

2020 届高三质量检测

文科数学参考答案及评分细则

评分说明:

1. 本解答给出了一种或几种解法供参考, 如果考生的解法与本解答不同, 可根据试题的主要考查内容比照评分标准制定相应的评分细则。

2. 对计算题, 当考生的解答在某一步出现错误时, 如果后继部分的解答未改变该题的内容和难度, 可视影响的程度决定后继部分的给分, 但不得超过该部分正确解答应给分数的一半; 如果后继部分的解答有较严重的错误, 就不再给分。

3. 解答右端所注分数, 表示考生正确做到这一步应得的累加分数。

4. 只给整数分数。选择题和填空题不给中间分。

一、选择题: 本大题考查基础知识和基本运算。每小题 5 分, 满分 60 分。

- (1) C (2) A (3) A (4) B (5) C (6) B
(7) D (8) A (9) D (10) A (11) C (12) D

二、填空题: 本大题考查基础知识和基本运算。每小题 5 分, 满分 20 分。

- (13) $\frac{\pi}{3}$ (14) 4 (15) $\frac{3\pi}{20}$ (16) $\frac{3\sqrt{3}}{4}$

三、解答题: 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

(17) 本小题主要考查分层抽样、古典概型等基础知识, 考查数据处理能力、运算求解能力、应用意识, 考查统计与概率思想。满分 12 分。

(I) 由已知, 数学与应用数学、 计算机科学与技术 and 金融工程三个专业的毕业生人数之比为 1:2:3, 由于采取分层抽样的方法抽取 18 人, 因此应从数学与应用数学、 计算机科学与技术 and 金融工程三个专业分别抽取 3 人 6 人 9 人, 4 分

(II) 从这 5 个人中随机抽取 2 人的所有结果有:

$\{A, B\}, \{A, C\}, \{A, D\}, \{A, E\}, \{B, C\}, \{B, D\},$

$\{B, E\}, \{C, D\}, \{C, E\}, \{D, E\}$, 共 10 种 8 分

由统计表可知, 事件 M 包含的结果有: $\{A, B\}, \{B, C\}, \{B, D\}, \{B, E\}, \{A, D\}, \{C, D\}, \{D, E\}$, 共 7 种 10 分

所以事件 M 发生的概率为 $P(M) = \frac{7}{10}$ 12 分

(18) 本小题考查等比数列的通项公式、前 n 项和公式、数列求和等基础知识, 考查运算求解能力, 考查函数与方程思想、分类与整合思想等。满分 12 分。

(I) 当 $n=1$ 时, $2a_1 - S_1 = 2$, 故 $a_1 = 2$ 1 分

由 $2a_n - S_n = 2 \dots\dots ①$

得 $2a_{n-1} - S_{n-1} = 2 (n \geq 2) \dots\dots ② \dots\dots 3 \text{ 分}$

①-②得, $2a_n - 2a_{n-1} - (S_n - S_{n-1}) = 0$, 即 $2a_n - 2a_{n-1} - a_n = 0$

整理得 $a_n = 2a_{n-1} (n \geq 2)$

故 $\{a_n\}$ 是以 2 为首项, 2 为公比的等比数列, $\dots\dots 5 \text{ 分}$

所以 $a_n = 2 \times 2^{n-1} = 2^n$, $\dots\dots 6 \text{ 分}$

(II) 由 (I) 得, $S_n = \frac{2(1-2^n)}{1-2} = 2^{n+1} - 2 \dots\dots 7 \text{ 分}$

$b_n = \frac{4 \times 2^n}{(2^{n+1} - 2)(2^{n+2} - 2)} = \frac{2^n}{(2^n - 1)(2^{n+1} - 1)} = \frac{1}{2^n - 1} - \frac{1}{2^{n+1} - 1} \dots\dots 10 \text{ 分}$

故 $T_n = b_1 + b_2 + \dots + b_n = \left(\frac{1}{2^1 - 1} - \frac{1}{2^2 - 1} \right) + \left(\frac{1}{2^2 - 1} - \frac{1}{2^3 - 1} \right) + \dots + \left(\frac{1}{2^n - 1} - \frac{1}{2^{n+1} - 1} \right)$
 $= 1 - \frac{1}{2^{n+1} - 1} \dots\dots 12 \text{ 分}$

(19) 本小题主要考查几何体的体积及直线与直线、直线与平面、平面与平面的位置关系等基础知识, 考查空间想象能力、推理论证能力、运算求解能力, 考查数形结合思想、化归与转化思想等. 满分 12 分.

(I) $\because AB \perp$ 侧面 BB_1C_1C , $\therefore AB \perp BC_1 \dots\dots ① \dots\dots 1 \text{ 分}$

$\because BC = \sqrt{2}$, $CC_1 = 2$, $\angle BCC_1 = \frac{\pi}{4}$, $\therefore BC_1 = \sqrt{BC^2 + CC_1^2 - 2BC \cdot CC_1 \cdot \cos \angle BCC_1} = \sqrt{2}$

$\because BC^2 + BC_1^2 = CC_1^2$, $\therefore BC_1 \perp BC \dots\dots ② \dots\dots 3 \text{ 分}$

由①②及 $AB \cap BC = B$, 故 $BC_1 \perp$ 平面 ABC

$\because AC \subset$ 平面 ABC , $\therefore BC_1 \perp AC \dots\dots 5 \text{ 分}$

(II) 设 C 到平面 AC_1E 的距离为 d

由 $V_{C-AC_1E} = V_{A-CC_1E}$ 得, $\frac{1}{3} S_{\triangle AC_1E} \cdot d = \frac{1}{3} S_{\triangle CC_1E} \cdot AB \dots\dots (*) \dots\dots 7 \text{ 分}$

$\because E$ 为 BB_1 中点, $\therefore S_{\triangle CC_1E} = \frac{1}{2} S_{\triangle BCC_1B_1} = \frac{1}{2} \times \sqrt{2} \times \sqrt{2} = 1 \dots\dots 8 \text{ 分}$

又 $BC_1 = B_1C_1 = \sqrt{2}$, 所以 $C_1E \perp BB_1$, $C_1E = \frac{1}{2} BB_1 = 1$

$\because AB \perp \text{侧面 } BB_1C_1C, \therefore AB \perp C_1E$

又 $AB \cap BB_1 = B$, 故 $C_1E \perp \text{平面 } ABB_1A_1$

又 $AE \subset \text{平面 } ABB_1A_1$, 所以 $C_1E \perp AE$

$\because AB = 2, BE = 1, AB \perp BE, \therefore AE = \sqrt{5}$

故 $S_{\triangle AC_1E} = \frac{1}{2} AE \cdot C_1E = \frac{\sqrt{5}}{2}$ 11 分

由 (*) 得 $\frac{\sqrt{5}}{2}d = 2$, 故 $d = \frac{4\sqrt{5}}{5}$, 即 C 到平面 AC_1E 的距离为 $\frac{4\sqrt{5}}{5}$ 12 分

(20) 本小题主要考查坐标法、椭圆的定义及标准方程、直线与椭圆的位置关系、圆的性质等基础知识, 考查推理论证能力、运算求解能力, 考查数形结合思想、函数与方程思想、化归与转化思想等. 满分 12 分.

(I) 设 F' 为椭圆的左焦点, 由对称性可知, $|OP| = |OQ|, |OF'| = |OF|$

故顶点为 P, F', Q, F 的四边形是平行四边形, 2 分

故 $2a = |PF'| + |PF| = |QF| + |PF| = 4, a = 2$

又 $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, 故 $c = \sqrt{2}, b = \sqrt{2}$ 4 分

故所求椭圆方程为 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1$ 5 分

(II) 设过原点 (不与坐标轴重合) 的直线方程为 $y = kx (k \neq 0)$,

$P(x_1, kx_1), Q(-x_1, -kx_1), E(x_1, 0)$

则 $k_{QE} = \frac{-kx_1 - 0}{-x_1 - x_1} = \frac{1}{2}k$

故 $l_{QE}: y = \frac{k}{2}(x - x_1)$ 7 分

与椭圆方程 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1$ 联立得, $(2 + k^2)x^2 - 2k^2x_1x + k^2x_1^2 - 8 = 0$

又直线 QE 与椭圆 C 交于 Q, M 两点, 所以

$x_P + x_M = \frac{2k^2x_1}{2 + k^2}$, 即 $x_M = \frac{2k^2x_1}{2 + k^2} + x_1$

故 $y_M = \frac{k}{2}(x_M - x_1) = \frac{k^3x_1}{2 + k^2}$ 10 分

所以 $\overrightarrow{PQ} = (-2x_1, -2kx_1), \overrightarrow{PM} = \left(\frac{2k^2x_1}{2 + k^2}, \frac{-2kx_1}{2 + k^2} \right)$

所以 $\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{PM} = -\frac{4k^2x_1^2}{2 + k^2} + \frac{4kx_1^2}{2 + k^2} = 0$

故 $PQ \perp PM$ ，即 $\angle MPQ = 90^\circ$

故以 QM 为直径的圆过点 P 12 分

(21) 本小题主要考查导数及其应用、不等式等基础知识，考查推理论证能力、运算求解能力、抽象概括能力等，考查函数与方程思想、化归与转化思想、分类与整合思想、数形结合思想等. 满分 12 分.

(I) 由已知得 $f'(x) = \frac{1}{x} + 2mx = \frac{2mx^2 + 1}{x} (x > 0)$ 1 分

当 $m \geq 0$ 时， $f'(x) > 0$ ， $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增，不存在最大值，不符合题意舍去；

..... 2 分

当 $m < 0$ 时， $f'(x) = 0$ 解得 $x = \sqrt{-\frac{1}{2m}}$

当 $0 < x < \sqrt{-\frac{1}{2m}}$ 时， $f'(x) > 0$ ，当 $x > \sqrt{-\frac{1}{2m}}$ 时， $f'(x) < 0$

故 $f(x)$ 在 $\left(0, \sqrt{-\frac{1}{2m}}\right)$ 上单调递增， $\left(\sqrt{-\frac{1}{2m}}, +\infty\right)$ 上单调递减 4 分

故 $f(x)_{\max} = f\left(\sqrt{-\frac{1}{2m}}\right) = \ln \sqrt{-\frac{1}{2m}} + m \left(\sqrt{-\frac{1}{2m}}\right)^2 = 0$

解得 $m = -\frac{1}{2e}$ 5 分

(II) 由已知条件得 $\ln x \leq ax + b$ (*)

设 $g(x) = \ln x - ax - b$ ，(*) 等价于证明 $g(x) \leq 0$ 则 $g'(x) = \frac{1}{x} - a$

① 当 $a < 0$ 时，则 $g'(x) > 0$ ， $g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增，

当 $x > \max\left\{1, -\frac{b}{a}\right\}$ 时， $g(x) = \ln x - ax - b > -ax - b > 0$

故 $a < 0$ 不符合题意； 7 分

② 当 $a > 0$ 时，当 $0 < x < \frac{1}{a}$ 时， $g'(x) > 0$ ，当 $x > \frac{1}{a}$ 时， $g'(x) < 0$

故 $g(x)$ 在 $\left(0, \frac{1}{a}\right)$ 上单调递增， $\left(\frac{1}{a}, +\infty\right)$ 上单调递减

故 $g(x)$ 有最大值 $g\left(\frac{1}{a}\right) = \ln\left(\frac{1}{a}\right) - a \cdot \frac{1}{a} - b = -\ln a - 1 - b$ 9 分

所以 $f(x) \leq -\frac{1}{2e}x^2 + ax + b$ 等价于 $b \geq -\ln a - 1$ ，因此 $\frac{b}{a} \geq \frac{-\ln a - 1}{a}$

设 $h(a) = -\frac{\ln a + 1}{a}$ ，则 $h'(a) = \frac{\ln a}{a^2}$

当 $0 < a < 1$ 时， $h'(a) < 0$ ，当 $a > 1$ 时， $h'(a) > 0$

故 $h(a)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减, 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增

故 $h(a)$ 在 $a=1$ 处取得最小值, 即 $h(a) \leq h(1) = -1$, $\frac{b}{a} \geq -1$ 11 分

故当 $a=1$, $b=-1$ 时, $f(x) \leq -\frac{1}{2e}x^2 + ax + b$ 成立,

综上 $\frac{b}{a}$ 的最小值为 -1 12 分

(22) 本小题主要考查参数方程、极坐标方程等基础知识, 考查运算求解能力, 考查数形结合思想、化归与转化思想、函数与方程思想等. 满分 10 分.

(I) 曲线 C 的方程 $\rho = 4\cos\theta + 6\sin\theta$,

$$\therefore \rho^2 = 4\rho\cos\theta + 6\rho\sin\theta,$$

$$\therefore x^2 + y^2 = 4x + 6y,$$

即 C 的直角坐标方程为 $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 13$ 4 分

(II) 设点 M, N 对应的参数分别为 t_1, t_2 .

$$\text{把直线 } \begin{cases} x = 3 - \frac{\sqrt{2}}{2}t \\ y = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}t \end{cases} \quad (t \text{ 为参数}) \text{ 代入 } C \text{ 得, } \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}t\right)^2 + \left(-2 + \frac{\sqrt{2}}{2}t\right)^2 = 13,$$

整理得, $t^2 - 3\sqrt{2}t - 8 = 0$.

$$\Delta = (-3\sqrt{2})^2 + 32 = 50 > 0, \quad t_1 + t_2 = 3\sqrt{2}, \quad t_1 t_2 = -8, \quad \therefore t_1, t_2 \text{ 为异号, } \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

又 $\because$ 点 $A(3,1)$ 在直线 l 上,

$$\therefore |AM| + |AN| = |t_1| + |t_2| = |t_1 - t_2| = \sqrt{(t_1 + t_2)^2 - 4t_1 t_2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}. \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

(23) 本小题主要考查绝对值不等式等基础知识, 考查运算求解能力、推理论证能力, 考查化归与转化思想、分类与整合思想、数形结合思想等. 满分 10 分.

(I) 当 $a=2$ 时, $f(x) = |2x-1| - |2x+1| > 1$,

当 $x, -\frac{1}{2}$ 时, 不等式 $f(x) = (1-2x) + 2x+1 = 2 > 1$ 成立;

当 $-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$ 时, $f(x) = (1-2x) - (2x+1) = -4x > 1, \therefore -\frac{1}{2} < x < -\frac{1}{4};$

当 $x \geq \frac{1}{2}$ 时, $f(x) = (2x-1) - (2x+1) = -2 > 1$ 不成立,

综上, 不等式 $f(x) > 1$ 的解集为 $\left\{x \mid x < -\frac{1}{4}\right\}$ 5 分

(II) 当 $x \in (1,2)$ 时, $f(x) > 1-x$ 化为 $2x-1 - |ax+1| > 1-x, \therefore 3x-2 > |ax+1|,$

$$\therefore 2-3x < ax+1 < 3x-2, \therefore \frac{1}{x} - 3 < a < 3 - \frac{3}{x},$$

$\because y = \frac{1}{x} - 3$ 在 $(1,2)$ 单调递减, 故 $-\frac{5}{2} < y < -2;$

$y = 3 - \frac{3}{x}$ 在 $(1, 2)$ 单调递增, 故 $0 < y < \frac{3}{2}$,

所以 $-2 \leq a < 0$,

所以 a 的取值范围是 $[-2, 0]$ 10 分