

# 高三年级数学热身考试（文科）答案

## 一、选择题

1. B 【解析】由题意知  $|z| = \frac{|2i|}{|1+i|} = \frac{|2|}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$ ，利用性质  $z \cdot \bar{z} = |z|^2$ ，得  $z \cdot \bar{z} = 2$ ，故选 B.

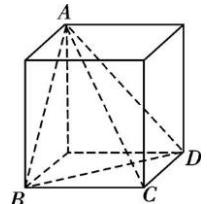
2.D 【解析】由题意知， $A = \{x \in \mathbb{Z} | y = \sqrt{4x - x^2 - 3}\} = \{1, 2, 3\}$ ，且  $B = \{a, 1\}$ ，由  $A \cap B = B$ ，知  $B \subseteq A$ ，则实数  $a$  的值为 2 或 3，故选 D.

3. C. 解析：若  $a > b > 1$ ，则  $\log_a b < \log_a a = 1$ ；若  $\log_a b < 1 = \log_a a$ ，因为  $a, b \in (1, +\infty)$  则  $a > b$ ，故“ $a > b$ ”是“ $\log_a b < 1$ ”的充分必要条件.

4. B 解析： $a > b > 0, c > 1$ , 所以  $c^a > c^b$ .

5.D. 【解析】 $\because \cos(\frac{\pi}{4} - \alpha) = \frac{3}{5}$ ,  $\therefore \sin 2\alpha = \cos(\frac{\pi}{2} - 2\alpha) = 2\cos^2(\frac{\pi}{4} - \alpha) - 1 = -\frac{7}{25}$ . 故选 D

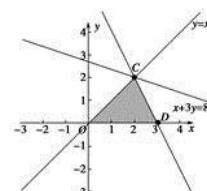
6. A 【解析】由三视图知该几何体的直观图放在正方体中是如图所示的三棱锥  $A-BCD$ ，其外接球就是正方体的外接球. 设外接球的半径为  $R$ ，因为正方体的棱长为 2，其体对角线为外接球的直径，即  $2R=2\sqrt{3}$ ，所以外接球的体积  $V=\frac{4}{3}\pi R^3=\frac{4}{3}\pi(\sqrt{3})^3=4\sqrt{3}\pi$ . 故选 A.



7.D 解析：由  $a_4 + \lambda a_{10} + a_{16} = 15$ ， $a_4 + a_{16} = 2a_{10}$ ， $\therefore (2 + \lambda) \cdot a_{10} = 15$

$\therefore (2 + \lambda) \cdot (1 + 9d) = 15$ ， $\lambda = \frac{15}{1+9d} - 2$ ， $\because \lambda$  随着  $d$  的增大而减小 $\therefore$ 当  $d=1$  时，

$\lambda$  取得最大值  $-\frac{1}{2}$ .



8.B 【解析】由  $z = x + 3y$ ，得  $y = -\frac{1}{3}x + \frac{z}{3}$ ，先作出  $\begin{cases} y \geq 0 \\ y \leq x \end{cases}$  的图象，如图所示，

因为目标函数  $z = x + 3y$  的最大值为 8，所以  $x + 3y = 8$  与直线  $y = x$  的交点为  $C$ ，

解得  $C(2, 2)$ ，代入直线  $2x + y + k = 0$ ，得  $k = -6$ .

9.A 【解析】连接  $AC, BD$  相交于点  $O$ ，连接  $EM, EN$ . 在①中，由正四棱锥  $S-ABCD$ ，可得  $SO \perp$  底面  $ABCD$ ,  $AC \perp BD$ ,  $\therefore SO \perp AC$ ， $\therefore SO \cap BD = O$ ,  $\therefore AC \perp$  面  $SBD$ .  $\therefore E, M, N$  分别是  $BC, CD, SC$  的

中点,  $\therefore EM \parallel BD$ ,  $MN \parallel SD$ ,  $EM \cap MN = M$ ,  $\therefore$  平面  $EMN \parallel$  平面  $SBD$ ,  $\therefore AC \perp$  平面  $EMN$ ,  $\therefore AC \perp EP$ , 故①正确; 在②中, 由异面直线的定义可知,  $EP$  和  $BD$  是异面直线, 不可能  $EP \parallel BD$ , 因此不正确; 在③中, 由①可知, 平面  $EMN \parallel$  平面  $SBD$ ,  $\therefore EP \parallel$  平面  $SBD$ , 因此正确; 在④中, 由①同理可得,  $EM \perp$  平面  $SAC$ , 若  $EP \perp$  平面  $SAC$ , 则  $EP \parallel EM$ , 与  $EP \cap EM = E$  相矛盾, 因此当  $P$  与  $M$  不重合时,  $EP$  与平面  $SAC$  不垂直, 即不正确. 故选 A.

10B 解析 设正三角形 ABC 的外接圆圆心为 O, 半径为 R, 则  $R = 1$ , 且  $\angle AOB = 120^\circ$ . 由题意知  $\vec{AP} \cdot \vec{PB} = (\vec{OP} - \vec{OA}) \cdot (\vec{OB} - \vec{OP}) = \vec{OP} \cdot \vec{OB} - \vec{OP}^2 - \vec{OA} \cdot \vec{OB} + \vec{OA} \cdot \vec{OP} = \vec{OP} \cdot \vec{OB} - 1 - 1 \times 1 \times \cos 120^\circ + \vec{OA} \cdot \vec{OP} = \vec{OP} \cdot (\vec{OA} + \vec{OB}) - \frac{1}{2}$ . 设 AB 的中点为 M, 则  $\vec{OA} + \vec{OB} = 2\vec{OM}$ , 且  $|\vec{OM}| = \frac{1}{2}$ , 设  $\vec{OM}$  与  $\vec{OP}$  的夹角为  $\theta$ , 则  $\vec{AP} \cdot \vec{PB} = 2\vec{OM} \cdot \vec{OP} - \frac{1}{2} = 2|\vec{OM}||\vec{OP}|\cos\theta - \frac{1}{2} = 2 \times \frac{1}{2} \times 1 \times \cos\theta - \frac{1}{2} = \cos\theta - \frac{1}{2}$ . 又因为  $\theta \in [0, \pi]$ , 所以  $\vec{AP} \cdot \vec{PB}$  的范围为  $[-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}]$ .

11.B 【解析】由抛物线的定义知  $|MF| = y_0 + \frac{p}{2}$ , 则  $y_0 + \frac{p}{2} = \frac{5}{4}y_0$ , 解得  $y_0 = 2p$ , 又点  $M(1, y_0)$  在抛物线  $C$  上, 代入  $C: x^2 = 2py$ , 得  $2py_0 = 1$ , 得  $y_0 = 1$ ,  $p = \frac{1}{2}$ , 所以  $M(1, 1)$ , 抛物线  $C: x^2 = y$ . 因为斜率为  $k$  的直线  $l$  过点  $Q(-1, 3)$ , 所以  $l$  的方程为  $y - 3 = k(x + 1)$ , 联立方程得  $\begin{cases} y - 3 = k(x + 1) \\ x^2 = y \end{cases}$ , 即

$x^2 - kx - k - 3 = 0$ , 设  $A(x_1, y_1)$ ,  $B(x_2, y_2)$ , 由根与系数的关系得  $\begin{cases} x_1 + x_2 = k \\ x_1 x_2 = -k - 3 \end{cases}$ , 则直线  $AM$  的斜率  $k_{AM} = \frac{x_1^2 - 1}{x_1 - 1} = x_1 + 1$ , 直线  $BM$  的斜率  $k_{BM} = \frac{x_2^2 - 1}{x_2 - 1} = x_2 + 1$ ,

$$k_{AM} k_{BM} = (x_1 + 1)(x_2 + 1) = x_1 x_2 + x_1 + x_2 + 1 = k - k - 3 + 1 = -2, \text{ 故选 B.}$$

12.C 解: A 选项:  $e^{x_2} - e^{x_1} > \ln x_2 - \ln x_1 \Leftrightarrow e^{x_2} - \ln x_2 > e^{x_1} - \ln x_1$ , 设  $f(x) = e^x - \ln x$

$\therefore f'(x) = e^x - \frac{1}{x} = \frac{xe^x - 1}{x}$ , 设  $g(x) = xe^x - 1$ , 则有  $g'(x) = (x + 1)e^x > 0$  恒成立, 所以  $g(x)$  在  $(0, 1)$

单调递增, 所以  $g(0) = -1 < 0$ ,  $g(1) = e - 1 > 0$ , 从而存在  $x_0 \in (0, 1)$ , 使得  $g(x_0) = 0$ , 由单调性可判断

出:  $x \in (0, x_0)$ ,  $g'(x) < 0 \Rightarrow f'(x) < 0$ ,  $x \in (x_0, 1)$ ,  $g'(x) > 0 \Rightarrow f'(x) > 0$ , 所以  $f(x)$  在  $(0, 1)$  不单调,

不等式不会恒成立; B 选项:  $e^{x_1} - e^{x_2} > \ln x_2 - \ln x_1 \Leftrightarrow e^{x_1} + \ln x_1 > e^{x_2} + \ln x_2$ , 设  $f(x) = e^x + \ln x$  可知

$f(x)$  单调递增. 所以应该  $f(x_1) < f(x_2)$ , B 错误; C 选项:  $x_2 e^{x_1} > x_1 e^{x_2} \Leftrightarrow \frac{e^{x_1}}{x_1} > \frac{e^{x_2}}{x_2}$ , 构造函数

$f(x) = \frac{e^x}{x}$ ,  $f'(x) = \frac{(x-1)e^x}{x^2}$ , 则  $f'(x) < 0$  在  $x \in (0,1)$  恒成立。所以  $f(x)$  在  $(0,1)$  单调递减, 所以

$f(x_1) > f(x_2)$  成立; D 选项:  $x_2 e^{x_1} < x_1 e^{x_2} \Leftrightarrow \frac{e^{x_1}}{x_1} < \frac{e^{x_2}}{x_2}$ , 同样构造  $f(x) = \frac{e^x}{x}$ , 由 C 选项分析可知 D

错误, 选 C.

## 二、填空题

13. 60                    14. 3900,500

15.  $a > 4$  或  $a < 0$ . 【解析】 $\because$  偶函数  $f(x)$  满足  $f(x) = 2^x - 4 (x \geq 0)$ ,  $\therefore$  函数  $f(x)$  在  $[0, +\infty)$  上为增函数,

$f(2) = 0$ ,  $\therefore$  不等式  $f(a-2) > 0$  等价为  $f(|a-2|) > f(2)$ , 即  $|a-2| > 2$ , 即  $a-2 > 2$  或  $a-2 < -2$ ,

解得  $a > 4$  或  $a < 0$ .

16.  $-\frac{7}{4} < p < \frac{23}{4}$  【解析】 $\because S_n = (-1)^n a_n + \frac{1}{2^n} + 2n - 6$ ,  $\therefore$  当  $n \geq 2$  时,  $S_{n-1} = (-1)^{n-1} a_{n-1} + \frac{1}{2^{n-1}} + 2n - 8$ ,

两式相减得,  $a_n = (-1)^n a_n + \frac{1}{2^n} + 2n - 6 - [(-1)^{n-1} a_{n-1} + \frac{1}{2^{n-1}} + 2n - 8]$ ,

整理得  $[1 - (-1)^n] a_n = (-1)^n a_{n-1} + 2 - \frac{1}{2^n} (n \geq 2)$  (\*). 又  $S_n = (-1)^n a_n + \frac{1}{2^n} + 2n - 6$ ,

$\therefore S_1 = -a_1 + \frac{1}{2} + 2 - 6$ , 即  $a_1 = -\frac{7}{4}$ . ①当  $n$  为偶数时, 化简(\*)式可知,  $a_{n-1} = \frac{1}{2^n} - 2$ ,

$\therefore a_n = \frac{1}{2^{n+1}} - 2 (n \text{ 为奇数})$ ; ②当  $n$  为奇数时, 化简(\*)式可知,  $2a_n = -a_{n-1} + 2 - \frac{1}{2^n}$ ,

即  $\frac{1}{2^n} - 4 = -a_{n-1} + 2 - \frac{1}{2^n}$ , 即  $a_{n-1} = 6 - \frac{1}{2^{n-1}}$ ,  $\therefore a_n = 6 - \frac{1}{2^n} (n \text{ 为偶数})$ .

于是  $a_n = \begin{cases} \frac{1}{2^{n+1}} - 2, & n \text{ 为奇数} \\ -\frac{1}{2^n} + 6, & n \text{ 为偶数} \end{cases}$ .  $\because$  对任意  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $(a_{n+1} - p)(a_n - p) < 0$  恒成立,

$\therefore$  对任意  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $(p - a_{n+1})(p - a_n) < 0$  恒成立. 又数列  $\{a_{2k-1}\}$  单调递减, 数列  $\{a_{2k}\}$  单调递增,

$\therefore$  当  $n$  为奇数时, 有  $a_n < p < a_{n+1}$ , 则  $a_1 < p < a_{1+1}$ , 即  $-\frac{7}{4} < p < \frac{23}{4}$ ;

当  $n$  为偶数时, 有  $a_{n+1} < p < a_n$ , 则  $a_{2+1} < p < a_2$ , 即  $-\frac{31}{16} < p < \frac{23}{4}$ . 综上所述,  $-\frac{7}{4} < p < \frac{23}{4}$ .

## 三、解答题

17. 解: (1)  $\because S = \frac{\sqrt{3}}{4}(a^2 + c^2 - b^2)$   $\therefore \frac{1}{2}ac \sin B = \frac{\sqrt{3}}{4}(a^2 + c^2 - b^2)$  故:  $\frac{1}{2}ac \sin B = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 2ac \cos B$ ,

$\Rightarrow \tan B = \sqrt{3} \Rightarrow B = \frac{\pi}{3}$ . .... 4分

(2) 设  $\Delta AOC$  周长为  $l$ ,  $\angle OAC = \alpha$ , 则  $\alpha \in (\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{4})$   $\because OA$ 、 $OC$  分别是  $\angle A$ 、 $\angle C$  的平分线,  $B = \frac{\pi}{3}$

$$\text{由正弦定理得} \frac{OA}{\sin(\frac{\pi}{3}-\alpha)} = \frac{OC}{\sin \alpha} = \frac{2\sqrt{3}}{\sin \frac{2\pi}{3}}, \quad l = 4\sin \alpha + 4\sin(\frac{\pi}{3}-\alpha) + 2\sqrt{3}, \quad \alpha \in (\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{4}) \quad \dots\dots 8\text{分}$$

$\because \alpha \in (\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{4}) \therefore \alpha + \frac{\pi}{3} \in (\frac{5\pi}{12}, \frac{7\pi}{12})$  当  $\alpha = \frac{\pi}{6}$  时,  $\Delta AOC$  周长的最大值为  $4 + 2\sqrt{3}$  ..... 12分

18 解: (1) 根据题意:  $0.001 \times 100 + 2y_0 \cdot 100 + 0.002 \times 100 + 0.004 \times 100 = 1$  解得  $y_0 = 0.0015$

设在寿命落在100~300之间的应抽取  $x$  个, 根据分层抽样有:

$$\frac{x}{20} = (0.001 + 0.0015) \times 100 \quad \text{解得: } x = 5$$

所以寿命落在100~300之间的元件应抽取5个 -----4分

(2) 记“恰好有一个寿命落在100~200之间,一个寿命为200~300之间”为事件A,

易知, 寿命落在  $100 \sim 200$  之间的元件有 2 个, 分别记  $a_1, a_2$ , 落在  $200 \sim 300$  之间的元件有 3 个,

分别记为:  $b_1, b_2, b_3$ , 从中任取 2 个元件, 有如下基本事件:  $(a_1, a_2), (a_1, b_1), (a_1, b_2), (a_1, b_3)$

$(a_1, b_1), (a_1, b_2), (a_1, b_3), (b_1, b_2), (b_1, b_3), (b_2, b_3)$ ，共有10个基本事件.

事件 A “恰好有一个寿命落在  $100 \sim 200$  之间，一个寿命为  $200 \sim 300$  之间” 有：

$(a_1, b_1), (a_1, b_2), (a_1, b_3), (a_2, b_1), (a_2, b_2), (a_2, b_3)$ , 共有6个基本事件.....10分

$$\therefore P(A) = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$

∴ “恰好有一个寿命落在100~200之间，一个寿命为200~300之间”的概率为  $\frac{3}{5}$  -12分

19. 解 (1) ∵E、F 分别是 CD 和 BC 的中点, ∴EF//BD.

又 $\because AC \perp BD$ ,  $\therefore AC \perp EF$ , 故折起后有 $PH \perp EF$ .

又 $\because PH \perp AH$ ,  $\therefore PH \perp$ 平面ABFED.

又 $\because$ BD $\subset$ 平面ABFED,  $\therefore$ PH $\perp$ BD,

$\because AH \cap PH = H$ ,  $AH \subset \text{平面 } APH$ ,  $PH \subset \text{平面 } APH$ ,  $\therefore BD \perp \text{平面 } APH$ ,

又 $\because AP \subset$ 平面APH,  $\therefore BD \perp AP$ . .....4分

(2) ∵ 正方形 ABCD 的边长为  $2\sqrt{2}$ , ∴  $AC=BD=4$ ,  $AN=2$ ,  $NH=PH=1$ ,  $PE=PF$ ,

∴△PBD 是等腰三角形, 连接 PN, 则  $PN \perp BD$ ,  $PN = \sqrt{NH^2 + PH^2} = \sqrt{2}$ .

设三棱锥 A-BDP 的高为  $h$ , 则三棱锥 A-BDP 的体积为  $V_{A-BDP} = \frac{1}{3} S_{\triangle PBD} \cdot h = \frac{2\sqrt{2}h}{3}$ .

由 (1) 可知  $PH$  是三棱锥  $P-ABD$  的高,

∴三棱锥 P-ABD 的体积为  $V_{P-ABD} = \frac{1}{3} S_{\triangle ABD} \cdot PH = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 2\sqrt{2} \times 2\sqrt{2} \times 1 = \frac{4}{3}$ . ..... 10 分

∵VA-BDP=VP-ABD, 即  $\frac{2\sqrt{2}h}{3} = \frac{4}{3}$ , 解得  $h = \sqrt{2}$ , 即三棱锥 A-BDP 的高为  $\sqrt{2}$ . ..... 12 分

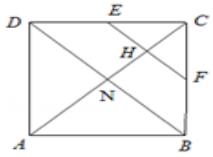


图1

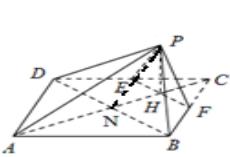


图2

20. 【解析】(1) 由  $e = \frac{c}{a} = \frac{1}{2}$  得  $a = 2c$ , 所以  $b^2 = 3c^2$  ..... 1 分

点  $\left(1, \frac{3}{2}\right)$  在椭圆上得  $\frac{1}{4c^2} + \frac{\frac{9}{4}}{3c^2} = 1$  解得  $c = 1$ , ..... 2 分  $b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{3}$  ..... 3 分

所求椭圆方程为  $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$  ..... 4 分

(2) 当直线  $l_1$  的斜率不存在时, 直线  $OM$  平分线段  $PQ$  成立 ..... 5 分

当直线  $l_1$  的斜率存在时, 设直线  $l_1$  方程为  $y = k(x-1)$ , 联立方程得  $\begin{cases} y = k(x-1) \\ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1 \end{cases}$ ,

消去  $y$  得  $(4k^2 + 3)x^2 - 8k^2x + 4k^2 - 12 = 0$ , 因为  $l_1$  过焦点, 所以  $\Delta > 0$  恒成立,

设  $P(x_1, y_1)$ ,  $Q(x_2, y_2)$ , 则  $x_1 + x_2 = \frac{8k^2}{4k^2 + 3}$ ,  $x_1 x_2 = \frac{4k^2 - 12}{4k^2 + 3}$  ..... 7 分

$y_1 + y_2 = k(x_1 - 1) + k(x_2 - 1) = k(x_1 + x_2 - 2) = -\frac{6k}{4k^2 + 3}$ , 所以  $PQ$  的中点坐标为

$\left(\frac{4k^2}{4k^2 + 3}, -\frac{3k}{4k^2 + 3}\right)$  ..... 8 分,  $l_2$  方程为  $y = -\frac{1}{k}(x-1)$ ,  $M(4, y_M)$ , 可得  $M\left(4, -\frac{3}{k}\right)$  ..... 10 分

所以直线  $OM$  方程为  $y = -\frac{3}{4k}x$ ,  $\left(\frac{4k^2}{4k^2 + 3}, -\frac{3k}{4k^2 + 3}\right)$  满足直线  $OM$  方程, 即  $OM$  平分线段  $PQ$ ,

综上所述, 直线  $OM$  平分线段  $PQ$  ..... 12 分

21. 解: (1)  $f'(x) = \frac{1}{k} \cdot \frac{ke^{kx} - (kx-1)ke^{kx}}{(e^{kx})^2} = \frac{2-kx}{e^{kx}} = \frac{-k(x-\frac{2}{k})}{e^{kx}}$  ..... 1 分

---

①若  $k > 0$ , 当  $x \in (-\infty, \frac{2}{k})$  时,  $f'(x) > 0$ ,  $f(x)$  在  $(-\infty, \frac{2}{k})$  上单调递增;

当  $x \in (\frac{2}{k}, +\infty)$  时,  $f'(x) < 0$ ,  $f(x)$  在  $(\frac{2}{k}, +\infty)$  上单调递减 -----3 分

②若  $k < 0$ , 当  $x \in (-\infty, \frac{2}{k})$  时,  $f'(x) < 0$ ,  $f(x)$  在  $(-\infty, \frac{2}{k})$  上单调递减;

当  $x \in (\frac{2}{k}, +\infty)$  时,  $f'(x) > 0$ ,  $f(x)$  在  $(\frac{2}{k}, +\infty)$  上单调递增.

$\therefore$  当  $k > 0$  时,  $f(x)$  在  $(-\infty, \frac{2}{k})$  上单调递增, 在  $(\frac{2}{k}, +\infty)$  上单调递减;

当  $k < 0$  时,  $f(x)$  在  $(-\infty, \frac{2}{k})$  上单调递减, 在  $(\frac{2}{k}, +\infty)$  上单调递增. -----5 分

(2)  $f(\frac{x}{k}) = \frac{x-1}{ke^x} \leq \ln x$  ( $x \geq 1$ ), 当  $k < 0$  时, 上不等式成立, 满足题设条件; -----6 分

当  $k > 0$  时,  $f(\frac{x}{k}) = \frac{x-1}{ke^x} \leq \ln x$ , 等价于  $\frac{x-1}{e^x} - k \ln x \leq 0$ , 设  $g(x) = \frac{x-1}{e^x} - k \ln x$  ( $x \geq 1$ ),

则  $g'(x) = \frac{2-x}{e^x} - \frac{k}{x} = \frac{2x-x^2-ke^x}{xe^x}$ , 设  $h(x) = 2x-x^2-ke^x$  ( $x \geq 1$ ), 则  $h'(x) = 2(1-x)-ke^x < 0$ ,

$\therefore h(x)$  在  $[1, +\infty)$  上单调递减, 得  $h(x) \leq h(1) = 1-ke$ . -----9 分

①当  $1-ke \leq 0$ , 即  $k \geq \frac{1}{e}$  时, 得  $h(x) \leq 0$ ,  $g'(x) \leq 0$ ,

$\therefore g(x)$  在  $[1, +\infty)$  上单调递减, 得  $g(x) \leq g(1) = 0$ , 满足题设条件; -----10 分

②当  $1-ke > 0$ , 即  $0 < k < \frac{1}{e}$  时,  $h(1) > 0$ , 而  $h(2) = -ke^2 < 0$ ,  $\therefore \exists x_0 \in (1, 2)$ ,  $h(x_0) = 0$ ,

又  $h(x)$  单调递减,  $\therefore$  当  $x \in (1, x_0)$ ,  $h(x) > 0$ , 得  $g'(x) > 0$ ,  $\therefore g(x)$  在  $[1, x_0)$  上单调递增,

得  $g(x) \geq g(1) = 0$ , 不满足题设条件; 综上所述,  $k < 0$  或  $k \geq \frac{1}{e}$  -----12 分

22. 解: (1) 由曲线  $C$  的参数方程, 得普通方程为  $4y = x^2$ , 由  $x = \rho \cos \theta$ ,  $y = \rho \sin \theta$ ,

得  $4\rho \sin \theta = \rho^2 \cos^2 \theta$ , 所以曲线  $C$  的极坐标方程为  $\rho \cos^2 \theta = 4 \sin \theta$ ,

[或  $\rho = \frac{4 \sin \theta}{\cos^2 \theta}$ ] -----3 分

$l_2$  的极坐标方程为  $\theta = \alpha + \frac{\pi}{2}$ ; -----5 分

(2) 依题意设  $A(\rho_A, \alpha), B(\rho_B, \frac{\pi}{2} + \alpha)$ , 则由 (1) 可得  $\rho_A = \frac{4 \sin \alpha}{\cos^2 \alpha}$ ,

同理得  $\rho_B = \frac{4 \sin(\alpha + \frac{\pi}{2})}{\cos^2(\alpha + \frac{\pi}{2})}$ , 即  $\rho_B = \frac{4 \cos \alpha}{\sin^2 \alpha}$ , -----7 分

$$\therefore S_{\triangle OAB} = \frac{1}{2} |OA| \cdot |OB| = \frac{1}{2} |\rho_A \cdot \rho_B| = \frac{8 |\sin \alpha \cdot \cos \alpha|}{\cos^2 \alpha \cdot \sin^2 \alpha} \because 0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \therefore 0 < \alpha < \pi,$$

$$\therefore S_{\triangle OAB} = \frac{8}{\cos \alpha \cdot \sin \alpha} = \frac{16}{\sin 2\alpha} \geq 16, \quad \text{-----9 分}$$

$\triangle OAB$  的面积的最小值为 16, 此时  $\sin 2\alpha = 1$ , 得  $2\alpha = \frac{\pi}{2}$ ,  $\therefore \alpha = \frac{\pi}{4}$ . \text{-----10 分}

23 【解析】(1) 原不等式等价于

$$\begin{cases} x \leq -1 \\ -2x - 2 - 5 \geq 1 - x \end{cases} \text{或} \begin{cases} -1 < x \leq 1 \\ 2x + 2 - 5 \geq 1 - x \end{cases} \text{或} \begin{cases} x > 1 \\ 2x + 2 - 5 \geq x - 1 \end{cases}, \quad \text{-----3 分}$$

解得  $x \leq -8$  或  $\emptyset$  或  $x \geq 2$ , \text{-----4 分}

综上所述, 不等式  $f(x) \geq |x - 1|$  的解集为  $(-\infty, -8] \cup [2, +\infty)$  \text{-----5 分}

(2) 当  $m = -1$  时, 则  $g(x) = |2x + 2| - 5 + |x + 1| = 3|x + 1| - 5$ ,

此时  $g(x)$  的图象与  $x$  轴围成一个三角形, 满足题意; \text{-----6 分}

$$\text{当 } m > -1 \text{ 时, } g(x) = |2x + 2| - 5 + |x - m| = \begin{cases} -3x + m - 7 & x \leq -1 \\ x + m - 3 & -1 < x \leq m, \\ 3x - m - 3 & x > m \end{cases}, \quad \text{-----7 分}$$

则函数  $g(x)$  在  $(-\infty, -1)$  上单调递减, 在  $(-1, +\infty)$  上单调递增. 要使函数  $g(x)$  的图象与  $x$  轴围成一个

$$\text{三角形, 则} \begin{cases} g(-1) = m - 4 < 0 \\ g(m) = 2m - 3 \geq 0 \end{cases}, \quad \text{-----8 分} \quad \text{解得} \frac{3}{2} \leq m < 4, \quad \text{-----9 分}$$

综上所述, 实数  $m$  的取值范围为  $\left[ \frac{3}{2}, 4 \right) \cup \{-1\}$  \text{-----10 分}