, 9 分

所以 y 关于 t 的回归方程为 $\hat{y} = 35.94 + 5.75t$ 10 分

将 2021 年对应的年份代码 $t = 12$ 代入回归方程,

得 $\$ = 35.94 + 5.75 \times 12 = 104.94$,

所以预测 2021 年全国 GDP 总量约为 104.94 万亿元. 12 分

20. 【命题意图】 本题主要考查椭圆方程、直线与椭圆的位置关系等基础知识, 意在考查的数学核心素养是直观想象、逻辑推理与数学运算. 满分 12 分.

【解析】(1)由题意得
$$\begin{cases} \frac{4}{a^2} + \frac{1}{b^2} = 1 \\ e = \frac{c}{a} = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}, \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$$

解得 $a^2 = 8, b^2 = 2$, 3 分

所以 C 的方程为 $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} = 1$ 4 分

(2)设直线 $l: y = \frac{1}{2}x + m (m \neq 0)$, $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$,

由
$$\begin{cases} y = \frac{1}{2}x + m \\ \frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} = 1 \end{cases}, \text{ 得 } x^2 + 2mx + 2m^2 - 4 = 0,$$

由
$$\begin{cases} \Delta = 4m^2 - 8m^2 + 16 > 0 \\ m \neq 0 \end{cases}, \text{ 解得 } -2 < m < 0 \text{ 或 } 0 < m < 2, \dots\dots\dots 5 \text{ 分}$$

则 $x_1 + x_2 = -2m, x_1x_2 = 2m^2 - 4$, 6 分

依题意, 易知 PA 与 PB 的斜率存在, 所以 $\alpha \neq \frac{\pi}{2}, \beta \neq \frac{\pi}{2}$,

设直线 PA 与 PB 的斜率分别为 k_1, k_2 , 则 $\tan \alpha = k_1, \tan \beta = k_2$, 7 分

欲证 $\alpha + \beta = \pi$, 只需证 $\tan \alpha = \tan(\pi - \beta) = -\tan \beta$, 即证 $k_1 + k_2 = 0$ 8 分

Q $k_1 = \frac{y_1 - 1}{x_1 - 2}, k_2 = \frac{y_2 - 1}{x_2 - 2}$,

故 $k_1 + k_2 = \frac{y_1 - 1}{x_1 - 2} + \frac{y_2 - 1}{x_2 - 2} = \frac{(y_1 - 1)(x_2 - 2) + (y_2 - 1)(x_1 - 2)}{(x_1 - 2)(x_2 - 2)}$ 9 分

又 $y_1 = \frac{1}{2}x_1 + m, y_2 = \frac{1}{2}x_2 + m$,

所以 $(y_1 - 1)(x_2 - 2) + (y_2 - 1)(x_1 - 2)$
 $= \left(\frac{1}{2}x_1 + m - 1\right)(x_2 - 2) + \left(\frac{1}{2}x_2 + m - 1\right)(x_1 - 2)$ 10 分

$= x_1 \cdot x_2 + (m - 2)(x_1 + x_2) - 4(m - 1)x_1 \cdot x_2$
 $= 2m^2 - 4 + (m - 2)(-2m) - 4(m - 1)$
 $= 0, \dots\dots\dots 11 \text{ 分}$

$\therefore k_1 + k_2 = 0$, 所以 $\alpha + \beta = \pi$ 12 分

21. 【命题意图】 本题主要考查函数和导数及其应用、三角函数等基础知识, 意在考查直观想象、逻辑推理与数学运算的数学核心素养. 满分 12 分.

【解析】(1)设 $g(x) = f'(x) = \frac{1}{x} - 1 + 2\cos x$, 1 分

当 $x \in (0, \pi)$ 时, $g'(x) = -2\sin x - \frac{1}{x^2} < 0$,

所以 $g(x)$ 在 $(0, \pi)$ 上单调递减, 2 分

又因为 $g\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{3}{\pi} - 1 + 1 = \frac{3}{\pi} > 0$, $g\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{2}{\pi} - 1 < 0$, 3 分

所以 $g(x)$ 在 $\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right)$ 上有唯一的零点 α ,

即函数 $f'(x)$ 在 $(0, \pi)$ 上存在唯一零点. 4 分

当 $x \in (0, \alpha)$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 在 $(0, \alpha)$ 上单调递增;

当 $x \in (\alpha, \pi)$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 在 (α, π) 上单调递减;

所以 $f(x)$ 在 $(0, \pi)$ 上存在唯一的极大值点 $\alpha \left(\frac{\pi}{3} < \alpha < \frac{\pi}{2} \right)$ 5 分

(2)①由(1)知: $f(x)$ 在 $(0, \pi)$ 上存在唯一的极大值点 $\alpha \left(\frac{\pi}{3} < \alpha < \frac{\pi}{2} \right)$.

所以 $f(\alpha) > f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \ln \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} + 2 > 2 - \frac{\pi}{2} > 0$,

又因为 $f\left(\frac{1}{e^2}\right) = -2 - \frac{1}{e^2} + 2 \sin \frac{1}{e^2} < -2 - \frac{1}{e^2} + 2 < 0$,

所以 $f(x)$ 在 $(0, \alpha)$ 上恰有一个零点. 6 分

又因为 $f(\pi) = \ln \pi - \pi < 2 - \pi < 0$,

所以 $f(x)$ 在 (α, π) 上也恰有一个零点. 7 分

②当 $x \in [\pi, 2\pi)$ 时, $\sin x \leq 0$, $f(x) \leq \ln x - x$,

设 $h(x) = \ln x - x$, $h'(x) = \frac{1}{x} - 1 < 0$,

所以 $h(x)$ 在 $[\pi, 2\pi)$ 上单调递减, 所以 $h(x) \leq h(\pi) < 0$, 8 分

所以当 $x \in [\pi, 2\pi)$ 时, $f(x) \leq h(x) \leq h(\pi) < 0$ 恒成立,

所以 $f(x)$ 在 $[\pi, 2\pi)$ 上没有零点. 9 分

③当 $x \in [2\pi, +\infty)$ 时, $f(x) \leq \ln x - x + 2$,

设 $\varphi(x) = \ln x - x + 2$, $\varphi'(x) = \frac{1}{x} - 1 < 0$,

所以 $\varphi(x)$ 在 $[2\pi, +\infty)$ 上单调递减,

所以 $\varphi(x) \leq \varphi(2\pi) = \ln 2\pi - 2\pi + 2 < 2 - 2\pi + 2 = 4 - 2\pi < 0$ 10 分

所以当 $x \in [2\pi, +\infty)$ 时, $f(x) \leq \varphi(x) \leq \varphi(2\pi) < 0$ 恒成立

所以 $f(x)$ 在 $[2\pi, +\infty)$ 上没有零点. 11 分

综上, $f(x)$ 有且仅有两个零点. 12 分

22. 【命题意图】 本题主要考查直线的参数方程和参数的几何意义, 直角坐标方程和极坐标方程的互化, 直线和圆的位置关系等基础知识, 意在考查直观想象、逻辑推理与数学运算的数学核心素养. 满分 10 分.

【解析】(1)曲线C的方程 $\rho = 4\cos\theta + 6\sin\theta$,

$$\therefore \rho^2 = 4\rho\cos\theta + 6\rho\sin\theta, \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$$

$$\therefore x^2 + y^2 = 4x + 6y, \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$$

即C的直角坐标方程为 $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 13$. $\dots\dots\dots 5 \text{ 分}$

(2)设点M, N对应的参数分别为 t_1, t_2 .

$$\text{把直线} \begin{cases} x = 3 - \frac{\sqrt{2}}{2}t \\ y = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}t \end{cases} (t \text{ 为参数}) \text{ 代入 } C \text{ 得, } \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}t\right)^2 + \left(-2 + \frac{\sqrt{2}}{2}t\right)^2 = 13,$$

整理得, $t^2 - 3\sqrt{2}t - 8 = 0$.

$$\Delta = (-3\sqrt{2})^2 + 32 = 50 > 0, \quad t_1 + t_2 = 3\sqrt{2}, \quad t_1 t_2 = -8, \quad \dots\dots\dots 7 \text{ 分}$$

$\therefore t_1, t_2$ 为异号, $\dots\dots\dots 8 \text{ 分}$

又 $\because$ 点A(3,1)在直线l上,

$$\therefore |AM| + |AN| = |t_1| + |t_2| = |t_1 - t_2| = \sqrt{(t_1 + t_2)^2 - 4t_1 t_2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}. \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

23. 【命题意图】 本题主要考查解绝对值不等式和不等式恒成立等基础知识,意在考查直观想象、逻辑推理与数学运算的数学核心素养. 满分10分.

【解析】(1)当 $a = 2$ 时, $f(x) = |2x - 1| - |2x + 1| > 1$,

当 $x \leq -\frac{1}{2}$ 时, 不等式 $f(x) = (1 - 2x) + 2x + 1 = 2 > 1$ 成立; $\dots\dots\dots 1 \text{ 分}$

当 $-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$ 时, $f(x) = (1 - 2x) - (2x + 1) = -4x > 1$,

$\therefore -\frac{1}{2} < x < -\frac{1}{4}$; $\dots\dots\dots 2 \text{ 分}$

当 $x \geq \frac{1}{2}$ 时, $f(x) = (2x - 1) - (2x + 1) = -2 > 1$ 不成立, $\dots\dots\dots 3 \text{ 分}$

综上, 不等式 $f(x) > 1$ 的解集为 $\left\{x \mid x < -\frac{1}{4}\right\}$. $\dots\dots\dots 5 \text{ 分}$

(2)当 $x \in (1, 2)$ 时, $f(x) > 1 - x$ 化为 $2x - 1 - |ax + 1| > 1 - x$,

$$\therefore 3x - 2 > |ax + 1|, \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

$$\therefore 2 - 3x < ax + 1 < 3x - 2, \therefore \frac{1}{x} - 3 < a < 3 - \frac{3}{x}, \dots\dots\dots 7 \text{ 分}$$

Q $y = \frac{1}{x} - 3$ 在 $(1, 2)$ 单调递减, 故 $-\frac{5}{2} < y < -2$; $\dots\dots\dots 8 \text{ 分}$

$y = 3 - \frac{3}{x}$ 在 $(1, 2)$ 单调递增, 故 $0 < y < \frac{3}{2}$, $\dots\dots\dots 9 \text{ 分}$

所以 $-2 < a < 0$,

所以 a 的取值范围是 $[-2, 0]$. $\dots\dots\dots 10 \text{ 分}$