

2020 届高三三月考试卷

数学(文科)参考答案

一、选择题

题 号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答 案	D	D	C	B	A	C	B	C	C	A	A	A

1. D 【解析】 $\because A = \{y | y = \lg x\} = \{y | y \in \mathbf{R}\}$,

$$B = \{x | y = \sqrt{1-x}\} = \{x | 1-x \geq 0\} = \{x | x \leq 1\},$$

$\therefore A \cap B = \{x | x \leq 1\} = (-\infty, 1]$, 故选: D.

2. D 【解析】 $\frac{1-i}{1+i} = \frac{(1-i)^2}{(1+i)(1-i)} = \frac{-2i}{2} = -i$,

$$\therefore a+bi = -(-i) = i,$$

$\therefore a=0, b=1, \therefore a+b=1$, 故选: D.

3. C 【解析】由图知选 C.

4. B 【解析】由流程图可知该算法的功能为计算 $S=1+2^1+2^2+2^3+2^4$ 的值, 即输出的值为 $S=1+2^1+2^2+2^3+2^4 = \frac{1 \times (1-2^5)}{1-2} = 31$. 故选 B.

5. A 【解析】因为 $a-\lambda b = (1+\lambda, 1-3\lambda)$, 又因为 $(a-\lambda b) \perp c$,

所以 $(1+\lambda, 1-3\lambda) \cdot (2, 1) = 2+2\lambda+1-3\lambda = 0$, 解得 $\lambda=3$, 故选: A.

6. C 【解析】根据题意, 函数 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数, 则 $b = f\left(\log_3 \frac{1}{27}\right) = f(-3) = f(3)$,

又由 $0 < \sqrt{2} < 2^{\frac{3}{2}} = 2\sqrt{2} < 3$, 当 $x \geq 0$ 时, $f(x) = x^3 + 3x$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调递增,

则有 $f\left(\log_3 \frac{1}{27}\right) > f(2^{\frac{3}{2}}) > f(\sqrt{2})$, 即 $b > a > c$, 故选: C.

7. B 【解析】“直线 $l_1: 2x + (m+1)y + 4 = 0$ 与直线 $l_2: mx + 3y - 2 = 0$ 平行” $\Rightarrow$ “ $m=2$ 或 $m=-3$ ”.

“ $m=2$ ” $\Rightarrow$ “直线 $l_1: 2x + (m+1)y + 4 = 0$ 与直线 $l_2: mx + 3y - 2 = 0$ 平行”,

“直线 $l_1: 2x + (m+1)y + 4 = 0$ 与直线 $l_2: mx + 3y - 2 = 0$ 平行”是 “ $m=2$ ” 的必要不充分条件. 故选: B.

8. C 【解析】根据题意: 函数 $f(x) = \frac{x}{1+x^2} \sin x$, 其定义域为 $\mathbf{R}$,

有 $f(-x) = \frac{(-x)}{1+(-x)^2} \sin(-x) = \frac{x}{1+x^2} \sin x = f(x)$, 即函数为偶函数, 排除 A、D;

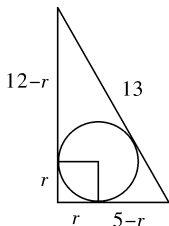
又由当 $0 < x < \pi$ 时, $\sin x > 0, x > 0$, 则 $f(x) = \frac{x}{1+x^2} \sin x > 0$, 排除 B, 故选: C.

9. C 【解析】直角三角形的斜边长为 $\sqrt{5^2 + 12^2} = 13$,

设内切圆的半径为 r , 则 $5-r+12-r=13$, 解得 $r=2$.

内切圆的面积为 $\pi r^2 = 4\pi$,

豆子落在内切圆外部的概率 $P = 1 - \frac{4\pi}{\frac{1}{2} \times 5 \times 12} = 1 - \frac{2\pi}{15}$, 故选: C.



10. A 【解析】由题意, $|MF_1| - |MF_2| = 2a$, 又 $|MF_1| = 2|MF_2|$,

$$\therefore |MF_1| = 4a, |MF_2| = 2a,$$

$$\therefore \cos \angle F_1MF_2 = \frac{16a^2 + 4a^2 - 4c^2}{2 \times 4a \times 2a} = \frac{1}{4},$$

化简得: $c^2 = 4a^2$, 即 $a^2 + b^2 = 4a^2$,

$$\therefore b^2 = 3a^2, \text{ 得 } \frac{b}{a} = \pm\sqrt{3}.$$

$\therefore$ 此双曲线渐近线方程为 $y = \pm\sqrt{3}x$. 故选: A.

11. A 【解析】在各项都为正数的公比设为 q 的等比数列 $\{a_n\}$ 中,

若 $a_1 = 2$, 且 $a_1 a_5 = 64$, 则 $4q^4 = 64$, 解得 $q = 2$, 则 $a_n = 2^n$,

$$\text{可得数列 } \left\{ \frac{a_n}{(a_n - 1)(a_{n+1} - 1)} \right\}, \text{ 即为 } \left\{ \frac{2^n}{(2^n - 1)(2^{n+1} - 1)} \right\},$$

$$\text{可得 } \frac{2^n}{(2^n - 1)(2^{n+1} - 1)} = \frac{1}{2^n - 1} - \frac{1}{2^{n+1} - 1},$$

数列 $\left\{ \frac{a_n}{(a_n - 1)(a_{n+1} - 1)} \right\}$ 的前 n 项和是

$$\frac{1}{2-1} - \frac{1}{2^2-1} + \frac{1}{2^2-1} - \frac{1}{2^3-1} + \cdots + \frac{1}{2^n-1} - \frac{1}{2^{n+1}-1} = 1 - \frac{1}{2^{n+1}-1}, \text{ 故选: A.}$$

12. A 【解析】由题意, 当 $x \leq 2$ 时, $f(x) = xe^x$.

$$f'(x) = (x+1)e^x.$$

①令 $f'(x) = 0$, 解得 $x = -1$; ②令 $f'(x) < 0$, 解得 $x < -1$; ③令 $f'(x) > 0$, 解得 $-1 < x \leq 2$.

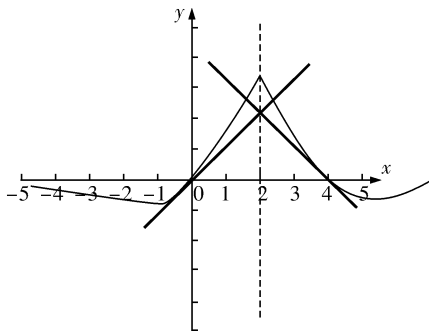
$\therefore f(x)$ 在 $(-\infty, -1)$ 上单调递减, 在 $(-1, 2]$ 上单调递增,

在 $x = -1$ 处取得极小值 $f(-1) = -\frac{1}{e}$. 且 $f(0) = 0$; $x \rightarrow -\infty, f(x) \rightarrow 0$.

又 $\because$ 函数 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上满足 $f(2-x) = f(2+x)$,

$\therefore$ 函数 $f(x)$ 的图象关于 $x = 2$ 对称.

函数 $y = f(x)$ 的大致图象如下:



而一次函数 $y = k(x-2) + 2$ 很明显是恒过定点 $(2, 2)$.

结合图象, 当 $k = 0$ 时, 有两个交点, 不符合题意,

当 $k = 1$ 时, 有两个交点, 其中一个 $(0, 0)$. 此时 $y = f(x)$ 与 $y = k(x-2) + 2$ 正好相切.

$\therefore$ 当 $0 < k < 1$ 时, 有三个交点.

同理可得当 $-1 < k < 0$ 时, 也有三个交点.

实数 k 的取值范围为: $(-1, 0) \cup (0, 1)$.

故选: A.

二、填空题

13. $\frac{27}{5}$ 【解析】依题意, $\frac{S_9}{S_5} = \frac{\frac{a_1+a_9}{2} \times 9}{\frac{a_1+a_5}{2} \times 5} = \frac{9a_5}{5a_3}$,

又 $\frac{a_5}{a_3} = 3$,

$\therefore \frac{S_9}{S_5} = \frac{9}{5} \times 3 = \frac{27}{5}$.

14. $x-y-1=0$ 【解析】由 $f(x)=x\ln x$, 得 $f'(x)=\ln x+x \times \frac{1}{x}=\ln x+1$,

$\therefore f'(1)=\ln 1+1=1$,

即曲线 $f(x)=x\ln x$ 在点 $(1,0)$ 处的切线的斜率为 1,

则曲线 $f(x)=x\ln x$ 在点 $(1,0)$ 处的切线方程为 $y-0=1 \times (x-1)$,

整理得: $x-y-1=0$. 故答案为: $x-y-1=0$.

15. 7 【解析】 $\because f(x)$ 的图象与 y 轴交点的纵坐标为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\therefore f(0)=\sin \varphi=\frac{\sqrt{3}}{2}$,

$\therefore 0<\varphi<\frac{\pi}{2}$,

$\therefore \varphi=\frac{\pi}{3}$, 则 $f(x)=\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{3}\right)$,

$\because y$ 轴右侧第一个最低点的横坐标为 $\frac{\pi}{6}$, $\therefore$ 由五点对应法得 $\frac{\pi}{6}\omega+\frac{\pi}{3}=\frac{3\pi}{2}$ 得 $\omega=7$,

故答案为: 7.

16. $\sqrt{6}\pi$ 【解析】根据题意, 得三棱锥 $P-ABC$ 中, $AP=2, BP=CP=1$,

$\because PA, PB, PC$ 两两互相垂直,

三棱锥 $P-ABC$ 的外接球的直径 $2R=\sqrt{AP^2+BP^2+CP^2}=\sqrt{6}$,

可得三棱锥 $P-ABC$ 的外接球的半径为 $R=\frac{\sqrt{6}}{2}$,

根据球的体积公式, 得三棱锥 $P-ABC$ 的外接球的体积为 $\frac{4}{3}\pi R^3=\frac{4}{3}\pi \times \left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^3=\sqrt{6}\pi$,

故答案为 $\sqrt{6}\pi$.

三、解答题

17. 【解析】(1)(i) 经计算, 可得下表: (计算结果精确到 0.1);

印刷册数 x (千册)		2	3	4	5	8
单册成本 y (元)		3.2	2.4	2	1.9	1.7
模型甲	估计值 $\hat{y}_i^{(1)}$	3.1	2.4	2.1	1.9	1.6
	残差 $\hat{e}_i^{(1)}$	0.1	0	-0.1	0	0.1
模型乙	估计值 $\hat{y}_i^{(2)}$	3.2	2.3	2	1.9	1.7
	残差 $\hat{e}_i^{(2)}$	0	0.1	0	0	0

(ii) 计算模型甲的残差平方和为 $Q_1 = 0.1^2 + (-0.1)^2 + 0.1^2 = 0.03$,

模型乙的残差平方和为 $Q_2 = 0.1^2 = 0.01$, 6 分

$\therefore Q_1 > Q_2$, 模型乙的拟合效果更好; 7 分

(2) 若二次印刷 10 千册, 由(1)可知, 单册书印刷成本为 $\frac{6.4}{10^2} + 1.6 = 1.664$ (元),

故二次印刷 10 千册时, 印刷厂利润为 $Y = (5 - 1.664) \times 10 \times 1000 = 33360$ (元). 12 分

18. 【解析】(1) $\because 2\cos A(b\cos C + c\cos B) = \sqrt{3}a$,

由正弦定理可得, $2\cos A(\sin B\cos C + \sin C\cos B) = \sqrt{3}\sin A$.

$\therefore 2\cos A\sin(B+C) = \sqrt{3}\sin A$, 即 $2\cos A\sin A = \sqrt{3}\sin A$,

$\because \sin A \neq 0, \therefore \cos A = \frac{\sqrt{3}}{2}$,

$\because A$ 为三角形的内角,

$\therefore A = \frac{\pi}{6}$; 6 分

(2) $\because a = 1, A = \frac{\pi}{6}$, 又 $\because \triangle ABC$ 的周长为 $\sqrt{5} + 1, \therefore b + c = \sqrt{5}$,

由余弦定理可得, $\cos \frac{\pi}{6} = \frac{b^2 + c^2 - 1}{2bc}, \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{(b+c)^2 - 2bc - 1}{2bc} = \frac{4 - 2bc}{2bc}$,

$\therefore bc = \frac{4}{2 + \sqrt{3}} = 4(2 - \sqrt{3})$,

$\therefore \triangle ABC$ 的面积 $S = \frac{1}{2}bc\sin A = \frac{1}{2} \times 4(2 - \sqrt{3}) \times \frac{1}{2} = 2 - \sqrt{3}$ 12 分

19. 【解析】(1) 证明 $\because AD \perp$ 平面 $A_1BC, BC \subset$ 平面 A_1BC ,

$\therefore AD \perp BC$.

$\because AA_1 \perp$ 平面 $ABC, BC \subset$ 平面 ABC ,

$\therefore AA_1 \perp BC$.

又 $\because AA_1 \cap AD = A, AA_1 \subset$ 平面 $AA_1B, AD \subset$ 平面 AA_1B ,

$\therefore BC \perp$ 平面 $AA_1B, \because A_1B \subset$ 平面 AA_1B ,

$\therefore BC \perp A_1B$ 6 分

(2) 设 $PC = x$, 过点 B 作 $BE \perp AC$ 于点 E .

由(1)知 $BC \perp$ 平面 $AA_1B_1B, \therefore BC \perp AB$,

$\because AB = BC = 2, \therefore AC = 2\sqrt{2}, BE = \sqrt{2}. \therefore S_{\triangle PBC} = \frac{1}{2}BE \times CP = \frac{\sqrt{2}}{2}x$,

$\because AD \perp$ 平面 A_1BC , 其垂足 D 落在直线 A_1B 上,

$\therefore AD \perp A_1B. \therefore BD = \sqrt{AB^2 - AD^2} = 1$, 又 $\because AA_1 \perp AB$,

$\therefore \text{Rt}\triangle ABD \sim \text{Rt}\triangle A_1BA, \therefore \frac{BD}{AB} = \frac{AD}{AA_1}$,

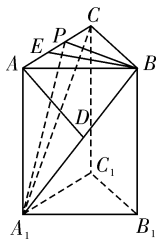
$\therefore AA_1 = 2\sqrt{3}$.

$\therefore V_{A_1-PBC} = \frac{1}{3}S_{\triangle PBC} \times AA_1 = \frac{\sqrt{6}}{3}x = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

解得: $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$,

$\therefore AP = \frac{3\sqrt{2}}{2}$.

$\therefore \frac{AP}{PC} = 3$ 12 分



20.【解析】(1)由题意可设椭圆的标准方程为 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$,

$$\because \text{椭圆的离心率 } e = \frac{\sqrt{3}}{2}, \therefore \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\because a^2 = b^2 + c^2, \therefore a = 2b,$$

$$\text{将点 } \left(1, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \text{ 代入椭圆的方程得: } \frac{1}{a^2} + \frac{3}{4b^2} = 1,$$

$$\text{联立 } a = 2b \text{ 解得: } \begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \end{cases}, \therefore \text{椭圆 } E \text{ 的方程为: } \frac{x^2}{4} + y^2 = 1,$$

$$\therefore F(\sqrt{3}, 0),$$

$$\because PF \perp x \text{ 轴}, \therefore P\left(\sqrt{3}, \pm \frac{1}{2}\right),$$

$$\therefore \text{圆 } F \text{ 的方程为: } (x - \sqrt{3})^2 + y^2 = \frac{1}{4}; \quad \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

$$(2) \text{ 由 } A, B \text{ 在圆上得 } |AF| = |BF| = |PF| = r = \frac{1}{2}, \text{ 设 } C(x_1, y_1), D(x_2,$$

$$y_2),$$

$$|CF| = \sqrt{(x_1 - \sqrt{3})^2 + y_1^2} = 2 - \frac{\sqrt{3}}{2}x_1, \text{ 同理: } |DF| = 2 - \frac{\sqrt{3}}{2}x_2,$$

$$\text{若 } |AC| = |BD|, \text{ 则 } |AC| + |BC| = |BD| + |BC|, \text{ 即 } |AB| = |CD| = 1,$$

$$4 - \frac{\sqrt{3}}{2}(x_1 + x_2) = 1,$$

$$\text{由 } \begin{cases} \frac{x^2}{4} + y^2 = 1 \\ y = k(x - \sqrt{3}) \end{cases} \text{ 得, } (4k^2 + 1)x^2 - 8\sqrt{3}k^2x + 12k^2 - 4 = 0,$$

$$\therefore x_1 + x_2 = \frac{8\sqrt{3}k^2}{4k^2 + 1},$$

$$\therefore 4 - \frac{12k^2}{4k^2 + 1} = 1,$$

$$\text{得 } 12k^2 = 12k^2 + 3, \text{ 无解, 故不存在. } \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

21.【解析】(1)当 $a = \frac{1}{2}$ 时, $f'(x) = \frac{1}{2} \left(\ln x + \frac{1}{x} - 1 \right)$, $f''(x) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} \right) = \frac{1}{2} \times \frac{x-1}{x^2}$,

$$\text{当 } x \in (0, 1) \text{ 时, } f''(x) < 0, f'(x) \text{ 的单调递减区间为 } (0, 1);$$

$$\text{当 } x \in (1, +\infty) \text{ 时, } f''(x) > 0, f'(x) \text{ 的单调递增区间为 } (1, +\infty). \quad \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$$

$$(2) f'(x) = a \ln x - \frac{(a-1)}{x} + (a-1) = (a-1) \frac{x-1}{x} + a \ln x,$$

$$(i) \text{ 当 } a \geq 1 \text{ 时, } f'(x) > 0,$$

$$\text{所以 } f(x) \text{ 在 } (1, +\infty) \text{ 上单调递增, } f(x) > f(1) = 0, \text{ 满足条件; } \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

$$(ii) \text{ 当 } 0 < a < 1 \text{ 时, } f''(x) = \frac{a}{x} + \frac{(a-1)}{x^2} = \frac{ax - (1-a)}{x^2},$$

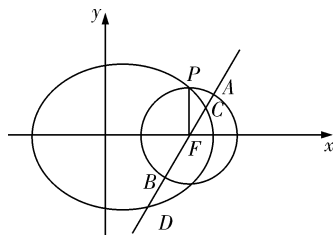
$$\text{由 } f''(x) = 0, \text{ 得 } x = \frac{1-a}{a},$$

$$\text{① 当 } \frac{1}{2} \leq a < 1 \text{ 时, } \frac{1-a}{a} \leq 1, \text{ 所以 } x > \frac{1-a}{a} \text{ 时,}$$

$$f''(x) > 0, f'(x) \text{ 在 } (1, +\infty) \text{ 上单调递增,}$$

$$\text{又由 } f'(1) = 0, \text{ 所以 } f'(x) > 0, \text{ 即 } f(x) \text{ 在 } (1, +\infty) \text{ 上单调递增,}$$

$$\text{所以有 } f(x) > f(1) = 0, \text{ 满足条件; } \dots\dots\dots 9 \text{ 分}$$



②当 $0 < a < \frac{1}{2}$ 时, $\frac{1-a}{a} > 1$, 当 $x \in (1, \frac{1-a}{a})$ 时,

$f''(x) < 0$, $f'(x)$ 在 $(1, \frac{1-a}{a})$ 上单调递减,

又由 $f'(1) = 0$, 所以 $f'(x) < 0$,

所以 $f(x)$ 在 $(1, \frac{1-a}{a})$ 上单调递减,

所以有 $f(x) < f(1) = 0$, 故此时不满足,

故 a 的取值范围为 $a \geq \frac{1}{2}$; 12 分

22.【解析】(1) 曲线 C 的参数方程 $\begin{cases} x = \sqrt{2} \cos \alpha, \\ y = \sqrt{2} \sin \alpha \end{cases}$ (其中 α 为参数).

转换为直角坐标方程为: $x^2 + y^2 = 2$,

曲线 l 的极坐标方程为 $\sin \theta - k \cos \theta = 0 (k \in \mathbf{R})$.

转换为直角坐标方程为: $y = kx$ 5 分

(2) 曲线 l 与曲线 C 交于 $P(x_1, y_1), Q(x_2, y_2)$ 两点,

则: $\begin{cases} x^2 + y^2 = 2, \\ y = kx, \end{cases}$

整理得: $x^2 = \frac{2}{1+k^2}$,

所以: $x_1 x_2 = -\frac{2}{1+k^2}, x_1 + x_2 = 0$,

则: $y_1 y_2 = -\frac{2k^2}{1+k^2}, y_1 + y_2 = 0$,

所以: $\overrightarrow{MP} \cdot \overrightarrow{MQ} = (x_1 - 1)(x_2 - 1) + (y_1 - 2)(y_2 - 2) = -\frac{2}{1+k^2} + 1 - \frac{2k^2}{1+k^2} + 4 = 3$ 10 分

23.【解析】(1) $\because f(x) = |x-3| + |3x-3|$,

$\therefore f(x) > 10$ 等价于 $\begin{cases} x > 3 \\ 4x-6 > 10 \end{cases}$, 或 $\begin{cases} 1 \leq x \leq 3 \\ 2x > 10 \end{cases}$, 或 $\begin{cases} x < 1 \\ 6-4x > 10 \end{cases}$,

解得 $x > 4$ 或 $x < -1$,

$\therefore$ 不等式的解集为: $\{x | x > 4 \text{ 或 } x < -1\}$; 5 分

(2) 对任意 $x_1 \in \mathbf{R}$, 都存在 $x_2 \in \mathbf{R}$, 使得 $f(x_1) = g(x_2)$ 成立,

即 $g(x)$ 的值域包含 $f(x)$ 的值域.

$$f(x) = |x-3| + |3x-3| = \begin{cases} 4x-6, & x > 3 \\ 2x, & 1 \leq x \leq 3 \\ 6-4x, & x < 1 \end{cases}$$

由 $f(x)$ 图象可得 $x=1$ 时, $f(x)_{\min} = 2$,

$\therefore f(x)$ 的值域为 $[2, +\infty)$.

$g(x) = |4x-a| + |4x+2| \geq |(4x-a) - (4x+2)| = |a+2|$,

当且仅当 $4x-a$ 与 $4x+2$ 异号时取等,

$\therefore g(x)$ 的值域为 $[|a+2|, +\infty)$,

则由 $[2, +\infty) \subseteq [|a+2|, +\infty)$,

得 $|a+2| \leq 2, \therefore -4 \leq a \leq 0$,

$\therefore$ 实数 a 的取值范围为: $[-4, 0]$ 10 分