2020届高三3月质量检测

数学（理）试题

本试题分第Ⅰ卷（选择题）和第II卷（非选择题）两部分，共150分，考试时间120分钟。

第Ⅰ卷（选择题　共60分）

一、选择题：本题共12个小题，每小题5分，共60分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. “$\frac{1}{2}<x<1$”是“不等式$|x-1|<1$成立”的（　　）

A. 充分条件　　B. 必要条件　　C. 充分必要条件　　D. 既非充分也不必要条件

2. 已知i为虚数单位，若复数$(1+a\mathrm{i})(2+\mathrm{i})$是纯虚数，则实数$a$等于（　　）

A. -2　　B. $\frac{1}{2}$　　C. $-\frac{1}{2}$　　D. 2

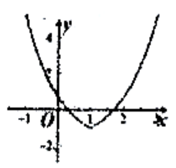
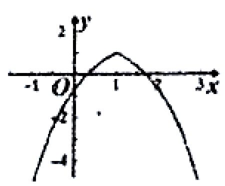
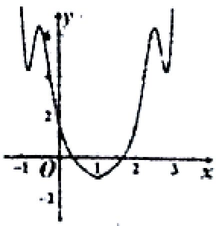
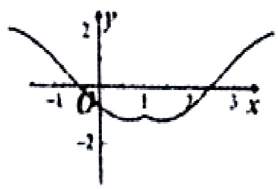
3. 已知$\cos\alpha=\frac{1}{4}$，则$\sin\left(\frac{\pi}{2}-2\alpha\right)=$（　　）

A. $\frac{1}{8}$　　B. $-\frac{1}{8}$　　C. $\frac{7}{8}$　　D. $-\frac{7}{8}$

4. 正项等比数列$\{a_n\}$中，$a_1a_5+2a_3a_7+a_5a_9=16$，且a_5与a_9的等差中项为4，则$\{a_n\}$的公比是（　　）

A. 1　　B. 2　　C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$　　D. $\sqrt{2}$

5. 函数$f(x)=\mathrm{e}^{|x-1|}-2\cos(x-1)$的部分图象可能是（　　）


A.

B.

C.

D.

6. 设F_1、F_2分别为双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的左、右焦点．若在双曲线右支上存在点$P$，满足$|PF_2|=|F_1F_2|$，且$F_2$到直线$PF_1$的距离等于双曲线的实轴长，则该双曲线的渐近线方程为（　　）

A. $3x\pm4y=0$　　B. $3x\pm5y=0$　　C. $4x\pm3y=0$　　D. $5x\pm4y=0$

7．已知函数 $f(x)=2\sin(\omega x+\varphi)\left(0<\varphi<\frac{\pi}{2}\right)$，且 $f(0)=1$，若函数 $f(x)$ 的图象关于 $x=\frac{4}{9}\pi$ 对称，则 ω 的取值可以是（　　）　A．1　B．2　C．3　D．4

8．若向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 的夹角为 $\frac{\pi}{3}$，且 $|\boldsymbol{a}|=2$，$|\boldsymbol{b}|=1$，则向量 $\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}$ 与向量 $\boldsymbol{a}$ 的夹角为（　　）

A．$\frac{\pi}{3}$　B．$\frac{\pi}{6}$　C．$\frac{2\pi}{3}$　D．$\frac{5\pi}{6}$

9．已知直线 l 经过不等式组 $\begin{cases}x-2y+1\le 0\\ x+3y-4\ge 0\\ y-2\le 0\end{cases}$ 表示的平面区域，且与圆 $O:x^2+y^2=16$ 相交于 A、B 两点，则当 $|AB|$ 最小时，直线 l 的方程为（　　）

A．$y-2=0$　B．$x-y+4=0$　C．$x+y-2=0$　D．$3x+2y-13=0$

10．已知 $\triangle ABC$ 是边长为 a 的正三角形，且 $\overrightarrow{AM}=\lambda\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AN}=(1-\lambda)\overrightarrow{AC}$ $(\lambda\in\mathbf{R})$，设 $f(\lambda)=\overrightarrow{BN}\cdot\overrightarrow{CM}$，当函数 $f(\lambda)$ 的最大值为 -2 时，$a=$（　　）

A．$\frac{4\sqrt{2}}{3}$　B．$4\sqrt{2}$　C．$\frac{4\sqrt{3}}{3}$　D．$4\sqrt{3}$

11．已知奇函数 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的单调函数，若函数 $g(x)=f(x^2)+f(a-2|x|)$ 恰有 4 个零点，则 a 的取值范围是（　　）　A．$(-\infty,1)$　B．$(1,+\infty)$　C．$(0,1]$　D．$(0,1)$

12．已知数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1=2$，若 $a_{n+1}=a_n^2+a_n$，设 $S_m=\frac{2a_1}{a_1+1}+\frac{2a_2}{a_2+1}+\cdots+\frac{2a_m}{a_m+1}$，若 $S_m<2020$，则正整数 m 的最大值为（　　）

A．1009　B．1010　C．2019　D．2020

第Ⅱ卷

二、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分．

13．在某次国际交流活动中，组织者在某天上午安排了六场专家报告（时间如下，转场时间忽略不计），并要求听报告者不能迟到和早退．

报告名称	A	B	C	D	E	F
开始时间	8：00	8：10	8：45	8：40	9：15	9：25
结束时间	8：30	9：05	9：20	9：30	10：10	10：10

某单位派甲、乙两人参会，为了获得更多的信息，单位要求甲、乙两人所听报告不相同，且所听报告的总时间尽可能长，那么甲、乙两人应该舍去的报告名称为______.

14. 已知 $a=\int_0^{\pi}\sin x\mathrm{d}x$，则 $\left(ax+\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)^5$ 的二项展开式中，x^2 的系数为__________.

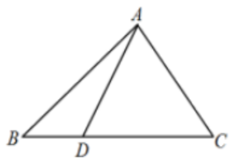
15．安排 A,B,C,D,E,F 六名义工照顾甲、乙、丙三位老人，每两位义工照顾一位老人．考虑到义工与老人住址距离问题，义工 A 不安排照顾老人甲，义工 B 不安排照顾老人乙，安排方法共有___________.

16. 已知四棱锥 P－ABCD 的底面 ABCD 是边长为 2 的正方形，且∠PAB＝90°。若四棱锥 P－ABCD 的五个顶点在以 4 为半径的同一球面上，当 PA 最长时，四棱锥 P－ABCD 的体积为_________。

三、解答题：解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

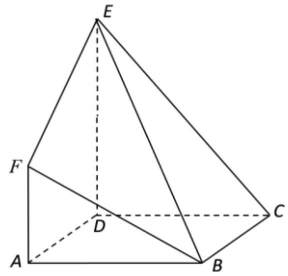
17.（12 分）如图，在 ΔABC 中，点 D 是边 BC 上一点，$AB=14$，$BD=6$，$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BD}=66$.

（1）若 $C>B$，且 $\cos\left(C-B\right)=\dfrac{13}{14}$，求角 C;



（2）若 ΔACD 的面积为 S，且 $S=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CD}$，求 AC 的长度.

18.（12 分）如图，在多面体 $ABCDEF$ 中，梯形 $ADEF$ 与平行四边形 $ABCD$ 所在平面互相垂直，$AF\mathbin{/\!/}DE$，$DE\perp AD$，$AD\perp BE$，$AF=AD=\dfrac{1}{2}DE=1$，$AB=\sqrt{2}$.



（1）求证：$BF\mathbin{/\!/}$平面 CDE；

（2）判断线段 BE 上是否存在点 Q，使得平面 $CDQ\perp$平面 BEF？若存在，求出 $\dfrac{BQ}{BE}$ 的值，若不存在，说明理由.

19.（12 分）已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\left(a>b>0\right)$ 的离心率为 $\dfrac{1}{2}$，M 是椭圆 C 的上顶点，F_1，F_2 是椭圆 C 的焦点，$\triangle MF_1F_2$ 的周长是 6.

（1）求椭圆 C 的标准方程;

（2）过动点 $P\left(1,t\right)$ 作直线交椭圆 C 于 A，B 两点，且 $|PA|=|PB|$，过 P 作直线 l，使 l 与直线 AB 垂直，证明：直线 l 恒过定点，并求此定点的坐标.

20.（12 分）已知函数 $f\left(x\right)=a\ln x+x^2+\left(a+2\right)x$.

（1）讨论函数 $f\left(x\right)$ 的单调性;

（2）设 $a<0$，若不相等的两个正数 x_1， x_2 满足 $f\left(x_1\right)=f\left(x_2\right)$，证明： $f'\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)>0$.

21．一款击鼓小游戏的规则如下：每盘游戏都需击鼓三次，每次击鼓后要么出现一次音乐，要么不出现音乐；每盘游戏击鼓三次后，出现三次音乐获得 150 分，出现两次音乐获得 100 分，出现一次音乐获得 50 分，没有出现音乐则获得-300 分.设每次击鼓出现音乐的概率为 $p\left(0<p<\frac{2}{5}\right)$，且各次击鼓出现音乐相互独立.

（1）若一盘游戏中仅出现一次音乐的概率为 $f\left(p\right)$，求 $f\left(p\right)$ 的最大值点 p_0；

（2）以（1）中确定的 p_0 作为 p 的值，玩 3 盘游戏，出现音乐的盘数为随机变量 X ，求每盘游戏出现音乐的概率 p_1，及随机变量 X 的期望 EX ；

（3）玩过这款游戏的许多人都发现，若干盘游戏后，与最初的分数相比，分数没有增加反而减少了.请运用概率统计的相关知识分析分数减少的原因.

请考生在 22、23 两题中任选一题作答，如果多做，则按所做的第一题记分.

22.（10 分）【选修 4-4：坐标系与参数方程】

在直角坐标系 xOy 中，曲线 C_1： $\begin{cases}x=a\left(1+\sin t\right)\\y=a\cos t\end{cases}$ （$a>0$， t 为参数）. 在以坐标原点为极点， x 轴的正半轴为极轴的极坐标系中，曲线 C_2： $\theta=\frac{\pi}{6}\left(\rho\in\mathbf{R}\right)$.

（1）说明 C_1 是哪一种曲线，并将 C_1 的方程化为极坐标方程；

（2）若直线 C_3 的方程为 $y=-\sqrt{3}x$，设 C_2 与 C_1 的交点为 O， M， C_3 与 C_1 的交点为 O， N，若 $\triangle OMN$ 的面积为 $2\sqrt{3}$，求 a 的值.

23.[选修 4－5：不等式选讲](10 分)

已知不等式 $|x+1|+|x|+|x-1|\geqslant|m+1|$ 对于任意的 $x\in R$ 恒成立。

(1)求实数 m 的取值范围；

(2)若 m 的最大值为 M，且正实数 a，b，c 满足 a＋2b＋3c＝M。求证 $\frac{1}{2a+b}+\frac{1}{b+2c}\geq 2+\sqrt{3}$ 。