

南阳一中2020年春期高三第十次考试

数学(文)试题(2020.2.29) 参考答案

1. C

因为 $\frac{1-2i}{z} = 1+i$, 所以 $z = \frac{1-2i}{1+i}$, 所以 $|z| = \left| \frac{1-2i}{1+i} \right| = \frac{|1-2i|}{|1+i|} = \frac{\sqrt{1+4}}{\sqrt{1+1}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{10}}{2}$.

2. C

$$A = \{x | x^2 + x - 2 < 0\} = \{x | (x+2)(x-1) < 0\} = \{x | -2 < x < 1\}$$

$$B = \{x | -x^2 + x < 0\} = \{x | x(x-1) > 0\} = \{x | x > 1 \text{ 或 } x < 0\}$$

故 $C_R B = \{x | 0 \leq x \leq 1\}$, 故 $A \cup (C_R B) = \{x | -2 < x \leq 1\}$

3. A

对于 $a = \log_{0.7} 0.8$, $0 = \log_{0.7} 1 < \log_{0.7} 0.8 < \log_{0.7} 0.7 = 1$

$b = \log_{1.1} 0.9 < \log_{1.1} 1 = 0$ $c = 1.1^{0.9} > 1.1^0 = 1$ 所以: $b < a < c$

4. C

设两码头距离为 S , 则 $\bar{v} = \frac{2S}{\frac{S}{v_1} + \frac{S}{v_2}} = \frac{2v_1 v_2}{v_1 + v_2}$

$$\bar{v} - \frac{v_1 + v_2}{2} = \frac{2v_1 v_2}{v_1 + v_2} - \frac{v_1 + v_2}{2} = \frac{4v_1 v_2 - (v_1 + v_2)^2}{2(v_1 + v_2)} = \frac{-(v_1 - v_2)^2}{2(v_1 + v_2)} < 0 (v_1 \neq v_2) \text{ 即 } \bar{v} < \frac{v_1 + v_2}{2}$$

5. A

由题对于给定函数 $y = f(x)$ 的图象在下列四个选项中, 并且对任意 $a_1 \in (0, 1)$, 由关系式 $a_{n+1} = f(a_n)$ 得到的数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+1} < a_n$. 则可得到 $f(a_n) < a_n$, 所以 $f(a_1) < a_1$ 在 $\forall a_1 \in (0, 1)$ 上都成立, 即 $\forall x \in (0, 1)$, $f(x) < x$, 所以函数图象都在 $y = x$ 的下方.

6. A

从第5行第6列开始向右读取数据,

第一个数为253, 第二个数是313, 第三个数是457,

下一个数是860, 不符合要求, 下一个数是736, 不符合要求, 下一个是253, 重复,

第四个是007, 第五个是328, 第六个是623, 故选A.

7. A

把函数 $y = \sin(x + \frac{\pi}{6})$ 图象上各点的横坐标缩短到原来的 $\frac{1}{2}$ (纵坐标不变) 得 $y = \sin(2x + \frac{\pi}{6})$, 再将图象向

右平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度得 $y = \sin(2(x - \frac{\pi}{3}) + \frac{\pi}{6}) = \sin(2x - \frac{\pi}{2}) = -\cos 2x$, 一条对称轴方程为 $x = -\frac{\pi}{2}$,

8. D

由题意, 向量 $\vec{a} = (1, 2)$, $\vec{b} = (m, 3)$, 因为 $\vec{a} \perp (2\vec{a} - \vec{b})$, 所以

$$\vec{a} \cdot (2\vec{a} - \vec{b}) = 2\vec{a}^2 - \vec{a} \cdot \vec{b} = 10 - (m + 6) = 0, \text{ 解答 } m = 4, \text{ 即 } \vec{a} = (1, 2), \vec{b} = (4, 3),$$

$$\text{则 } \vec{a} \text{ 在 } \vec{b} \text{ 方向上的投影为 } \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|} = \frac{1 \times 4 + 2 \times 3}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = 2.$$

9. D

模拟执行程序框图, 可得 $x = 2, y = 0$.

满足条件 $y < 2019$, 执行循环体, $x = -1, y = 1$; 满足条件 $y < 2019$, 执行循环体, $x = \frac{1}{2}, y = 2$;

满足条件 $y < 2019$, 执行循环体, $x = 2, y = 3$; 满足条件 $y < 2019$, 执行循环体, $x = -1, y = 4$;

...

观察规律可知, x 的取值周期为 3, 由于 $2019 = 673 \times 3$, 可得:

满足条件 $y < 2019$, 执行循环体, 当 $x = 2, y = 2019$, 不满足条件 $y < 2019$, 退出循环, 输出 x 的值为 2.

10. D

设双曲线的左焦点为 F_1 , 由双曲线的对称性可知四边形 MF_2PF_1 为平行四边形

$$\therefore |MF_1| = |PF_2|, MF_1 \parallel PN. \text{ 设 } |PF_2| = m, \text{ 则 } |MF_2| = 3m,$$

$$\therefore 2a = |MF_2| - |MF_1| = 2m, \text{ 即 } |MF_1| = a, |MF_2| = 3a. \therefore$$

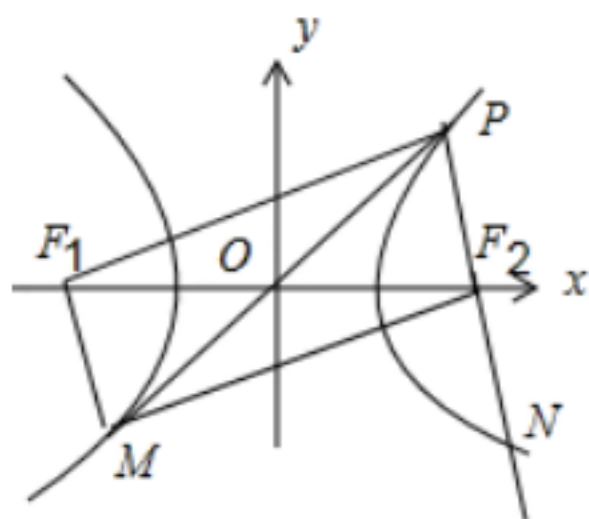
$$\angle MF_2N = 60^\circ, \therefore \angle F_1MF_2 = 60^\circ,$$

又 $|F_1F_2| = 2c$, 在 $\triangle MF_1F_2$ 中, 由余弦定理可得:

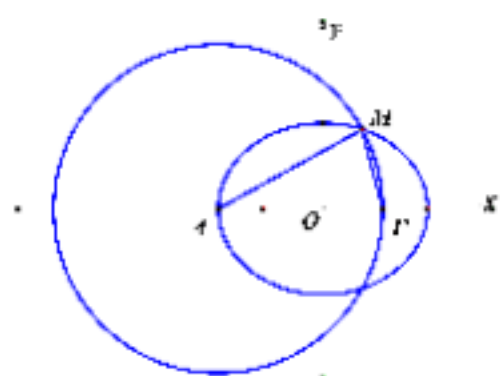
$$4c^2 = a^2 + 9a^2 - 2 \cdot a \cdot 3a \cdot \cos 60^\circ,$$

$$\text{即 } 4c^2 = 7a^2, \therefore \frac{c^2}{a^2} = \frac{7}{4}, \therefore \text{双曲线的离心率 } e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{7}}{2}.$$

11. A



12. C



解: 由题意 $A(-a, 0), F(c, 0)$,

由题意有 $|AM| = |AF| = a + c = 2|MF|$, 则 $|MF| = \frac{a+c}{2}$, 设 $\angle MAF = \theta$, 由余弦定理得

$$\cos \theta = \frac{|AM|^2 + |AF|^2 - |MF|^2}{2|AM| \cdot |AF|} = \frac{7|MF|^2}{8|MF|^2} = \frac{7}{8}, \therefore \sin \theta = \sqrt{1 - \cos^2 \theta} = \frac{\sqrt{15}}{8}, \text{ 则 } \tan \theta = \frac{\sqrt{15}}{7},$$

$\therefore$ 直线 AM 的方程为 $y = \frac{\sqrt{15}}{7}(x+a)$, 又圆 A 的标准方程为 $(x+a)^2 + y^2 = (a+c)^2$,

$$\text{联立 } \begin{cases} (x+a)^2 + y^2 = (a+c)^2 \\ y = \frac{\sqrt{15}}{7}(x+a) \end{cases} \text{ 解得 } \begin{cases} x = \frac{7c-a}{8} \\ y = \frac{\sqrt{15}(a+c)}{8} \end{cases}, \text{ 或 } \begin{cases} x = -\frac{15a+7c}{8} \\ y = -\frac{\sqrt{15}(a+c)}{8} \end{cases},$$

$$\therefore M\left(\frac{7c-a}{8}, \frac{\sqrt{15}(a+c)}{8}\right), \text{ 由焦半径公式得 } |MF| = a - e \cdot \frac{7c-a}{8} = \frac{8a^2 - 7c^2 + ac}{8a} = \frac{a+c}{2},$$

化简得 $7c^2 + 3ac - 4a^2 = 0$, 方程两边同时除以 a^2 得 $(7e-4)(e+1) = 0$, 解得 $e = \frac{4}{7}$, 或 $e = -1$ (舍去),

13. $x + y + 2 = 0$

$y = (x-2)e^x, y' = (x-1)e^x$, 令 $x=0, y' = -1$, 切线斜率为 -1 ,

所以曲线在点 $(0, -2)$ 处的切线方程为 $x + y + 2 = 0$. 故答案为: $x + y + 2 = 0$

14. $\frac{31}{16}$

因为 S_n 是数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, $S_n = 2 - a_n$, 所以由 $a_n = S_n - S_{n-1} = a_{n-1} - a_n (n \geq 2)$, 所以

$a_n = \frac{1}{2}a_{n-1}$, 所以数列 $\{a_n\}$ 是以 $\frac{1}{2}$ 为公比的等比数列, 又 $S_1 = 2 - a_1 = a_1$, 所以 $a_1 = 1$,

故 $a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$, 所以 $S_5 = 2 - a_5 = 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{31}{16}$.

15. $\frac{4}{9}\sqrt{3}$

由题得 $y = \sin \frac{x}{2} \cdot 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} = 2 \sin^2 \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} = 2(1 - \cos^2 \frac{x}{2}) \cos \frac{x}{2}$,

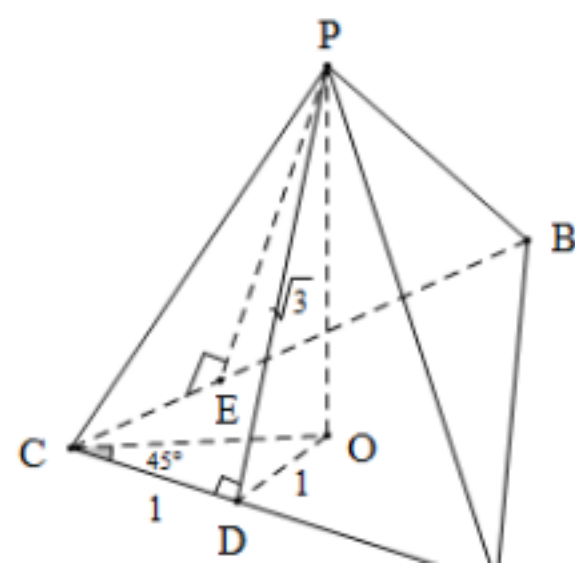
令 $t = \cos \frac{x}{2}, t \in [-1, 1]$, 所以 $f(t) = 2(1 - t^2)t = -2t^3 + 2t, \therefore f'(t) = -6t^2 + 2$,

由 $f'(t) > 0$ 得 $-\frac{\sqrt{3}}{3} < t < \frac{\sqrt{3}}{3}$ 时函数 $f(t)$ 单调递增, 由 $f'(t) < 0$ 得函数 $f(t)$ 在 $-1 < t < -\frac{\sqrt{3}}{3}$ 和 $\frac{\sqrt{3}}{3} < t < 1$ 时

单调递减, 又 $f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{4}{9}\sqrt{3}, f(-1) = 0$, 所以函数 $y = \sin \frac{x}{2} \cdot \sin x$ 的最大值为 $\frac{4}{9}\sqrt{3}$. 故答案为: $\frac{4}{9}\sqrt{3}$

16. $\sqrt{2}$.

作 PD, PE 分别垂直于 AC, BC , $PO \perp$ 平面 ABC , 连 CO , 知



$CD \perp PD, CD \perp PO, PD \cap OD = P,$
 $\therefore CD \perp \text{平面 } PDO, OD \subset \text{平面 } PDO, \therefore CD \perp OD \because PD = PE = \sqrt{3}, PC = 2$
 $\therefore \sin \angle PCE = \sin \angle PCD = \frac{\sqrt{3}}{2}, \therefore \angle PCB = \angle PCA = 60^\circ,$
 $\therefore PO \perp CO, CO \text{ 为 } \angle ACB \text{ 平分线}, \therefore \angle OCD = 45^\circ \therefore OD = CD = 1, OC = \sqrt{2}, \text{ 又 } PC = 2,$
 $\therefore PO = \sqrt{4 - 2} = \sqrt{2}.$

17. (1) 第二种生产方式的效率更高. -----2分

理由如下:

- (i) 由茎叶图可知: 用第一种生产方式的工人中, 有75%的工人完成生产任务所需时间至少80分钟, 用第二种生产方式的工人中, 有75%的工人完成生产任务所需时间至多79分钟. 因此第二种生产方式的效率更高.
 (ii) 由茎叶图可知: 用第一种生产方式的工人完成生产任务所需时间的中位数为85.5分钟, 用第二种生产方式的工人完成生产任务所需时间的中位数为73.5分钟. 因此第二种生产方式的效率更高.
 (iii) 由茎叶图可知: 用第一种生产方式的工人完成生产任务平均所需时间高于80分钟; 用第二种生产方式的工人完成生产任务平均所需时间低于80分钟, 因此第二种生产方式的效率更高.
 (iv) 由茎叶图可知: 用第一种生产方式的工人完成生产任务所需时间分布在茎8上的最多, 关于茎8大致呈对称分布; 用第二种生产方式的工人完成生产任务所需时间分布在茎7上的最多, 关于茎7大致呈对称分布, 又用两种生产方式的工人完成生产任务所需时间分布的区间相同, 故可以认为用第二种生产方式完成生产任务所需的时间比用第一种生产方式完成生产任务所需的时间更少, 因此第二种生产方式的效率更高.
 以上给出了4种理由, 考生答出其中任意一种或其他合理理由均可得分. -----4分

(2) 由茎叶图知 $m = \frac{79 + 81}{2} = 80.$ -----6分

列联表如下:

	超过 m	不超过 m
第一种生产方式	15	5
第二种生产方式	5	15

-----8分

(3) 由于 $K^2 = \frac{40(15 \times 15 - 5 \times 5)^2}{20 \times 20 \times 20 \times 20} = 10 > 6.635,$ 所以有99%的把握认为两种生产方式的效率有差异. -----12分

18. (1) 当 $n = 1$ 时, $2a_1 = 4,$ 解得 $a_1 = 2;$

当 $n \geq 2$ 时, $2a_1 + 7a_2 + 12a_3 + \cdots + (5n-3)a_n = 4n$,

$2a_1 + 7a_2 + 12a_3 + \cdots + (5n-8)a_{n-1} = 4(n-1)$, 两式相减可得, $(5n-3)a_n = 4$,

解得 $a_n = \frac{4}{5n-3}$, 易知 $a_1 = 2$ 也符合上式, 综上所述, $a_n = \frac{4}{5n-3}$, -----6分

(2) 依题意: $\frac{3^n}{a_n} = \frac{(5n-3) \cdot 3^n}{4}$, 下面先求数列 $\{(5n-3) \cdot 3^n\}$ 的前 n 项和 T_n ;

$$T_n = 2 \cdot 3^1 + 7 \cdot 3^2 + 12 \cdot 3^3 + \cdots + (5n-3) \cdot 3^n, \quad 3T_n = 2 \cdot 3^2 + 7 \cdot 3^3 + 12 \cdot 3^4 + \cdots + (5n-3) \cdot 3^{n+1},$$

两式相减可得, $-2T_n = 2 \cdot 3^1 + 5 \cdot 3^2 + \cdots + 5 \cdot 3^n - (5n-3) \cdot 3^{n+1}$,

即 $-2T_n = 5 \cdot 3^1 + 5 \cdot 3^2 + \cdots + 5 \cdot 3^n - (5n-3) \cdot 3^{n+1} - 9$ 所以 $-2T_n = 15 \cdot \frac{1-3^n}{1-3} - (5n-3) \cdot 3^{n+1} - 9$,

化简可得, $T_n = \frac{33}{4} + \left(\frac{5n}{2} - \frac{11}{4}\right) \cdot 3^{n+1}$, 故 $S_n = \frac{T_n}{4} = \frac{33}{16} + \left(\frac{5n}{8} - \frac{11}{16}\right) \cdot 3^{n+1}$. -----12分

19. (1) 在 $\triangle ABD$ 中, $AD = 4, BD = 8, AB = 4\sqrt{5}, AB^2 + BD^2 = AD^2$, $\therefore AD \perp BD$

又 $PD \perp$ 平面 $ABCD, BD \subseteq$ 平面 $ABCD, \therefore PD \perp BD$, 又 $PD \cap AD = D, \therefore BD \perp$ 平面 PAD

又 $BD \subseteq$ 平面 $MBD, \therefore$ 平面 $MBD \perp$ 平面 PAD , -----6分

(2) 因为 M 是 PC 的中点, 所以 $V_{P-DMB} = V_{C-DMB} = V_{M-BCD}$

在四边形 $ABCD$ 中, 由已知可求得 $S_{ABCD} = 8$, 又点 M 到平面 $ABCD$ 的距离等于 $\frac{1}{4}PD = 2$,

所以 $V_{M-BCD} = \frac{1}{3} \times 8 \times 2 = \frac{16}{3}$, 即三棱锥 $P-DMB$ 的体积为 $\frac{16}{3}$ -----12分

20. (1) 解: 当 $a = \frac{1}{2}$ 时, $f'(x) = \frac{1}{2} - \cos x$, -----2分

由 $f'(x) = 0$, 得 $x = \frac{\pi}{3}$, 所以 $x \in \left(0, \frac{\pi}{3}\right)$ 时, $f'(x) < 0$; $x \in \left(\frac{\pi}{3}, \pi\right)$ 时, $f'(x) > 0$,

因此 $f(x)$ 的单调递减区间为 $\left(0, \frac{\pi}{3}\right)$, 单调递增区间为 $\left(\frac{\pi}{3}, \pi\right)$, -----4分

$f(x)$ 的最大值为 $\max\{f(0), f(\pi)\} = \max\left\{-1, \frac{\pi}{2} - 1\right\} = \frac{\pi}{2} - 1$. -----6分

(2) 证明: 先证 $\frac{2}{\pi}x - \sin x + \cos x - 1 \leq 0$, -----8分

令 $g(x) = \frac{2}{\pi}x - \sin x + \cos x - 1$,

则 $g'(x) = \frac{2}{\pi} - \cos x - \sin x = \frac{2}{\pi} - \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$,

由 $y = \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$, $x \in [0, \pi]$ 与 $y = \frac{2}{\pi}$ 的图象易知, 存在 $x_0 \in [0, \pi]$, 使得 $g'(x_0) = 0$,

故 $x \in (0, x_0)$ 时, $g'(x) < 0$; $x \in (x_0, \pi)$ 时, $g'(x) > 0$,

所以 $g(x)$ 的单调递减区间为 $(0, x_0)$, 单调递增区间为 (x_0, π) ,

所以 $g(x)$ 的最大值为 $\max\{g(0), g(\pi)\}$, 而 $g(0)=0, g(\pi)=0$.-----10分

又由 $a \leq \frac{2}{\pi}, x \geq 0$, 所以 $ax - \sin x - 1 + \cos x \leq \frac{2}{\pi}x - \sin x - 1 + \cos x \leq 0$,

当且仅当 $\begin{cases} a = \frac{2}{\pi} \\ x = 0(\text{或}\pi) \end{cases}$, 取“=”成立, 即 $f(x) + \cos x \leq 0$ -----12分

21. (I) 由题意知, 抛物线焦点为: $(0, \frac{p}{2})$, 准线方程为: $y = -\frac{p}{2}$ 焦点到准线的距离为2,

即 $p = 2$.-----4分

(II) 抛物线的方程为 $x^2 = 4y$, 即 $y = \frac{1}{4}x^2$, 所以 $y' = \frac{1}{2}x$ 设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$,

$l_1: y - \frac{y_1}{4} = \frac{x_1}{2}(x - x_1) \quad l_2: y - \frac{y_2}{4} = \frac{x_2}{2}(x - x_2)$ 由于 $l_1 \perp l_2$, 所以 $\frac{x_1}{2} \cdot \frac{x_2}{2} = -1$, 即 $x_1 x_2 = -4$ -----6分

设直线 l 方程为 $y = kx + m$, 与抛物线方程联立, 得

$\begin{cases} y = kx + m \\ x^2 = 4y \end{cases}$ 所以 $x^2 - 4kx - 4m = 0 \Delta = 16k^2 + 16m > 0, x_1 + x_2 = 4k, x_1 x_2 = -4m = -4$, 所以 $m = 1$

即 $l: y = kx + 1$ 联立方程 $\begin{cases} y = \frac{x_1}{2}x - \frac{x_1^2}{4} \\ y = \frac{x_2}{2}x - \frac{x_2^2}{4} \end{cases}$ 得: $\begin{cases} x = 2k \\ y = -1 \end{cases}$, 即: $M(2k, -1)$ -----8分

M点到直线 l 的距离 $d = \frac{|k \cdot 2k + 1 + 1|}{\sqrt{1+k^2}} = \frac{2|k^2+1|}{\sqrt{1+k^2}} |AB| = \sqrt{(1+k^2)[(x_1+x_2)^2 - 4x_1x_2]} = 4(1+k^2)$ -----10分

所以 $S = \frac{1}{2} \times 4(1+k^2) \times \frac{2|k^2+1|}{\sqrt{1+k^2}} = 4(1+k^2)^{\frac{3}{2}} \geq 4$ 当 $k = 0$ 时, ΔMAB 面积取得最小值4-----12分

22. (1) 因为曲线 C 的参数方程为 $\begin{cases} x = 3 + 5\cos\theta \\ y = -4 + 5\sin\theta \end{cases}$, (θ 为参数),

所以曲线 C 的直角坐标方程为 $(x-3)^2 + (y+4)^2 = 25$, 即 $x^2 - 6x + y^2 + 8y = 0$,-----3分

将 $x = \rho \cos\theta, y = \rho \sin\theta, \rho^2 = x^2 + y^2$, 代入上式得 $\rho = 6\cos\theta - 8\sin\theta$.-----5分

(2) 直线的参数方程为 $\begin{cases} x = 2 + \frac{\sqrt{2}}{2}t \\ y = \frac{\sqrt{2}}{2}t \end{cases}$, (t 为参数), 将 $\begin{cases} x = 2 + \frac{\sqrt{2}}{2}t \\ y = \frac{\sqrt{2}}{2}t \end{cases}$ 代入 $x^2 - 6x + y^2 + 8y = 0$,

整理得 $t^2 + 3\sqrt{2}t - 8 = 0$,-----7分

设点 M, N 所对应的参数分别为 t_1, t_2 , 则 $t_1 + t_2 = -3\sqrt{2}, t_1 t_2 = -8, \Delta = 18 + 32 = 50 > 0$, 因为 t_1, t_2 异号,-----8分

所以 $\frac{1}{|PM|} + \frac{1}{|PN|} = \frac{1}{|t_1|} + \frac{1}{|t_2|} = \frac{|t_1 - t_2|}{|t_1 t_2|} = \frac{\sqrt{(t_1 + t_2)^2 - 4t_1 t_2}}{|t_1 t_2|} = \frac{5\sqrt{2}}{8}$.-----10分

23. (1) 当 $a = -4$ 时, $f(x) = x^2 - 4x + 4$,

$$g(x)=|x+2|+|x-2|=\begin{cases}-2x, x\leq -2 \\ 4, -2 < x < 2, \\ 2x, x\geq 2\end{cases} \text{-----2分}$$

当 $x\leq -2$ 时, $x^2-4x+4\geq -2x$, 解得 $x\leq -2$;

当 $-2 < x < 2$ 时, $x^2-4x+4\geq 4$, 解得 $-2 < x\leq 0$;

当 $x\geq 2$ 时, $x^2-4x+4\geq 2x$, 解得 $x\geq 3+\sqrt{5}$.

综上, 不等式的解集为 $\{x|x\leq 0 \text{ 或 } x\geq 3+\sqrt{5}\}$.-----5分

(2) $\phi(x)\leq g(x)$ 的解集包含 $[2, 4]$ 等价于 $x^2+ax+4\leq |x+2|+|x-2|$ 在 $[2, 4]$ 上恒成立,

即 $x^2+(a-2)x+4\leq 0$ 对于 $x\in[2, 4]$ 上恒成立, -----7分

令 $h(x)=x^2+(a-2)x+4$,

要使 $h(x)\leq 0$ 在 $[2, 4]$ 恒成立, 结合二次函数的图象可知,

只要 $\begin{cases} h(2)\leq 0 \\ h(4)\leq 0 \end{cases} \therefore a\leq -3$.-----10分