

2020 届高三月考试卷

数学(理科)参考答案

一、选择题:本大题共 12 个小题,每小题 5 分,共 60 分.在每小题给出的四个选项中,只有一个选项是符合题目要求的.

题 号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答 案	C	D	C	C	A	D	C	D	C	C	B	C

1. C 【解析】由题意 $A = \{y | y \geq 0\}$, $B = \{x | -1 < x < 2\}$, $\therefore A \cap B = [0, 2)$. 故选: C.

2. D 【解析】设 $z = x + yi (x, y \in \mathbf{R})$, 则 $\bar{z} = x - yi$, $\therefore z - \bar{z} = 0$, 且 $z \cdot \bar{z} = 4$, $\therefore 2yi = 0 \Rightarrow y = 0$, 且 $x^2 + y^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$, $\therefore z = \pm 2$.

3. C 【解析】“若 $\alpha = \frac{\pi}{6}$, 则 $\sin \alpha = \frac{1}{2}$ ”的否命题是“若 $\alpha \neq \frac{\pi}{6}$, 则 $\sin \alpha \neq \frac{1}{2}$ ”, 所以 A 不正确; 若命题 p , $\neg q$ 均为真命题, 则 q 是假命题, 所以命题 $p \wedge q$ 为假命题, 所以 B 不正确; 命题 p : “ $\exists x_0 \in \mathbf{R}, x_0^2 - x_0 - 5 > 0$ ”的否定为 $\neg p$: “ $\forall x \in \mathbf{R}, x^2 - x - 5 \leq 0$ ”, 所以 C 正确; 在 $\triangle ABC$ 中, “ $C = \frac{\pi}{2}$ ” $\Leftrightarrow$ “ $A + B = \frac{\pi}{2}$ ” $\Leftrightarrow$ “ $A = \frac{\pi}{2} - B$ ” $\Rightarrow \sin A = \cos B$, 反之 $\sin A = \cos B, A + B = \frac{\pi}{2}$, 或 $A = \frac{\pi}{2} + B$, “ $C = \frac{\pi}{2}$ ”不一定成立, $\therefore C = \frac{\pi}{2}$ 是 $\sin A = \cos B$ 成立的充分不必要条件, 所以 D 不正确.

4. C 【解析】由已知, $(2a + b)^2 = 3(2a - b)^2$, 即 $4a^2 + 4a \cdot b + b^2 = 3(4a^2 - 4a \cdot b + b^2)$. 因为 $|a| = 1, |b| = 2$, 则 $a^2 = 1, b^2 = 4$, 所以 $8 + 4a \cdot b = 3(8 - 4a \cdot b)$, 即 $a \cdot b = 1$. 设向量 a 与 b 的夹角为 θ , 则 $|a| \cdot |b| \cos \theta = 1$, 即 $\cos \theta = \frac{1}{2}$, 故 $\theta = 60^\circ$.

5. A 【解析】由 $\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}$ 得, $\cos\left(2\alpha + \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{3}$, 所以 $\sin\left(2\alpha - \frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(2\alpha + \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{2}\right) = -\cos\left(2\alpha + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{3}$.

6. D 【解析】由于 $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{\frac{1}{2} - \ln \frac{1}{2} - 1} = \frac{1}{\ln 2 - \frac{1}{2}} > 0$, 排除 B 选项; 由于 $f(e) = \frac{1}{e - 2}, f(e^2) = \frac{1}{e^2 - 3}$, $f(e) > f(e^2)$, 函数单调递减, 排除 C 选项; 由于 $f(e^{100}) = \frac{1}{e^{100} - 101} > 0$, 排除 A 选项.

7. C 【解析】因为左右平移不改变最值, 所以 $\sqrt{5+5} = \sqrt{9+a^2}$, $\therefore a^2 = 1, \therefore a < 0, \therefore a = -1$. 因为 $y = \sqrt{5} \sin x + \sqrt{5} \cos x = \sqrt{10} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$, 向右平移 θ 个单位得到 $y = \sqrt{10} \sin\left(x - \theta + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{10} \cos\left(\frac{\pi}{4} - \theta\right) \sin x + \sqrt{10} \sin\left(\frac{\pi}{4} - \theta\right) \cos x$, 而 $y = 3 \sin x + a \cos x = 3 \sin x - \cos x$, 所以 $\sqrt{10} \cos\left(\frac{\pi}{4} - \theta\right) = 3, \sqrt{10} \sin\left(\frac{\pi}{4} - \theta\right) = -1$, 即 $\tan\left(\frac{\pi}{4} - \theta\right) = -\frac{1}{3}$, 从而 $\tan \theta = \tan\left[\frac{\pi}{4} - \left(\frac{\pi}{4} - \theta\right)\right] = \frac{1 - \left(-\frac{1}{3}\right)}{1 + \left(-\frac{1}{3}\right)} = 2$.

8. D 【解析】根据题意,分3步进行分析:

①将4名男生分成1,3的两组,有 $C_4^3=4$ 种分组方法,其中三人组三人之间的顺序有 A_3^3 种,

②将6名女生全排列,有 A_6^6 种情况,排好后有7个空位,

③将分好的2组安排到7个空位中,有 A_7^2 种情况,

则不同的排法有 $C_4^3 A_3^3 A_6^6 A_7^2 = A_4^3 A_6^6 A_7^2$ 种.

9. C 【解析】由题意, $2\cos^2 \frac{A}{2} - 1 = \frac{\sqrt{3}}{3} \sin A - 1$, 即 $\cos A - \frac{\sqrt{3}}{3} \sin A = -1$, 可化为 $2\sqrt{3} \sin(A - \frac{\pi}{3}) = 3$, 即 $\sin(A - \frac{\pi}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 因为 $0 < A < \pi$, 所以 $A - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3}$, 即 $A = \frac{2\pi}{3}$, 设 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 由余弦定理得, $12 = b^2 + c^2 + bc$, 因为 $b^2 + c^2 \geq 2bc$ (当且仅当 $b=c$ 时取“=”), 所以 $12 = b^2 + c^2 + bc \geq 3bc$, 即 $bc \leq 4$, 又因为 $12 = b^2 + c^2 + bc = (b+c)^2 - bc$, 所以 $bc = (b+c)^2 - 12 \leq 4$, 故 $b+c \leq 4$, 则 $a+b+c \leq 4 + 2\sqrt{3}$, 又因为 $b+c > a$, 所以 $a+b+c > 2a = 4\sqrt{3}$, 即 $4\sqrt{3} < a+b+c \leq 4 + 2\sqrt{3}$. 故 $\triangle ABC$ 周长的取值范围为 $(4\sqrt{3}, 4 + 2\sqrt{3}]$.

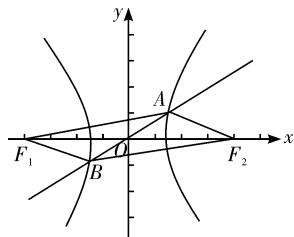
10. C 【解析】根据题意,连接 AF_1, BF_1 得四边形 AF_2BF_1 为平行四边形,几何

关系如右图所示. 设 $|AF_2| = x$, 则 $|BF_1| = x$, $|BF_2| = x + 2a$, $\triangle ABF_2$ 的

面积为 $\sqrt{3}a^2$, $\angle AF_2B = 60^\circ$, 则由三角形面积公式可得 $\sqrt{3}a^2 = \frac{1}{2} \cdot x \cdot (x +$

$2a) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$, 化简得 $x^2 + 2ax - 4a^2 = 0$, 解得 $x_1 = (\sqrt{5} - 1)a$, $x_2 = (-\sqrt{5} - 1)a$

(舍), 所以 $|BF_2| = (\sqrt{5} + 1)a$, 在 $\triangle BF_1F_2$ 中, $|F_1F_2| = 2c$, 由余弦定理可得 $|F_1F_2|^2 = |BF_1|^2 + |BF_2|^2 - 2|BF_1| \cdot |BF_2| \cos 120^\circ$, 即 $(2c)^2 = (\sqrt{5} - 1)^2 a^2 + (\sqrt{5} + 1)^2 a^2 - 2(\sqrt{5} - 1)a \cdot (\sqrt{5} + 1)a \cos 120^\circ$, 化简可得 $c^2 = 4a^2$, 则双曲线的离心率为 2, 所以选 C.



11. B 【解析】令 $G(x) = \frac{f(x)}{e^x}$, 则 $G'(x) = \frac{f'(x) - f(x)}{e^x} = 2x + 1$, 可设 $G(x) = x^2 + x + c$, $\because G(0) = f(0) = -2$,

$\therefore c = -2$, 所以 $G(x) = \frac{f(x)}{e^x} = x^2 + x - 2$, 解不等式 $f(x) < 4e^x$, 即 $\frac{f(x)}{e^x} < 4$, 所以 $x^2 + x - 2 < 4$, 解得 $-3 < x$

< 2 , 所以不等式的解集为 $(-3, 2)$.

12. C 【解析】取 AC 的中点 D , 连接 SD, BD . 因为 $SA = SC, AB = BC$, 所以 $SD \perp AC, BD$

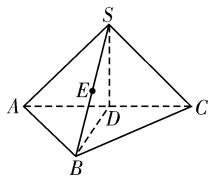
$\perp AC$, 可得 $\angle SDB$ 即为二面角 $S-AC-B$ 的平面角, 故 $\cos \angle SDB = -\frac{\sqrt{3}}{3}$. 在

$\text{Rt} \triangle SDC$ 中, $SD = \sqrt{SC^2 - CD^2} = \sqrt{6}$, 同理可得 $BD = \sqrt{2}$, 由余弦定理得 $\cos \angle SDB =$

$-\frac{\sqrt{3}}{3}$, 解得 $SB = \sqrt{12}$. 在 $\triangle SCB$ 中, $SC^2 + CB^2 = 8 + 4 = (\sqrt{12})^2 = SB^2$, 所以 $\triangle SCB$ 为直角三角形, 同理可

得 $\triangle SAB$ 为直角三角形, 取 SB 中点 E , 则 $SE = EB = \sqrt{3}$, 在 $\text{Rt} \triangle SCB$ 与 $\text{Rt} \triangle SAB$ 中, $EA = \frac{SB}{2} = \sqrt{3}, EC =$

$\frac{SB}{2} = \sqrt{3}$, 所以点 E 为该球的球心, 半径为 $\sqrt{3}$, 所以球的表面积为 $S = 4 \times \pi \times (\sqrt{3})^2 = 12\pi$.



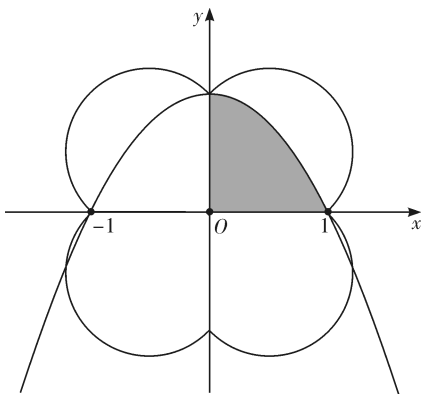
二、填空题: 本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13. 0.68

14. $\frac{2}{6+3\pi}$ 【解析】 $x^2 + y^2 = |x| + |y|$ 所围成的区域如下图所示的四个圆弧围成的图形, 其面积 $S = \sqrt{2} \times \sqrt{2} +$

$$2 \times \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 \times \pi = 2 + \pi, y = 1 - x^2 \text{ 与两坐标轴非负半轴所围成区域的面积 } S_1 = \int_0^1 (1 - x^2) dx =$$

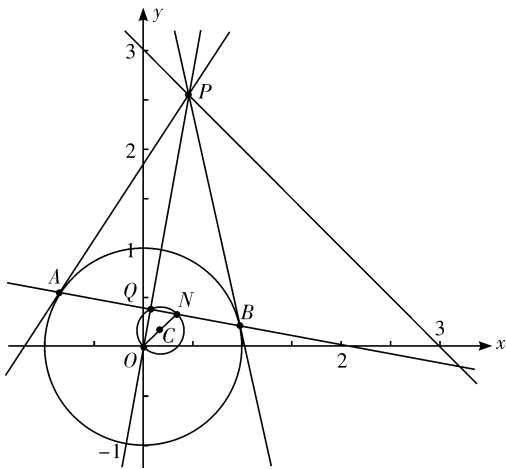
$$\left(x - \frac{1}{3}x^3\right) \Big|_0^1 = \frac{2}{3}, \text{ 所以概率 } P = \frac{S_1}{S} = \frac{\frac{2}{3}}{2 + \pi} = \frac{2}{6 + 3\pi}.$$



15. $\left[\frac{7\sqrt{2}}{6}, \frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$ 【解析】设点 $P(x_0, 3-x_0)$, 则直线 AB 的方程为 $x_0x + (3-x_0)y = 1$ (注: 由圆 $x^2 + y^2 = r^2$ 外一点 $E(x_0, y_0)$ 向该圆引两条切线, 切点分别为 F, G , 则直线 FG 的方程是 $x_0x + y_0y = r^2$), 注意到直线 AB : $x_0x + (3-x_0)y = 1$, 即 $x_0(x-y) + (3y-1) = 0$, 直线 $x-y=0$ 与 $3y-1=0$ 的交点为 $N\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$. 又 $\overrightarrow{OQ} \cdot \overrightarrow{QN} = 0$, 因此点 Q 的轨迹是以 ON 为直径的圆 (除去原点), 其中该圆的圆心 C 坐标是 $\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{6}\right)$, 半径是

$$\frac{1}{2}|ON| = \frac{\sqrt{2}}{6}. \text{ 又线段 } ON \text{ 的中点 } C\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{6}\right) \text{ 到直线 } x+y-3=0 \text{ 的距离等于 } \frac{\left|\frac{1}{6} + \frac{1}{6} - 3\right|}{\sqrt{2}} = \frac{4\sqrt{2}}{3}, \text{ 因此点}$$

$$Q \text{ 到直线 } l \text{ 的距离的取值范围是 } \left[\frac{4\sqrt{2}}{3} - \frac{\sqrt{2}}{6}, \frac{4\sqrt{2}}{3} + \frac{\sqrt{2}}{6}\right) = \left[\frac{7\sqrt{2}}{6}, \frac{3\sqrt{2}}{2}\right).$$



16. $2 + \sqrt{2}$ 【解析】因为 $f(x+2) = 2 + \sqrt{4f(x) - f^2(x)}$, 所以 $f(x+2) - 2 = \sqrt{4f(x) - f^2(x)}$, 即 $(f(x+2) - 2)^2 = 4f(x) - f^2(x)$, 即 $f^2(x+2) - 4f(x+2) = -[f^2(x) - 4f(x)] - 4$, 令 $g(x) = f^2(x) - 4f(x)$, 则 $g(x+2) = -g(x) - 4$, 可得函数 $g(x)$ 的周期为 4,

所以 $g(2021)=g(4\times 505+1)=g(1)$ ，
 又因为 $f(x)$ 是偶函数，则 $g(x)=f^2(x)-4f(x)$ 为偶函数，
 又因为 $g(1)=-g(-1)-4$ ，所以 $g(1)=-2$ ，即 $f^2(2021)-4f(2021)=-2$ ，
 解得 $f(2021)=2\pm\sqrt{2}$ ，
 又 $f(x+2)=2+\sqrt{4f(x)-f^2(x)}\geq 2$ ，
 即 $f(2021)\geq 2$ ，即 $f(2021)=2+\sqrt{2}$ 。

三、解答题：本大题共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17.【解析】(1) 设数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d ，因为 $\frac{S_n}{n}=\frac{na_1+\frac{n(n-1)}{2}d}{n}=a_1+(n-1)\frac{d}{2}$ ，

所以 $\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$ 为一个等差数列，所以 $\frac{S_{2020}}{2020}-\frac{S_{2017}}{2017}=\frac{3d}{2}=3$ ，所以 $d=2$ ，

故 $\frac{S_n}{n}=n$ ，所以 $S_n=n^2$ 。

$n\geq 2$ 时， $a_n=S_n-S_{n-1}=2n-1$ ， $n=1$ 时也满足，故 $a_n=2n-1$ 。 3 分

数列 $\{b_n\}$ 对任意正整数 n 满足 $T_n=2-b_n$ 。

当 $n=1$ 时， $b_1=T_1=2-b_1$ ，解得 $b_1=1$ ；

当 $n>1$ 时， $b_n=T_n-T_{n-1}=(2-b_n)-(2-b_{n-1})=b_{n-1}-b_n$ ，

所以 $b_n=\frac{1}{2}b_{n-1}(n\geq 2)$ 。

所以 $\{b_n\}$ 是以首项 $b_1=1$ ，公比 $q=\frac{1}{2}$ 的等比数列，故数列 $\{b_n\}$ 的通项公式为 $b_n=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ 。 6 分

(2) 由(1)知 $\frac{a_nb_n}{2}=\frac{2n-1}{2^n}$ ，所以 $S_n'=\frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}+\frac{5}{2^3}+\dots+\frac{2n-3}{2^{n-1}}+\frac{2n-1}{2^n}$ ，①

所以 $\frac{1}{2}S_n'=\frac{1}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\dots+\frac{2n-3}{2^n}+\frac{2n-1}{2^{n+1}}$ ，②

①-②，得 $\frac{1}{2}S_n'=\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\frac{2}{2^3}+\dots+\frac{2}{2^n}-\frac{2n-1}{2^{n+1}}=\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\dots+\frac{1}{2^{n-1}}\right)-\frac{2n-1}{2^{n+1}}=\frac{1}{2}+\frac{\frac{1}{2}\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right]}{1-\frac{1}{2}}-\frac{2n-1}{2^{n+1}}=\frac{1}{2}+1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}-\frac{2n-1}{2^{n+1}}$ ，所以 $S_n'=3-\frac{2n+3}{2^n}$ 。 12 分

18.【解析】(1) 连接 EF, EG ，并延长 EG 交 BC 于点 D ，则点 D 为 BC 的中点，

从而点 D, E, F 分别是棱 CB, AB, PB 的中点，

$\therefore DE\parallel AC, EF\parallel AP$ 。

又 $DE, EF\not\subset$ 平面 $PAC, AC, AP\subset$ 平面 PAC ，

$\therefore DE\parallel$ 平面 $PAC, EF\parallel$ 平面 PAC 。

又 $DE, EF\subset$ 平面 $EFG, DE\cap EF=E$ ，

$\therefore$ 平面 $EFG\parallel$ 平面 PAC ，

又 $GF\subset$ 平面 EFG ，

$\therefore GF\parallel$ 平面 PAC 。 5 分

(2)连接 PE , $\because PA=PB, E$ 是 AB 的中点, $\therefore PE \perp AB$,
 $\because$ 平面 $PAB \perp$ 平面 ABC , 平面 $PAB \cap$ 平面 $ABC=AB$,
 $PE \subset$ 平面 $PAB, PE \perp$ 平面 ABC .

连接 CG 并延长交 BE 于点 O , 则 O 为 BE 的中点,

连接 OF , 则 $OF \parallel PE, \therefore OF \perp$ 平面 ABC .

$\therefore \angle FGO$ 为 GF 与平面 ABC 所成的角, 即 $\angle FGO=60^\circ$.

在 $\text{Rt}\triangle FGO$ 中, 设 $GF=2$, 则 $OG=1, OF=\sqrt{3}, \therefore OC=3, PE=2\sqrt{3}$.

$\therefore AB=4\sqrt{3}, CE=2\sqrt{3}, OE=\sqrt{3}$,

$\therefore OE^2+OC^2=CE^2$, 即 $OC \perp AB$,

如图建立空间直角坐标系 $O-xyz$,

则 $A(0, -3\sqrt{3}, 0), C(3, 0, 0), P(0, -\sqrt{3}, 2\sqrt{3})$.

$\therefore \overrightarrow{AC}=(3, 3\sqrt{3}, 0), \overrightarrow{AP}=(0, 2\sqrt{3}, 2\sqrt{3})$,

设平面 PAC 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}_1=(x, y, z)$,

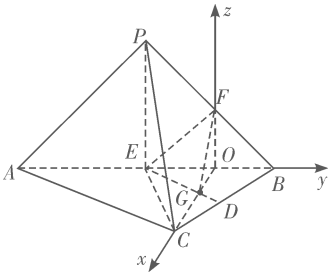
$$\text{则} \begin{cases} \boldsymbol{n}_1 \cdot \overrightarrow{AC}=3x+3\sqrt{3}y=0, \\ \boldsymbol{n}_1 \cdot \overrightarrow{AP}=2\sqrt{3}y+2\sqrt{3}z=0, \end{cases}$$

可取 $\boldsymbol{n}_1=(\sqrt{3}, -1, 1)$,

又平面 PAB 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}_2=(1, 0, 0)$,

$$\text{则 } \cos \langle \boldsymbol{n}_1, \boldsymbol{n}_2 \rangle = \frac{\boldsymbol{n}_1 \cdot \boldsymbol{n}_2}{|\boldsymbol{n}_1| \cdot |\boldsymbol{n}_2|} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{15}}{5},$$

所以二面角 $B-AP-C$ 的余弦值为 $\frac{\sqrt{15}}{5}$ 12 分



19.【解析】(1)由题意可知,绝对贫困户有 $(0.25+0.50+0.75) \times 0.2 \times 100=30$ (户),可得出如下列联表:

	受教育水平良好	受教育水平不好	总计
绝对贫困户	2	28	30
相对贫困户	18	52	70
总计	20	80	100

$$K^2=\frac{100 \times (18 \times 28-2 \times 52)^2}{30 \times 70 \times 20 \times 80} \approx 4.762>3.841.$$

故有 95% 的把握认为绝对贫困户数与受教育水平不好有关. 6 分

(2)贫困指标在 $[0, 0.4)$ 的贫困户共有 $(0.25+0.5) \times 0.2 \times 100=15$ (户),

“亟待帮助户”共有 $0.25 \times 0.2 \times 100=5$ (户),

依题意 X 的可能值为 0, 1, 2,

$$P(X=0)=\frac{C_{10}^2}{C_{15}^2}=\frac{3}{7}, P(X=1)=\frac{C_{10}^1 C_5^1}{C_{15}^2}=\frac{10}{21},$$

$$P(X=2)=\frac{C_5^2}{C_{15}^2}=\frac{2}{21},$$

则 X 的分布列为

X	0	1	2
P	$\frac{3}{7}$	$\frac{10}{21}$	$\frac{2}{21}$

故 $EX = 0 \times \frac{3}{7} + 1 \times \frac{10}{21} + 2 \times \frac{2}{21} = \frac{2}{3}$ 12 分

20. 【解析】(1) 由题意, 椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$.

$$\text{可得} \begin{cases} \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \\ b = \sqrt{2}, \\ a^2 = b^2 + c^2, \end{cases} \quad \text{解得} \begin{cases} a^2 = 8, \\ b^2 = 2, \\ c^2 = 6. \end{cases}$$

所以椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} = 1$ 3 分

因为焦点在 x 轴上,

所以椭圆 C 的焦点为 $F_1(-\sqrt{6}, 0), F_2(\sqrt{6}, 0)$.

所以直径为 F_1F_2 的圆 O 的方程为 $x^2 + y^2 = 6$ 5 分

(2) 由题意知, 直线 l 与圆 O 相切于第一象限内的点 P ,

设直线 l 的斜截式方程为 $y = kx + m (k < 0, m > 0)$.

因为直线 l 与圆 O 相切,

所以点 O 到直线 l 的距离为 $d = \frac{|m|}{\sqrt{1+k^2}} = \sqrt{6}$.

即 $m^2 = 6k^2 + 6$.

因为直线 l 与椭圆 C 相交于 A, B 两点,

由 $\begin{cases} y = kx + m, \\ x^2 + 4y^2 = 8, \end{cases}$ 整理得 $(1 + 4k^2)x^2 + 8kmx + 4m^2 - 8 = 0$,

设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, 则

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{8km}{1 + 4k^2}, \\ x_1 x_2 = \frac{4m^2 - 8}{1 + 4k^2}, \\ \Delta > 0. \end{cases}$$

因为 $\Delta = (8km)^2 - 4 \times (1 + 4k^2)(4m^2 - 8) = 16 \times (8k^2 - m^2 + 2)$.

又 $m^2 = 6k^2 + 6$,

所以 $\Delta = 32(k^2 - 2) > 0$.

所以 $k^2 > 2$.

又因为 $k < 0$,

所以 $k < -\sqrt{2}$.

因为 $|AB| = \sqrt{1+k^2} |x_1 - x_2| = 4\sqrt{2} \sqrt{1+k^2} \frac{\sqrt{k^2-2}}{1+4k^2}$,

所以 $S_{\triangle OAB} = \frac{1}{2} |AB| \cdot d = \frac{1}{2} \times 4\sqrt{2} \times \sqrt{1+k^2} \frac{\sqrt{k^2-2}}{1+4k^2} \times \sqrt{6}$

$$= 4\sqrt{3} \times \sqrt{\frac{(1+k^2)(k^2-2)}{(1+4k^2)^2}}.$$

设 $1+4k^2=t, t>9$, 则

$$S_{\triangle OAB} = 4\sqrt{3} \times \sqrt{\frac{(t-9)(t+3)}{16t^2}} = \sqrt{3} \times \sqrt{-\frac{27}{t^2} - \frac{6}{t} + 1}.$$

令 $u = \frac{1}{t}, 0 < u < \frac{1}{9}$.

则 $S_{\triangle OAB} = \sqrt{3} \times \sqrt{-27u^2 - 6u + 1}.$

设 $h(u) = -27u^2 - 6u + 1 = -27\left(u + \frac{1}{9}\right)^2 + \frac{4}{3}.$

因为 $h(u)$ 在 $\left(0, \frac{1}{9}\right)$ 上单调递减,

所以 $h(u) < 1.$

所以 $S_{\triangle OAB} < \sqrt{3}.$ 12 分

21. 【解析】(1) $f'(x) = 1 - 2\cos x$, 令 $f'(x) = 0$, 得 $\cos x = \frac{1}{2}$,

故在区间 $[0, \pi]$ 上, $f'(x)$ 的唯一零点是 $x = \frac{\pi}{3}$,

当 $x \in \left[0, \frac{\pi}{3}\right)$ 时, $f'(x) < 0, f(x)$ 单调递减,

当 $x \in \left(\frac{\pi}{3}, \pi\right]$ 时, $f'(x) > 0, f(x)$ 单调递增,

故在区间 $[0, \pi]$ 上, $f(x)$ 的极小值为 $f\left(\frac{\pi}{3}\right) = 1 + \frac{\pi}{3} - \sqrt{3}$,

当 $x > \pi$ 时, $f(x) > 1 + \pi - 2 = \pi - 1 > f\left(\frac{\pi}{3}\right)$,

所以, $f(x)$ 的最小值为 $f\left(\frac{\pi}{3}\right) = 1 + \frac{\pi}{3} - \sqrt{3}.$ 5 分

(2) 要证: $x > 0$ 时, $f(x) > e^{-2x}$, 即证 $x > 0$ 时, $g(x) = (1+x-2\sin x)e^{2x} > 1.$

$$g'(x) = 2(1+x-2\sin x)e^{2x} + (1-2\cos x)e^{2x} = (3+2x-4\sin x-2\cos x)e^{2x},$$

令 $h(x) = x - \sin x$, 则 $h'(x) = 1 - \cos x \geq 0$, 即 $h(x)$ 是 $(0, +\infty)$ 上的增函数,

$$\therefore h(x) > h(0) = 0, \text{ 即 } x > \sin x,$$

$$\therefore 3+2x-4\sin x-2\cos x > 3+2\sin x-4\sin x-2\cos x$$

$$= 3-2(\sin x+\cos x) = 3-2\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right) > 0,$$

$$\therefore g'(x) = (3+2x-4\sin x-2\cos x)e^{2x} > 0.$$

即 $g(x)$ 是 $(0, +\infty)$ 上的增函数, $g(x) > g(0) = 1$,

故当 $x > 0$ 时, $f(x) > e^{-2x}.$ 12 分

22.【解析】(1)曲线C的普通方程为 $x^2+y^2=6$,

因为 $\rho\cos\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)=2$,所以 $\rho\cos\theta-\sqrt{3}\rho\sin\theta-4=0$,

直线l的直角坐标方程为 $x-\sqrt{3}y-4=0$ 4分

(2)点P的坐标为(4,0),

设直线m的参数方程为 $\begin{cases} x=4+t\cos\theta, \\ y=t\sin\theta \end{cases}$ (t 为参数, θ 为倾斜角),

联立直线m与曲线C的方程得 $t^2+8t\cos\theta+10=0$.

设A,B对应的参数分别为 t_1,t_2 ,则 $\begin{cases} t_1+t_2=-8\cos\theta, \\ t_1t_2=10, \\ \Delta=64\cos^2\theta-40>0, \end{cases}$

所以 $|PA|+|PB|=|t_1|+|t_2|=|t_1+t_2|=8|\cos\theta|=4\sqrt{3}$,

得 $\cos\theta=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$,且满足 $\Delta>0$,

故直线m的倾斜角为 $\frac{\pi}{6}$ 或 $\frac{5\pi}{6}$ 10分

23.【解析】(1)依题意, $2|x+1|+|x-3|>7$;

当 $x<-1$ 时,原式化为 $-2x-2+3-x>7$,

解得 $x<-2$,故 $x<-2$;

当 $-1\leq x\leq 3$ 时,原式化为 $2x+2+3-x>7$,解得 $x>2$,故 $2<x\leq 3$,

当 $x>3$ 时,原式化为 $2x+2+x-3>7$,解得 $x>\frac{8}{3}$,故 $x>3$.

综上所述,不等式 $f(x)>7$ 的解集为 $(-\infty,-2)\cup(2,+\infty)$ 5分

(2)依题意, $f(x)=\begin{cases} 3x+2-m, & x>m, \\ x+2+m, & -1\leq x\leq m, \\ -3x-2+m, & x<-1, \end{cases}$

$\therefore f(x)$ 在 $[-1,m]$ 和 $(m,+\infty)$ 上是增函数,在 $(-\infty,-1]$ 上是减函数,

$\therefore f(x)$ 的最小值是 $f(-1)=1+m$,

要 $\exists x_0\in\mathbf{R}$,使得 $f(x_0)<2$ 能成立,只要 $f(-1)=1+m<2$,得 $m<1$,

综上所述,实数m的取值范围是 $(-1,1)$ 10分