

高三年级数学考试 (文科)

时间 120 分钟 满分: 150 分

第 I 卷 (选择题 共 60 分)

一、选择题 (每小题 5 分, 共 60 分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的)

1. 已知复数 $z = \frac{2i}{1+i}$ (i 为虚数单位), 则 $z \cdot \bar{z} =$ () A. $\sqrt{2}$ B. 2 C. 1 D. $\frac{1}{2}$

2. 已知集合 $A = \{x \in \mathbb{Z} | y = \sqrt{4x - x^2 - 3}\}$, $B = \{a, 1\}$, 若 $A \cap B = B$, 则实数 a 的值为()

A. 2 B. 3 C. 1 或 2 或 3 D. 2 或 3

3. 设 $a, b \in (1, +\infty)$, 则“ $a > b$ ”是“ $\log_a b < 1$ ”的()

A. 充分且不必要条件 B. 必要且不充分条件
C. 充分且必要条件 D. 既不充分也不必要条件

4. 已知 $a > b > 0, c > 1$, 则下列各式成立的是()

A. $\sin a > \sin b$ B. $c^a > c^b$ C. $a^c < b^c$ D. $\frac{c-1}{b} < \frac{c-1}{a}$

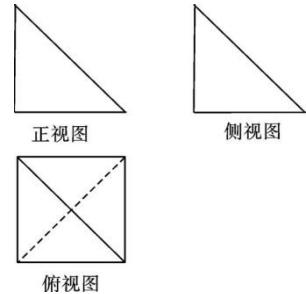
5. 若 $\cos(\frac{\pi}{4} - \alpha) = \frac{3}{5}$, 则 $\sin 2\alpha =$ ()

A. $\frac{7}{25}$ B. $\frac{1}{5}$ C. $-\frac{1}{5}$ D. $-\frac{7}{25}$

6. 某几何体的三视图如图所示, 正视图和侧视图是腰长为 2 的等腰直角三角形,

则该几何体的外接球的体积等于 ()

A. $4\sqrt{3}\pi$ B. $\frac{32}{3}\pi$ C. 4π D. $\frac{8\sqrt{2}}{3}\pi$



7. 数列 $\{a_n\}$ 是等差数列, $a_1 = 1$, 公差 $d \in [1, 2]$, 且 $a_4 + \lambda a_{10} + a_{16} = 15$,

则实数 λ 的最大值为()

A. $\frac{7}{2}$ B. $\frac{53}{19}$ C. $-\frac{23}{19}$ D. $-\frac{1}{2}$

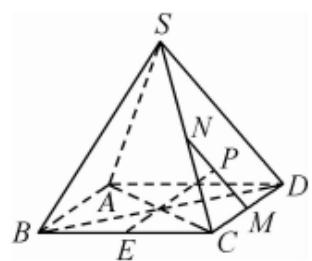
8. 已知 x, y 满足条件 $\begin{cases} y \geq 0 \\ y \leq x \\ 2x + y + k \leq 0 \end{cases}$ (k 为常数), 若目标函数 $z = x + 3y$ 的最大值为 8, 则 $k =$ ()

A. -16 B. -6 C. $-\frac{8}{3}$ D. 6

9. 如图, 在正四棱锥 $S-ABCD$ 中, E, M, N 分别是 BC, CD, SC 的中点, 动点 P 在线段 MN 上运动时, 下列四个结论: ① $EP \perp AC$; ② $EP \parallel BD$;

③ $EP \parallel$ 面 SBD ; ④ $EP \perp$ 面 SAC , 其中恒成立的为 ()

A. ①③ B. ③④ C. ①② D. ②③④



10. 正三角形 ABC 边长等于 $\sqrt{3}$, 点 P 在其外接圆上运动, 则 $\vec{AP} \cdot \vec{PB}$ 的取值范围是()

- A. $[-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}]$ B. $[-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}]$ C. $[-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$ D. $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$

11. 已知点 F 是抛物线 $C: x^2 = 2py$ ($p > 0$) 的焦点, 若点 $M(1, y_0)$ 在抛物线 C 上, 且 $|MF| = \frac{5y_0}{4}$,

斜率为 k 的直线 l 经过点 $Q(-1, 3)$, 且与抛物线 C 交于 A, B (异于 M) 两点, 则直线 AM 与直线 BM 的斜率之积为()

- A. 2 B. -2 C. $\frac{1}{2}$ D. $-\frac{1}{2}$

12. 若 $0 < x_1 < x_2 < 1$, 则()

- A. $e^{x_2} - e^{x_1} > \ln x_2 - \ln x_1$ B. $e^{x_1} - e^{x_2} > \ln x_2 - \ln x_1$
C. $x_2 e^{x_1} > x_1 e^{x_2}$ D. $x_2 e^{x_1} < x_1 e^{x_2}$

二、填空题 (本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分)

13. 某工厂生产 A、B、C 三种不同型号的产品, 产品数量之比依次为 3: 2: 5. 现用分层抽样方法抽出一个容量为 n 的样本, 样本中 A 种型号产品有 18 件. 那么此样本的容量 $n = \underline{\hspace{2cm}}$.

14. 某公司 105 位员工的月工资(单位: 元) 为 x_1, x_2, \dots, x_{105} , 其均值和方差分别为 3800 和 500, 若从下月起每位员工的月工资增加 100 元, 则这 105 位员工下月工资的均值和方差分别为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

15. 设偶函数 $f(x)$ 满足 $f(x) = 2^x - 4$ ($x \geq 0$), 则满足 $f(a-2) > 0$ 的实数 a 的取值范围为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

16. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 对任意 $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = (-1)^n a_n + \frac{1}{2^n} + 2n - 6$, 且 $(a_{n+1} - p)(a_n - p) < 0$ 恒成立, 则实数 p 的取值范围是 $\underline{\hspace{2cm}}$.

三、解答题 (本大题共 6 小题, 共 70 分, 解答适应写出文字说明, 证明过程或演算步骤).

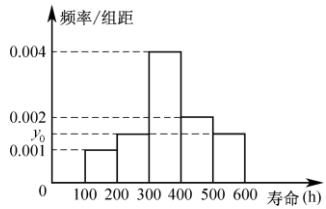
17. (本题 12 分) 已知锐角 $\triangle ABC$ 面积为 S , $\angle A, \angle B, \angle C$ 所对边分别是 a, b, c , $\angle A, \angle C$ 平分线相交于点 O , $b = 2\sqrt{3}$ 且 $S = \frac{\sqrt{3}}{4}(a^2 + c^2 - b^2)$.

求: (1) $\angle B$ 的大小; (2) $\triangle AOC$ 周长的最大值.

18 (本题 12 分) 对某电子元件进行寿命追踪调查, 所得样本数据的频率分布直方图如下.

(1) 求 y_0 , 并根据图中的数据, 用分层抽样的方法抽取 20 个元件, 元件寿命落在 $100 \sim 300$ 之间的应抽取几个?

(2) 从 (1) 中抽出的寿命落在 $100 \sim 300$ 之间的元件中任取 2 个元件, 求事件 “恰好有一个元件寿命落在 $100 \sim 200$ 之间, 一个元件寿命落在 $200 \sim 300$ 之间” 的概率.



19. (本题 12 分) 如图 1, 正方形 $ABCD$ 的边长为 $2\sqrt{2}$, E 、 F 分别是 DC 和 BC 的中点, H 是正方形的对角线 AC 与 EF 的交点, N 是正方形两对角线的交点, 现沿 EF 将 $\triangle CEF$ 折起到 $\triangle PEF$ 的位置, 使得 $PH \perp AH$, 连接 PA , PB , PD (如图 2).

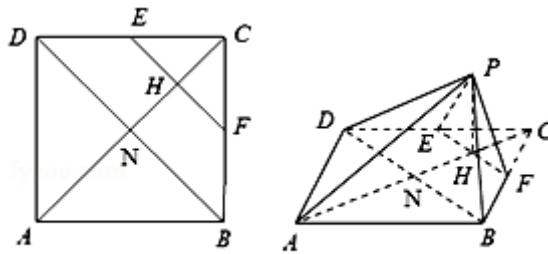


图1

图2

(I) 求证: $BD \perp AP$; (II) 求三棱锥 $A-BDP$ 的高.

20. (本题 12 分) 已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 $\frac{1}{2}$, 点 $\left(1, \frac{3}{2}\right)$ 在椭圆上.

(1) 求椭圆的方程;

(2) 过椭圆的右焦点 F 作互相垂直的两条直线 l_1 , l_2 , 其中直线 l_1 交椭圆于 P , Q 两点,

直线 l_2 交直线 $x=4$ 于 M 点, 求证: 直线 OM 平分线段 PQ .

21. (12 分) 已知函数 $f(x) = \frac{kx-1}{ke^{kx}}$ ($k \in \mathbb{R}$, $k \neq 0$).

(1) 讨论函数 $f(x)$ 的单调性; (2) 当 $x \geq 1$ 时, $f\left(\frac{x}{k}\right) \leq \ln x$, 求 k 的取值范围.

请考生在第 22 ~ 23 两题中任选一题做答, 如果多做, 则按所做的第一题记分.

22. (本小题满分 10 分) 选修 4-4: 坐标系与参数方程

已知曲线 C 的参数方程为 $\begin{cases} x = 2t \\ y = t^2 \end{cases}$ (t 为参数), 以原点 O 为极点, x 轴的非负半轴为极轴

建立极坐标系, 过极点的两射线 l_1 、 l_2 相互垂直, 与曲线 C 分别相交于 A 、 B 两点 (不同于点 O), 且 l_1 的倾斜角为锐角 α .

(1) 求曲线 C 和射线 l_2 的极坐标方程; (2) 求 $\triangle OAB$ 的面积的最小值, 并求此时 α 的值.

23. (本小题满分 10 分) 选修 4-5: 不等式选讲

已知函数 $f(x) = |2x+2| - 5$. (1) 解不等式: $f(x) \geq |x-1|$;

(2) 当 $m \geq -1$ 时, 函数 $g(x) = f(x) + |x-m|$ 的图象与 x 轴围成一个三角形, 求实数 m 的取值范围.