高三年级数学热身考试（理科）答案

一、选择题

1～5 $C\ D\ A\ B\ B$；6～10. $A\ B\ A\ A\ C$； 11～12 $B\ B$

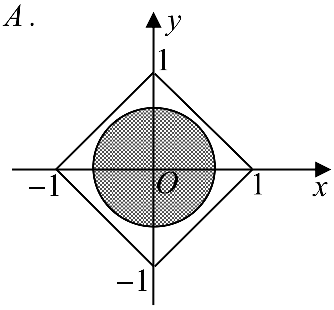
1. C 【解析】$\because M=[-1,+\infty)$，$N=[-\sqrt{3},\sqrt{3}]$，$\therefore M\cap N=[-1,\sqrt{3}]$，故选 C.

2. D【解析】设 $z=ai(a\in R,a\neq 0)$，$\therefore \dfrac{z+2}{1-i}=\dfrac{2+ai}{1-i}=\dfrac{(2+ai)(1+i)}{(1-i)(1+i)}=\dfrac{2-a}{2}+\dfrac{a+2}{2}i$. $\because \dfrac{z+2}{1-i}$ 是实数，$\therefore a+2=0$，即 $a=-2$，$\therefore z=-2i$，故选 D.

3. A 【解析】易知 $|x|\le 2\Leftrightarrow -2\le x\le 2$， $|x+1|\le 3\Leftrightarrow -4\le x\le 2$，$|x+1|\le 2\Leftrightarrow -3\le x\le 1$，

$\log_2(x+1)\le 1\Leftrightarrow -1<x\le 1$，$\dfrac{1}{|x|}\ge\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow\dfrac{|x|-2}{2|x|}\le 0\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq 0\\|x|-2\le 0\end{cases}\Leftrightarrow -2\le x<0$ 或 $0<x\le 2$。

所以使不等式 $|x|\le 2$ 成立的一个必要不充分条件是 $-4\le x\le 2$，故选 A.



4. B 【解析】不等式组 $\begin{cases}-1\le x+y\le 1\\-1\le x-y\le 1\end{cases}$ 与 $x^2+y^2\le\dfrac{1}{2}$ 确定的平面区域分别是正方形和圆如图所示，它们的面积分别为 2 和 $\dfrac{\pi}{2}$，所以输出数对 (x,y) 的概率为 $p=\dfrac{\pi}{4}$，故选 B.

5. B 【解析】该几何体可能是四棱柱、水平放置的三棱柱或水平放置的圆柱，体积最小的几何体为三棱柱，高为 3、底面为腰长为 1 的等腰直角三角形，其表面积为 $2\times\dfrac{1}{2}\times 1^2+(1+1+\sqrt{2})\times 3=7+3\sqrt{2}$，故选 B.

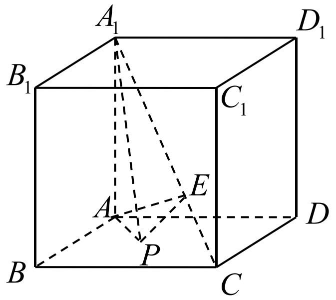
6. A 【解析】$\because \alpha$ 是第三象限的角，$\cos\alpha=-\dfrac{4}{5}$，$\therefore \sin\alpha=-\dfrac{3}{5}$，则 $\sin(\alpha+\dfrac{\pi}{4})=-\dfrac{7\sqrt{2}}{10}$

7. B 【解析】极差 $=98-56=42$，中位数 $=\dfrac{76+76}{2}=76$，所以极差与中位数之和为 118，故选 B.

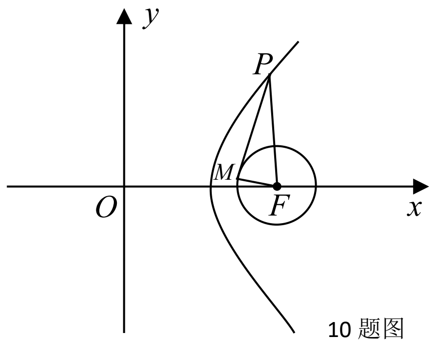
8. A 【解析】由题意知 $\dfrac{T}{2}=\dfrac{\pi}{6}-(-\dfrac{\pi}{3})=\dfrac{\pi}{2}$，即 $T=\pi$，$\therefore \omega=\dfrac{2\pi}{T}=2$，即 $f(x)=2\cos(2x+\varphi)$

因为 $x=\dfrac{\pi}{6}$ 时，$f(x)$ 取得最大值，所以 $f(\dfrac{\pi}{6})=2\cos(\dfrac{\pi}{3}+\varphi)=2$，即 $\cos(\dfrac{\pi}{3}+\varphi)=1$，$\because |\varphi|<\dfrac{\pi}{2}$，$\therefore \varphi=-\dfrac{\pi}{3}$，即 $f(x)=2\cos(2x-\dfrac{\pi}{3})$，$\therefore f(0)=1$，故选 A.

9. A 【解析】连结 A_1P，可证 $\Delta A_1AP\cong\Delta A_1EP$，即 $A_1A=A_1E$，即点 E 是体对角线 A_1C 上的定点，直线 AE 也是定直线. $\because PA=PE$，$\therefore$ 动点 P 必定在线段 AE 的中垂面 α 上，则中垂面 α 与底面 $ABCD$ 的交线就是动点 P 的轨迹，所以动点 P 的轨迹是线段.



9 题图



10 题图

10. C 【解析】$F(5,0)$，点 M 的轨迹是以 F 为圆心、1 为半径的圆。$\because \overrightarrow{MF}\cdot\overrightarrow{MP}=0$，$MP$ 与圆 F 相切. 由 $|MF|=1$ 得 $|MP|=\sqrt{|PF|^2-1}$，即当 $|PF|$ 最小时，$|MP|$ 也最小.当点 P 为双曲线的右顶点时，$|PF|$ 最小，此时 $|PF|=2$，$|PM|=\sqrt{3}$，故选 C.

11. B 【解析】因为直线 $y=kx+k$ 过定点 $(-1,0)$，画出函数 $f(x)$ 在 $(-1,3)$ 的图像，要使方程 $f\left(x\right)=kx+k\left(k\in R\right)$ 有 4 个根，即直线 $y=kx+k$ 和函数 $f(x)$ 在 $(-1,3)$ 的图像有 4 个交点。显然 $0<k\le\frac{1}{4}$ 时满足条件，假若当直线 $y=kx+k$ 和函数 $f(x)$ 的图像在区间 $(2,3)$ 上相切时也满足条件，但是这是不可能的。因为联立 $\begin{cases} y=\sqrt{x-2} \\ y=kx+k \end{cases}$，得 $ky^2-y+3k=0$，得 $k=\frac{\sqrt{3}}{6}$ 或 $k=-\frac{\sqrt{3}}{6}$（舍去），当 $k=\frac{\sqrt{3}}{6}$ 时，解得 $x=5\notin(2,3)$。所以 $0<k\le\frac{1}{4}$。

12. B【解析】当 $n=1$ 时，$2a_1=a_1+\frac{1}{a_1}$，$\because a_1>0$，$\therefore a_1=1$。

当 $n\ge 2$ 时，由 $2S_n=a_n+\frac{1}{a_n}$，及 $a_n=S_n-S_{n-1}$ 得，$S_n^2-S_{n-1}^2=1$，则 $S_n=\sqrt{n}$。

$\therefore f(n)=\frac{1}{S_1}+\frac{1}{S_2}+\frac{1}{S_3}+\cdots+\frac{1}{S_n}=1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}$。

又当 $n\ge 2$ 时，$\frac{1}{\sqrt{n}}=\frac{2}{2\sqrt{n}}<\frac{2}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}=2(\sqrt{n}-\sqrt{n-1})$

$\therefore f(100)<1+2(\sqrt{2}-1)+2(\sqrt{3}-\sqrt{2})+\cdots+2(\sqrt{100}-\sqrt{99})=1+2(\sqrt{100}-1)=19$

对于 $n\in N^*$，$\frac{1}{\sqrt{n}}=\frac{2}{2\sqrt{n}}>\frac{2}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}=2(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$

$\therefore f(100)>2[(\sqrt{2}-1)+(\sqrt{3}-\sqrt{2})+\cdots+(\sqrt{101}-\sqrt{100})]=2(\sqrt{101}-1)>18$ $\quad\therefore[f(100)]=18$。

二、填空题：

13. -160【解析】易求$\int_{-1}^{1}3x^2dx=2$，$\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2})dx=\pi\times1^2\times\frac{1}{2}=\frac{\pi}{2}$

$a=\int_{-1}^{1}(\frac{1}{3}x^2+\sqrt{1-x^2})dx=2\times1+\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2})dx=2+\frac{\pi}{2}\therefore\left[(a-\frac{\pi}{2})x-\frac{1}{x}\right]^6=(2x-\frac{1}{x})^6$

$\therefore T_{r+1}=C_6^r(2x)^{6-r}(-\frac{1}{x})^r=C_6^r2^{6-r}(-1)^rx^{6-2r}$

$\therefore$令$6-2r=0\therefore r=3\therefore$常数项为$C_6^32^{6-3}(-1)^3=-160$

14. 6【解析】因为$f(x)$在定义域$(0,+\infty)$上是单调函数，故可设$f(x)-\frac{1}{x}=t$，即$f(x)=\frac{1}{x}+t$。由$f[f(x)-\frac{1}{x}]=2$，得$f(t)=\frac{1}{t}+t=2$，所以$t=1$，由此可知$f(x)=\frac{1}{x}+1$，所以$f(\frac{1}{5})=6$。

15. $\frac{3\sqrt{2}}{4}$【解析】设$A(x_0,\frac{x_0^2}{8})$，则$B(\frac{x_0}{2},\frac{\frac{x_0^2}{8}-2}{2})$，代入$x^2=8y$，得$(\frac{x_0}{2})^2=8\times\frac{\frac{x_0^2}{8}-2}{2}$，$\therefore x_0=4\sqrt{2}$，

$\therefore A(4\sqrt{2},4)$，$\therefore k_{AB}=k_{PA}=\frac{4+2}{4\sqrt{2}-0}=\frac{3}{2\sqrt{2}}=\frac{3}{4}\sqrt{2}$.

16. 1980【解析】$b_n=\frac{c_n}{c_{n-1}},\therefore\frac{c_n}{c_{n-1}}+c_n=1$整理得$\frac{1}{c_n}-\frac{1}{c_{n-1}}=1$，

由$b_1=c_1=a_1$且$b_1+c_1=1$得$c_1=\frac{1}{2}\therefore\frac{1}{c_n}=\frac{1}{c_1}+(n-1)\times1=\text{n}+1$

$\therefore c_n=\frac{1}{n+1}\quad\therefore b_n=\frac{n}{n+1}\quad\therefore a_n=\frac{n}{n+1}-\frac{n-1}{n}=\frac{1}{n^2+n}$

从而$\frac{1}{a_n}=n^2+n$因为$44^2+44=1980,45^2+45=2070$，所以填$1980$.

三、解答题

17. 解：（1）设等差数列的公差为，由题得：$\begin{cases}2S_2=a_2(a_2+1)\\a_2{}^2=a_1a_4\end{cases}$整理$\begin{cases}a_1{}^2+2a_1d+d^2=3a_1+d\\a_1=d\end{cases}$

解得$a_1=d=1$，所以$a_n=n$ --6分

（2）由（1）得$b_n=(n+1)2^n$

则$T_n=2\times2^1+3\times2^2+4\times2^3+\cdots+(n+1)\times2^n$

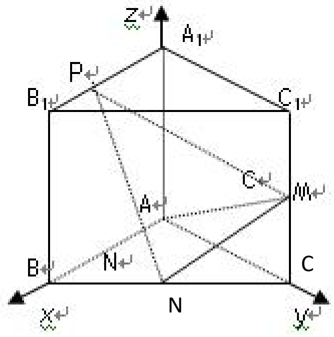
$2T_n=2\times2^2+3\times2^3+4\times2^4+\cdots+(n+1)\times2^{n+1}$　　两式做差整理得：$T_n=n\bullet2^{n+1}$----------------------12分

18. 解：如图，以A为原点建立空间直角坐标系，则$A_1(0,0,1),\text{B}_1(1,0,1)$，$M(0,1,\frac{1}{2}),\text{N}(\frac{1}{2},\frac{1}{2},0)$

$\overrightarrow{A_1P}=\lambda\overrightarrow{A_1B_1}=\lambda(1,0,0)=(\lambda,0,0)$，$\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{A_1P}=(\lambda,0,1)$，$\overrightarrow{PN}=(\frac{1}{2}-\lambda,\frac{1}{2},-1)$

（1）$\because \overrightarrow{AM}=(0,1,\frac{1}{2})$，$\therefore \overrightarrow{AM}\bullet\overrightarrow{PN}=0+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}=0$

$\therefore$无论 λ 取何值，$AM\perp PN$ ------------------------------4 分



（2）$\because \vec{m}=(0,0,1)$ 是平面 ABC 的一个法向量。

$$\therefore \sin\theta=|\cos\langle\vec{m},\overrightarrow{PN}\rangle|=\frac{1}{\sqrt{(\lambda-\frac{1}{2})^2+\frac{5}{4}}}$$

$\therefore$当 $\lambda=\frac{1}{2}$ 时，θ 取得最大值，此时 $\sin\theta=\frac{2}{\sqrt{5}},\cos\theta=\frac{1}{\sqrt{5}},\tan\theta=2$. -----------------------------8 分

（3）设存在，$\overrightarrow{NM}=(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2})$，设 $\vec{n}=(x,y,z)$ 是平面 PMN 的一个法向量。

则 $\begin{cases}-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}y+\frac{1}{2}z=0\\(\frac{1}{2}-\lambda)x+\frac{1}{2}y-z=0\end{cases}$ 得 $\begin{cases}y=\frac{1+2\lambda}{3}x\\z=\frac{2-2\lambda}{3}x\end{cases}$ 令 x=3，得 y=1+2 λ，z=2—2 λ

$\therefore\ \vec{n}=(3,1+2\lambda,2-2\lambda)$

$\therefore |\cos\langle\vec{m},\vec{n}\rangle|=\frac{|2-2\lambda|}{\sqrt{9+(1+2\lambda)^2+(2-2\lambda)^2}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ 化简得 $4\lambda^2+10\lambda+13=0(*)$

$\because \Delta=100-4\times4\times13=-108<0$，　$\therefore$方程（*）无解

$\therefore$不存在点 P 使得平面 PMN 与平面 ABC 所成的二面角为 30º ------------------------------12 分

19.（Ⅰ）记一名职工所享受的路途补贴为 X（元）.

X 的可能值为 200，240，280，320，360. X 的分布列为

X	200	240	280	320	360
P	0.25	0.5	0.15	0.05	0.05

X 的均值为 E(X)＝200×0.25＋240×0.5＋280×0.15＋(320＋360)×0.05＝246.　----------5 分

该公司每月用于路途补贴的费用总额约为

E(8000X)＝8000E(X)＝1968000（元）.　------------------------------7 分

（Ⅱ）依题意，当 60≤t≤100 时，y＞300.

1 名职工中路途补贴超过 300 元的概率 p＝P(60≤t≤100)＝0.1，　---------- ----------------------8 分

记事件“4 名职工中至少有 2 名路途补贴超过 300 元”为 A，则

P(A)＝C_4^2×0.1^2×0.9^2＋C_4^3×0.1^3×0.9＋0.1^4＝0.0523.　----------12 分

20.（1）设椭圆方程为 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，则 $\begin{cases}a=2b\\\frac{4}{a^2}+\frac{1}{b^2}=1\end{cases}$，解得 $a^2=8,b^2=2$

所以椭圆方程为$\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{2}=1$.----------------------------------4 分

（2）设直线l的方程为$y=\dfrac{1}{2}x+m$，由$\begin{cases} y=\dfrac{1}{2}x+m \\ x^2+4y^2=8 \end{cases}$ 消去y得$x^2+2mx+2(m^2-2)=0$

依题意可知，$\Delta=4m^2-8(m^2-2)>0$，即$-2<m<2$.

设$A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，则$x_1+x_2=-2m,x_1x_2=2(m^2-2)$ ----------------------------8 分

易知直线MA,MB的斜率存在，分别记为k_1,k_2，则有

$$k_1=\frac{y_1-1}{x_1-2}=\frac{\frac{1}{2}x_1+m-1}{x_1-2}=\frac{1}{2}+\frac{m}{x_1-2}\text{，同理 }k_2=\frac{y_2-1}{x_2-1}=\frac{1}{2}+\frac{m}{x_2-2}$$

$$\therefore k_1+k_2=\frac{y_1-1}{x_1-2}+\frac{y_2-1}{x_2-1}=1+m\cdot(\frac{1}{x_1-2}+\frac{1}{x_2-2})=1+m\cdot\frac{(x_1+x_2)-4}{x_1x_2-2(x_1+x_2)+4}$$

$$=1+m\cdot\frac{-2m-4}{2(m^2-2)+4m+4}=0$$ --10 分

所以直线MA,MB的倾斜角互补，故直线MA,MB与x轴始终围成一个等腰三角形.

可知S,T关于直线$x=2$对称，则$s+t=4$为定值-------------------------------------12 分

21．解：（1）$f(x)=e^x-\dfrac{1}{2}x^2$，则$h(x)=f'(x)=e^x-x$。所以$h'(x)=e^x-1>0(x>0)$

所以$h(x)=f'(x)$在$(0,+\infty)$上递增，所以$f'(x)>f'(0)=1>0$

所以$f(x)=e^x-\dfrac{1}{2}x^2$在$(0,+\infty)$上递增，故$f(x)>f(0)=1$。---------------------4 分

（2）$f'(x)=e^x-2kx$，下面求使$f'(x)>0(x>0)$恒成立的k的取值范围。

若$k\le 0$，显然$f'(x)>0$，即$f(x)$在$(0,+\infty)$上递增；

记$\varphi(x)=e^x-2kx$，则$\varphi'(x)=e^x-2k$.

当$0<k<\dfrac{1}{2}$时，$\varphi'(x)>0$，即$\varphi(x)$在$(0,+\infty)$上递增；

于是$f'(x)=\varphi(x)>\varphi(0)=1>0$，$\therefore f(x)$在$(0,+\infty)$上递增；

当$k\ge\dfrac{1}{2}$时，$\varphi(x)=e^x-2kx$在$(0,\ln(2k))$上单调递减，在$(\ln(2k),+\infty)$上单调递增.

所以函数$\varphi(x)$在$x=\ln(2k)$处取得最小值，即$\varphi(x)_{\min}=\varphi[\ln(2k)]=e^{\ln(2k)}-2k\ln(2k)=2k-2k\ln(2k)$

依题意可得$f'(x)=\varphi(x)\ge 2k-2k\ln(2k)\ge 0$，解之得$\dfrac{1}{2}\le k\le\dfrac{e}{2}$

综上，k 的取值范围为 $(-\infty,\frac{e}{2}]$.--8 分

（3）由（1）知，对于 $x\in(0,+\infty)$，有 $f(x)=e^x-\frac{1}{2}x^2>1$，所以 $e^{2x}>2x^2+1$，

则 $\ln(2x^2+1)<2x$，取 $x=\frac{1}{n^2}$，从而有 $\ln(\frac{2}{n^4}+1)<\frac{2}{n^2}(n\in N^*)$，

于是 $\ln(\frac{2}{1^4}+1)+\ln(\frac{2}{2^4}+1)+\ln(\frac{2}{3^4}+1)+\cdots+\ln(\frac{2}{n^4}+1)<\frac{2}{1^2}+\frac{2}{2^2}+\frac{2}{3^2}+\cdots+\frac{2}{n^2}$

$<\frac{2}{1^2}+\frac{2}{1\times2}+\frac{2}{2\times3}+\cdots+\frac{2}{(n-1)\cdot n}=2+2[(1-\frac{1}{2})+(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})+\cdots+(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n})]=4-\frac{2}{n}<4$

$\therefore(\frac{2}{1^4}+1)\cdot(\frac{2}{2^4}+1)\cdot(\frac{2}{3^4}+1)\cdots(\frac{2}{n^4}+1)<e^4(n\in N^*)$. --12 分

22. 解：(1)对于 C：由 $\rho=4\cos\theta$，得 $\rho^2=4\rho\cos\theta$，进而 $x^2+y^2=4x$；

对于 l：由 $\begin{cases}x=5+\frac{\sqrt{3}}{2}t\\ y=\frac{1}{2}t\end{cases}$（$t$ 为参数），得 $y=\frac{1}{\sqrt{3}}(x-5)$，即 $x-\sqrt{3}y-5=0$.----------5 分

(2)由(1)可知 C 为圆，且圆心为 $(2,0)$，半径为 2，则弦心距 $d=\frac{|2-\sqrt{3}\times0-5|}{\sqrt{1+3}}=\frac{3}{2}$，弦长

$|PQ|=2\sqrt{2^2-(\frac{3}{2})^2}=\sqrt{7}$，因此以 PQ 为边的圆 C 的内接矩形面积 $S=2d\cdot|PQ|=3\sqrt{7}$.----------10 分

23.（Ⅰ）当 $x\ge1$ 时，原式变为：$2x-2+4x\le1$, 即 $x\le\frac{1}{2}$ 此时无解；

当 $x<1$ 时，原式变为：$2-2x+4x\le1$, 即 $x\le-\frac{1}{2}$，不等式的解 $x\le-\frac{1}{2}$

综上：不等式的解集 $\left\{x\middle|\ x\le-\frac{1}{2}\right\}$ ----------------------------5 分

（Ⅱ）$f(x)=\begin{cases}6x-m,x\ge\frac{m}{2}\\ 2x+m,x<\frac{m}{2}\end{cases}$ $\therefore$ 函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上是单调递增的

若不等式 $f(x)\le2$ 的解集为 $\{x|\ x\le-2\}$

若 $\frac{m}{2}\ge-2$，则 $2\times(-2)+m=2$，此时 $m=6$

若 $\frac{m}{2}<-2$，则 $6\times(-2)-m=2$，此时 $m=-14$

所以 $m=6$ 或 $m=-14$ 时，不等式 $f(x)\le2$ 的解集为 $\{x|\ x\le-2\}$--------------------------10 分