参考答案

一、单项选择

1、【答案】D

【解析】先化简集合 B，再求出 $A\cup B$，再求子集的个数，得到答案.

详解：易知 $B=\{x\in Z|-1<x<2\}=\{0,1\}$，又 $A=\{-1,0\}$，所以 $A\cup B=\{-1,0,1\}$.

则 $A\cup B$ 的子集个数是 $2^3=8$.

故选：D.

【点睛】

本题考查了一元二次不等式的解法，并集运算，子集个数问题，属于基础题.

2、【答案】C

【解析】

因为 $M=\{x|\dfrac{x}{(x-1)^2}\geq 0\}=\{x|x\geq 0$ 且 $x\neq 1\}$，$N=[1,+\infty)$，

所以 $M\cap N=\{x|x>1\}$.

故选 C.

3、【答案】C

【解析】根据定义域排除 B，根据 $f(1)<0$ 排除 A，当 $x\in(0,\dfrac{1}{2})$ 时，$f(x)>0$，当 $x\in(\dfrac{1}{2},\dfrac{3}{2})$ 时，$f(x)<0$，排除 D 项，得到答案.

详解：由 $e^x-e^{-x}\neq 0$，解得 $x\neq 0$，所以函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，故排除 B 项.

因为 $f(-x)=\dfrac{\cos[\pi(-x)]}{e^{-x}-e^{-(-x)}}=\dfrac{\cos(\pi x)}{-(e^x-e^{-x})}=-f(x)$，所以函数 $f(x)$ 为奇函数，

又 $f(1)=\dfrac{\cos\pi}{e^1-e^{-1}}=\dfrac{-1}{e^1-e^{-1}}<0$，故排除 A 项.

设 $g(x)=e^x-e^{-x}$，显然该函数单调递增，故当 $x>0$ 时，$g(x)>g(0)=0$，

则当 $x\in(0,\dfrac{1}{2})$ 时，$y=\cos(\pi x)>0$，故 $f(x)>0$，当 $x\in(\dfrac{1}{2},\dfrac{3}{2})$ 时，$y=\cos(\pi x)<0$，故 $f(x)<0$，所以排除 D 项.

故选：C.

【点睛】

本题考查了图像的识别，意在考查学生的计算能力和综合应用能力.

4、【答案】C

【解析】利用指数函数、对数函数的图象及性质估算 a,b,c 的大小，然后对 a,b,c 的大小进行排序.

详解：因为 $a=\log_4 9>\log_4 4=1$；$0<b=3^{-11}<3^{-1}=\dfrac{1}{3}$；$c=\left(\dfrac{8}{27}\right)^{\frac{1}{3}}=\dfrac{2}{3}$；

所以 $a>c>b$.

故选：C.

【点睛】

本题考查对数式与指数式的大小比较，其核心是指数函数、对数函数图象性质的应用，解答时一般选择中间桥梁“0”和“1”等去比较，较易.

5、【答案】C

【解析】首先根据题意得到 $a=\dfrac{2^{|x|}}{2^{|x|}+1}$，令 $t=2^{|x|}$，$f(t)=1-\dfrac{1}{t+1}$，再根据 $f(t)$ 的范围结合选项即可得到答案.

详解：由题知：$a\left(2^{|x|}+1\right)=2^{|x|}$，$a=\dfrac{2^{|x|}}{2^{|x|}+1}$，

令$t=2^{|x|}\geq 1$，$f\left(t\right)=\dfrac{t}{t+1}=1-\dfrac{1}{t+1}$，

因为$t\geq 1$，$0<\dfrac{1}{t+1}\leq\dfrac{1}{2}$，所以$f\left(t\right)\in\left[\dfrac{1}{2},1\right)$.

故关于 x 的方程$a\left(2^{|x|}+1\right)=2^{|x|}$有实数解”的一个充分不必要条件是$\dfrac{2}{3}<a<1$.

故选：C

【点睛】

本题主要考查函数的零点问题，同时考查了转化思想，属于中档题.

6、【答案】D

【解析】利用已知条件得到底面圆的半径，再利用求圆心角的公式代入即可得出结果.

详解：设半径为r，

由母线长为l，母线与轴的夹角为$30°$，

得：$\sin 30°=\dfrac{r}{l}\Rightarrow r=\dfrac{1}{2}l$，

则底面圆的周长为：$2\pi r=\pi l$，

所以该圆锥侧面展开图的圆心角大小为：$|\alpha|=\dfrac{\pi l}{l}=\pi$.

故选：D.

【点睛】

本题主要考查了弧长公式.属于较易题.

7、【答案】D

【解析】先将$y=\cos\left(2x-\dfrac{\pi}{6}\right)=\sin\left[2\left(x+\dfrac{\pi}{12}\right)+\dfrac{\pi}{6}\right]$，进而由平移变换规律可得解.

详解：函数$y=\cos\left(2x-\dfrac{\pi}{6}\right)=\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{\pi}{2}\right)=\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{\pi}{6}\right)=\sin\left[2\left(x+\dfrac{\pi}{12}\right)+\dfrac{\pi}{6}\right]$，

所以只需将$y=\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{6}\right)$向左平移$\dfrac{\pi}{12}$可得$y=\cos\left(2x-\dfrac{\pi}{6}\right)$.

故选：D.

【点睛】

本题主要考查了三角函数的图像平移变换，解题的关键是将函数名统一，需要利用诱导公式，属于中档题.

8、【答案】D

【解析】利用二倍角的余弦公式求出$\cos\angle D$，然后利用余弦定理可求得边AC的长.

详解：$\because\angle D=2\angle B$，$\therefore\cos\angle D=\cos 2\angle B=2\cos^2\angle B-1=2\times\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)^2-1=-\dfrac{1}{3}$，

由余弦定理得$AC^2=AD^2+CD^2-2AD\cdot CD\cdot\cos\angle D=1^2+3^2-2\times 1\times 3\times\left(-\dfrac{1}{3}\right)=12$，

因此，$AC=2\sqrt{3}$.

故选：D.

【点睛】

本题考查利用余弦定理求三角形的边长，同时也考查了二倍角余弦公式的应用，考查计算能力，属于基础题.

9、【答案】C

【解析】由三角形内角和与两角和与差的正弦公式求得 $\sin B$，再由同角三角函数关系求得 $\cos B$，进而由余弦定理求得 a，最后由三角形面积公式求得答案.

详解：因为 $2\sin(B+C)\cos C=1-2\cos A\sin C$，即 $2\sin A\cos C=1-2\cos A\sin C$，即 $2\sin A\cos C+2\sin(A+C)=1$，则 $2\sin(A+C)=1$，所以 $2\sin B=1$，故 $\sin B=\dfrac{1}{2}$.

因为 $b<c$，所以 $B<C$，所以角 B 为锐角，故 $\cos B=\sqrt{1-\sin^2 B}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，

由余弦定理可知，$1^2=a^2+(\sqrt{3})^2-2\times a\times\sqrt{3}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，解得 $a=1$ 或 $a=2$.

当 $a=1$ 时，$\triangle ABC$ 的面积 $S=\dfrac{1}{2}ac\sin B=\dfrac{1}{2}\times 1\times\sqrt{3}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{4}$；

当 $a=2$ 时，$\triangle ABC$ 的面积 $S=\dfrac{1}{2}ac\sin B=\dfrac{1}{2}\times 2\times\sqrt{3}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

故选：C

【点睛】

本题考查由余弦定理解三角形，并利用任意三角形面积公式求面积，属于简单题.

10、【答案】D

【解析】应用二倍角公式和两角和的正弦公式化函数为一个角的一个三角函数形式，然后利用正弦函数性质判断各选项.

详解：由已知 $f(x)=\dfrac{1+\cos 2x}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x=\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{6}\right)+\dfrac{1}{2}$，

$f(x)$ 的最大值是 $\dfrac{3}{2}$，A 正确.

$x_0\in\left(\dfrac{5\pi}{6},\dfrac{4\pi}{3}\right)$ 时，$2x+\dfrac{\pi}{6}\in\left(\dfrac{11\pi}{6},\dfrac{17\pi}{6}\right)$，$\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{6}\right)>-\dfrac{1}{2}$，$f(x)=0$ 无解，B 正确；

$x\in[\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{2}]$ 时，$2x+\dfrac{\pi}{6}\in\left[\dfrac{\pi}{2},\dfrac{7\pi}{6}\right]$，$f(x)$ 递减，C 正确；

$f\left(\dfrac{5\pi}{12}\right)=\sin\pi+\dfrac{1}{2}=0+\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}$，$f(x)$ 图象关于点 $\left(\dfrac{5\pi}{12},\dfrac{1}{2}\right)$ 对称，D 错.

故选：D.

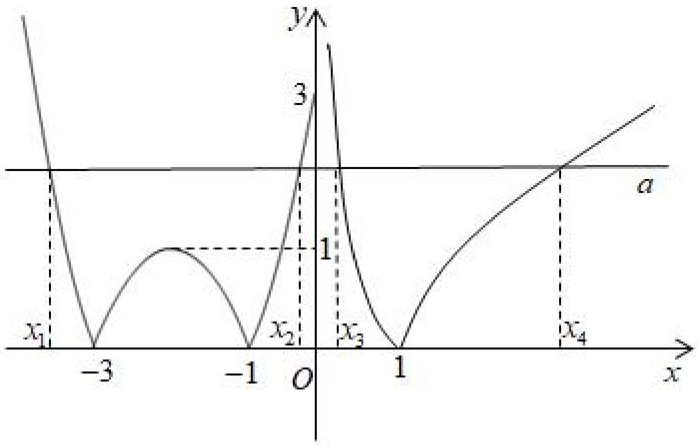
【点睛】

本题考查三角函数的图象与性质，解题可利用三角函数恒等变换把函数化为一个角的一个三角函数形式，然后利用正弦函数性质求解.

11、【答案】D

【解析】根据题意，作出函数 $\left|f(x)\right|$ 的图象，利用方程 $\left|f(x)\right|=a$ 恰好有 4 个实根，可得 $1<a\le 3$，设 $x_1<x_2<x_3<x_4$，进而可得 $x_1x_2=3-a$，可得 $x_3\cdot x_4=1$，故可得结论.

详解：由题意，函数 $f(x)=\begin{cases}\ln x, x>0\\ x^2+4x+3, x\le 0\end{cases}$，则函数 $\left|f(x)\right|$ 的图象为:



由图象可知，方程 $\left|f\left(x\right)\right|=a$ 恰好有 4 个实根，则实数 $1<a \le 3$，

设 $x_1<x_2<x_3<x_4$，则 x_1,x_2 为方程 $x^2+4x+3=a$ 的两个实根，故 $x_1\cdot x_2=3-a$，

由 $-\ln x_3=\ln x_4$，即 $\ln x_3+\ln x_4=0$，即 $x_3\cdot x_4=1$，

所以，$x_1\cdot x_2\cdot x_3\cdot x_4=3-a$，而 $0\le 3-a<2$，

故 $x_1\cdot x_2\cdot x_3\cdot x_4$ 的取值范围为 $\left[0,2\right)$.

故选：D.

【点睛】

本题考查函数与方程的应用，考查数形结合以及转化思想的应用，考查计算能力，分析能力，属于基础题.

12、【答案】A

【解析】由题知 $f(2-x)=f(2+x)$，进而可得 $f\left(x\right)$ 关于直线 $x=2$ 对称，设 $g(x)=f(x+2)=4^x+4^{-x}-3\cos x$，通过导数及函数奇偶性求得函数的单调性，进而求得函数 $f\left(x\right)$ 的单调性，通过单调性比较大小即可.

详解：解：依题意，$f(x)=4^{x-2}+\dfrac{16}{4^x}-3\cos(x-2)=4^{x-2}+4^{2-x}-3\cos(x-2)$，

因为 $f(2-x)=f(2+x)$，故函数 $f\left(x\right)$ 关于直线 $x=2$ 对称，

令 $g(x)=f(x+2)=4^x+4^{-x}-3\cos x$，且 $g\left(-x\right)=g\left(x\right)$，$g\left(x\right)$ 为偶函数.

$g'(x)=\ln 4\cdot\left(4^x-4^{-x}\right)+3\sin x$，

可知：当 $x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ 时，$\ln 4\cdot\left(4^x-4^{-x}\right)\quad 0$，$\sin x\ge 0$ 故 $g'\left(x\right)>0$；

当 $x\in\left(\dfrac{\pi}{2},+\infty\right)$ 时，$\ln 4\cdot\left(4^x-4^{-x}\right)>4^{\frac{\pi}{2}}-4^{-\frac{\pi}{2}}>4-\dfrac{1}{4}>3$，故 $g'\left(x\right)>0$，

故函数 $g(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递增，又因为 $g\left(x\right)$ 为偶函数，故在 $(-\infty,0]$ 上单调递减，

所以函数 $f\left(x\right)$ 在 $(-\infty,2]$ 上单调递减，在 $[2,+\infty)$ 上单调递增，

因为 $\log_2 18>4,\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-\left(\frac{1}{2}\right)}=\sqrt{2},4-\log_3\dfrac{3}{2}=4+\log_3\dfrac{2}{3}\in(3,4)$，

$\therefore \log_2 18 > 4-\log_3 \frac{3}{2} > \left(\frac{1}{2}\right)^{-\left(\frac{1}{2}\right)} + 1 > 2,$

，

$\therefore f\left(\log_2 18\right) > f\left(4-\log_3 \frac{3}{2}\right) > f\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{-\left(\frac{1}{2}\right)} + 1\right]$,

即 $f\left(\log_2 18\right) > f\left(\log_3 \frac{3}{2}\right) > f\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{-\left(\frac{1}{2}\right)} + 1\right]$.

故选：A.

【点睛】

本题主要考查利用导数和奇偶性求函数的单调性，利用单调性比较大小，考查学生的计算能力和逻辑推理能力，属于难题.

二、填空题

13、【答案】6

【解析】以 $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}$ 为基底，表示出向量 $\overrightarrow{AD}$，利用数量积计算即可求值.

详解：由题意，$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}$,

因为 $CD=2DB$，

所以 $\overrightarrow{BD}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$，

所以 $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$，

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}\cdot(\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC})=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}^2+\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\frac{2}{3}\times 3^2+0=6$，

故答案为：6

【点睛】

本题主要考查了向量的线性运算，向量的数量积的运算性质，属于中档题.

14、【答案】$\left[2\sqrt{3},+\infty\right)$

【解析】$y=a\sin x+\cos 2x$ 在 $\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}\right)$ 上单调递增等价于 $y'=a\cos x-2\sin 2x\geq 0$ 在 $\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}\right)$ 上恒成立，参变分离求最值，即可得到结果.

详解：由题意 $y=a\sin x+\cos 2x$ 在 $\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}\right)$ 上单调递增，

可知：$y'=a\cos x-2\sin 2x\geq 0$ 在 $\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}\right)$ 上恒成立，

即 $a\geq 4\sin x$ 在 $\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}\right)$ 上恒成立，

又 $4\sin x\leq 2\sqrt{3}$，

$\therefore a\geq 2\sqrt{3}$，

故答案为：$\left[2\sqrt{3},+\infty\right)$

【点睛】

本题主要考查函数单调性和导数之间的关系，将函数单调递增转化为 $f'(x)\quad 0$ 恒成立是解决本题的关键.

15、【答案】$(-\frac{\pi}{6},0)\cup(\frac{\pi}{6},\pi)$

【解析】详解：设 $g(x)=\frac{f(x)}{\sin x}$，∴ $g'(x)=\frac{f'(x)\sin x-f(x)\cos x}{\sin^2 x}$，

∵ $f(x)$ 是定义在 $(-\pi,0)\cup(0,\pi)$ 上的奇函数，∴ $g(-x)=\frac{f(-x)}{\sin(-x)}=\frac{f(x)}{\sin x}=g(x)$，

∴ $g(x)$ 是定义在 $(-\pi,0)\cup(0,\pi)$ 上的偶函数，

∵当 $0<x<\pi$ 时，$f'(x)\sin x-f(x)\cos x<0$，

∴ $g'(x)<0$，∴ $g(x)$ 在 $(0,\pi)$ 上单调递减，$g(x)$ 在 $(-\pi,0)$ 上单调递增，

∵ $f(\frac{\pi}{2})=0$，∴ $g(\frac{\pi}{2})=\frac{f(\frac{\pi}{2})}{\sin\frac{\pi}{2}}=0$，

∵ $f(x)<2f(\frac{\pi}{6})\sin x$，

∴ $g(x)<g(\frac{\pi}{6})$，$x\in(0,\pi)$，或 $g(x)>g(-\frac{\pi}{6})$，$x\in(-\pi,0)$，

∴ $\frac{\pi}{6}<x<\pi$ 或 $-\frac{\pi}{6}<x<0$.

∴关于 x 的不等式 $f(x)<2f(\frac{\pi}{6})\sin x$ 的解集为 $(-\frac{\pi}{6},0)\cup(\frac{\pi}{6},\pi)$.

考点：利用导数研究函数的单调性.

16、【答案】$(0,\frac{3\sqrt{2}}{2})$

【解析】由向量的数量积的运算结合条件 $\overrightarrow{AB}^2-4\overrightarrow{AC}^2=4\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{AB}$ 可得出 $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BH}=4\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CH}$，进而得到 $|\overrightarrow{BH}|=2|\overrightarrow{CH}|$，从而有 $\tan C=2\tan B$，在三角形中可得 $\frac{\sin A}{\sin B\sin C}=\frac{3}{2\tan B}$，再根据三角形 ABC 为锐角三角形，得出 $\tan B$ 的范围，得出答案.

详解：由 $\overrightarrow{AB}^2-4\overrightarrow{AC}^2=4\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{AB}$

得 $\overrightarrow{AB}^2-\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{AB}=4\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{CA}+4\overrightarrow{AC}^2$，$\overrightarrow{AB}\cdot\left(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AH}\right)=4\overrightarrow{CA}\cdot\left(\overrightarrow{AH}-\overrightarrow{AC}\right)$

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{HB}=4\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CH}$，即 $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BH}=4\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CH}$

所以 $|\overrightarrow{BH}|\cdot|\overrightarrow{BA}|\cdot\cos B=4|\overrightarrow{CH}|\cdot|\overrightarrow{CA}|\cdot\cos C$，即 $|\overrightarrow{BH}|^2=4|\overrightarrow{CH}|^2$

所以 $|\overrightarrow{BH}|=2|\overrightarrow{CH}|$，又 BC=3，所以 $|\overrightarrow{BH}|=2,|\overrightarrow{CH}|=1$

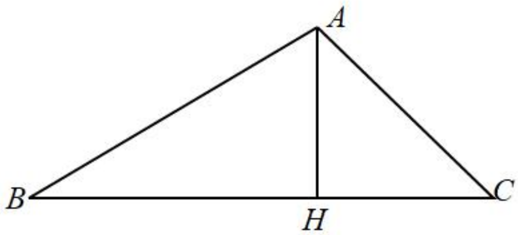
所以 $\tan B=\frac{|AH|}{2},\tan C=\frac{|AH|}{1}=|AH|$，则 $\tan C=2\tan B$

$$\frac{\sin A}{\sin B\sin C}=\frac{\sin\left(B+C\right)}{\sin B\sin C}=\frac{\sin B\cos C+\sin C\cos B}{\sin B\sin C}=\frac{\tan B+\tan C}{\tan B\tan C}=\frac{3\tan B}{2\tan^2 B}=\frac{3}{2\tan B}$$

又在锐角三角形 ABC 中，$\tan A=-\tan\left(B+C\right)=-\dfrac{\tan B+\tan C}{1-\tan B\tan C}=-\dfrac{3\tan B}{1-2\tan^{2}B}>0$

解得 $\tan B>\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，从而 $\dfrac{\sin A}{\sin B\sin C}=\dfrac{3}{2\tan B}\in\left(0,\dfrac{3\sqrt{2}}{2}\right)$

故答案为：$(0,\dfrac{3\sqrt{2}}{2})$



【点睛】
本题考查向量的数量积的运算和投影的意义，考查三角恒等变换，属于中档题.
三、解答题
17、【答案】(1) $2<x<3$；(2) $1<a\le 2$.
试题分析：（1）若 $p\wedge q$ 为真，则命题 p 和命题 q 均为真命题，分别解两个不等式求交集即可；
（2）$\neg p$ 是 $\neg q$ 的充分不必要条件等价于 p 是 q 的必要不充分条件，列出满足题意的不等式求解即可.
详解：（1）对于 p：由 $x^{2}-4ax+3a^{2}<0$，得：$\left(x-3a\right)\left(x-a\right)<0$，
又 $a>0$，所以 $a<x<3a$，
当 $a=1$ 时，$1<x<3$，
对于 q：$\dfrac{x-3}{x-2}\le 0$ 等价于 $\begin{cases}x-2\ne 0\\ \left(x-2\right)\left(x-3\right)\le 0\end{cases}$，解得：$2<x\le 3$，
若 $p\wedge q$ 为真，则 p 真且 q 真，所以实数 x 的取值范围是：$2<x<3$；
（2）因为 $\neg p$ 是 $\neg q$ 的充分不必要条件，所以 $\neg p\Rightarrow\neg q$，且 $\neg p\not\Leftarrow\neg q$，即 $q\Rightarrow p$，
$A=\left\{x\mid a<x<3a\right\}$，$B=\left\{x\mid 2<x\le 3\right\}$，则 B ？ A，即 $0<a\le 2$，且 $3a>3$，
所以实数 a 的取值范围是 $1<a\le 2$.
【点睛】
本题主要考查命题及其关系，考查理解能力和转化思想，属于常考题.
【解析】
18、【答案】（1）$k=3$；（2）$[\dfrac{9}{16},+\infty)$.
试题分析：（1）将点的坐标代入函数的解析式，建立方程求得 k 的值，即可求解；
（2）求出 $g\left(x\right)$ 得图象，结合不等式恒成立，利用参数分离法转化为一元二次函数进行求解，即可求解.
详解：（1）由 $A(2k,2)$ 是函数 $y=f\left(x\right)$ 图象上的点，则 $2=\log_{3}(3k)$，
可得 $3k=9$，得 $k=3$.
（2）由函数 $f\left(x\right)=\log_{3}(x+3)$，
将函数 $y=f\left(x\right)$ 的图象向右平移 3 个单位得到函数 $y=g\left(x\right)$ 的图象，
即 $g\left(x\right)=\log_{3}(x-3+3)=\log_{3}x$，
若关于 x 的不等式 $2f(x+\sqrt{m}-3)-g\left(x\right)\ge 1$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上恒成立，
即 $2\log_{3}(x+\sqrt{m})-\log_{3}x\ge 1$，即 $2\log_{3}(x+\sqrt{m})\ge\log_{3}x+1=\log_{3}(3x)$，

即$2\log_3(x+\sqrt{m})\ge\frac{1}{2}\log_3(3x)=\log_3\sqrt{3x}$在区间$(0,+\infty)$上恒成立，

即$x+\sqrt{m}\ge\sqrt{3x}$，得$\sqrt{m}\ge\sqrt{3x}-x$，

设$\sqrt{3x}=t$，则$3x=t^2$，即$x=\frac{1}{3}t^2,(t>0)$，

则$y=\sqrt{3x}-x=t-\frac{1}{3}t^2$，

因为$t>0$，所以当$t=\frac{3}{2}$时，函数求得最大值$\frac{3}{4}$，即$\sqrt{m}\ge\frac{3}{4}$，所以$m\ge\frac{9}{16}$，

即实数t的取值范围是$[\frac{9}{16},+\infty)$.

【点睛】

本题主要考查了对数函数的图象和性质，以及恒成立问题的求解，其中解答中利用分离参数转化为一元二次函数，结合一元二次函数的最值进行求解是解答的关键，着重考查推理与运算能力.

【解析】

19、【答案】(1) $f(x)=\begin{cases}-x^3-x^2+4x,0<x\le1\\-2x^2+4x,1<x<2\end{cases}$；(2) $x=\frac{\sqrt{13}-1}{3}$.

试题分析：(1) 由题意先根据已知条件建立平面直角坐标系，设出抛物线标准方程，然后将C点坐标给出来，代入方程求出p的值，然后分两段表示出$f(x)$的表达式.

(2) 按照分段函数求最值的方法，在两段上分别求出其最大值，然后取其中的较大者，注意前一段利用导数研究单调性后求最值. 后一段是二次函数的最值问题.

详解：解：以O为坐标原点，OC所在的直线是x轴，建立平面直角坐标系xOy

由于OC=4，$BC=2\sqrt{2}$，$\angle OCB=\frac{\pi}{4}$

所以点C的坐标为（4，0）点B的坐标为（2，2）

$BA=\sqrt{2}$，点A的坐标为（1，1）

由于抛物线的顶点为点O对称轴是直线OC，可设抛物线方程为y^2=mx，

将点A的坐标代入得m=100，所以抛物线方程为y^2=x，

直线CB的方程是y=4-x，直线AB的方程是y=x

(1) 因为设DG=x，所以当0<x<1时，点G的坐标为(x^2,x)，点F的坐标为$(4-x,x)$

所以矩形DEFG的面积S=$x(4-x-x^2)=-x^3-x^2+4x$；

当1<x<2时G的坐标为(x,x)

所以矩形DEFG的面积S=$x(4-x-x)=-2x^2+4x$

所以矩形DEFG的面积S=$f(x)=\begin{cases}-x^3-x^2+4x,0<x\le1\\-2x^2+4x,1<x<2\end{cases}$

(2) 当0<x<1时，$f'(x)=-3x^2-2x+4$

令$f'(x)=-3x^2-2x+4=0$得$x=\frac{\sqrt{13}-1}{3}<1$

所以，当$0<x<\frac{\sqrt{13}-1}{3}$时$f'(x)>0$；当$\frac{\sqrt{13}-1}{3}<x<1$时，$f'(x)<0$

所以，当$x=\frac{\sqrt{13}-1}{3}$时，矩形DEFG的面积取得最大值；

当1<x<2时，$f(x)=-2x^2+4x=-2(x-1)^2+2$

所以，函数f(x)在区间（1，2）单调递减

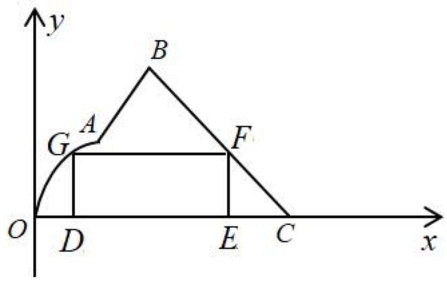
当$x=1$时，矩形DEFG的面积取得最大值

又 $f(\frac{\sqrt{13}-1}{3})>f(1)$

综上，当 $x=\frac{\sqrt{13}-1}{3}$ 时，矩形 DEFG 的面积取得最大值

答（1）矩形 DEFG 的面积 S= $f(x)=\begin{cases}-x^3-x^2+4x,0<x\le 1\\-2x^2+4x,1<x<2\end{cases}$；

（2）当 $x=\frac{\sqrt{13}-1}{3}$ 时，矩形 DEFG 的面积取得最大值.



【点睛】
本题考查了分段函数的应用性问题，要注意抓住题目中的等量关系列出函数表达式，然后分两段研究其最值．属于中档题.
【解析】

20、【答案】（1）$[\frac{\sqrt{3}-2}{2},\frac{\sqrt{3}+2}{2}]$；（2）$\frac{5}{6}\le\omega<\frac{4}{3}$.

试题分析：（1）利用二倍角公式和两角和的正弦公式化函数为一个角的一个三角函数形式，然后由正弦函数性质求得值域；

（2）解方程 $f(x)=\frac{\sqrt{3}}{2}$，由第二小的正数解 $\in[0,\pi]$，第三小的正数解大于 π 可得出 ω 的范围.

详解：（1）

$$f(x)=\cos\omega x(\sin\omega x+\sqrt{3}\cos\omega x)=\sin\omega x\cos\omega x+\sqrt{3}\cos^2\omega x$$

$$=\frac{1}{2}\sin 2\omega x+\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\cos 2\omega x+1\right)=\sin(2\omega x+\frac{\pi}{3})+\frac{\sqrt{3}}{2},$$

因为 $\sin(2\omega x+\frac{\pi}{3})\in[-1,1]$，所以 $f(x)$ 的值域是 $[\frac{\sqrt{3}-2}{2},\frac{\sqrt{3}+2}{2}]$.

（2）$f(x)=\sin(2\omega x+\frac{\pi}{3})+\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$\sin(2\omega x+\frac{\pi}{3})=0$，$2\omega x+\frac{\pi}{3}=k\pi$，显然 $x\ne 0$，

$x=\frac{k\pi-\frac{\pi}{3}}{2\omega}$，$k\in Z$，

因为方程在 $[0,\pi]$ 上只有两个解，又 $\omega>0$，所以 $\begin{cases}\frac{2\pi-\frac{\pi}{3}}{2\omega}\le\pi\\\frac{3\pi-\frac{\pi}{3}}{2\omega}>\pi\end{cases}$，解得 $\frac{5}{6}\le\omega<\frac{4}{3}$.

【点睛】
本题考查求正弦型函数的值域，考查二倍角公式和两角和的正弦公式，考查三角方程的解，解题关键是由三角函数恒等变换化函数为 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)+k$ 形式，然后利用正弦函数性质求解.
【解析】

21、【答案】（1）$\dfrac{\pi}{4}$；（2）$\left(-1,1\right)$.

试题分析：（1）根据诱导公式和正弦函数的单调性可得 A,B,C 的关系，从而可求 B 的值.

（2）利用（1）的结果和正弦定理、两角差的正弦公式把 $\dfrac{a\cos C-c\cos A}{b}$ 化为 $\sqrt{2}\sin\left(2A-\dfrac{3\pi}{4}\right)$，求出 A 的范围后根据正弦函数的性质可求该式的取值范围.

详解：（1）由 $\sin\left(A-B\right)=\cos C$，得 $\sin\left(A-B\right)=\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-C\right)$.

$\because \triangle ABC$ 是锐角三角形，

故 $A-B$，$\dfrac{\pi}{2}-C$ 均在区间 $\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$ 内，

又函数 $y=\sin x$ 在区间 $\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$ 上单调递增，

$\therefore A-B=\dfrac{\pi}{2}-C$，即 $A-B+C=\dfrac{\pi}{2}$，①

又 $A+B+C=\pi$，②

由②-①，得 $B=\dfrac{\pi}{4}$.

（2）由（1）知 $B=\dfrac{\pi}{4}$，$\therefore A+C=\dfrac{3\pi}{4}$，即 $C=\dfrac{3\pi}{4}-A$.

$$\therefore \frac{a\cos C-c\cos A}{b}=\frac{\sin A\cos C-\cos A\sin C}{\sin B}=\frac{\sin\left(A-C\right)}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=\sqrt{2}\sin\left(2A-\frac{3\pi}{4}\right).$$

$\because \triangle ABC$ 是锐角三角形，$\therefore \dfrac{\pi}{4}<A<\dfrac{\pi}{2}$，$\therefore -\dfrac{\pi}{4}<2A-\dfrac{3\pi}{4}<\dfrac{\pi}{4}$，

$\therefore -\dfrac{\sqrt{2}}{2}<\sin\left(2A-\dfrac{3\pi}{4}\right)<\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，

$\therefore -1<\dfrac{a\cos C-c\cos A}{b}<1$.

故 $\dfrac{a\cos C-\cos A}{b}$ 的取值范围为 $\left(-1,1\right)$.

【点睛】

本题考查诱导公式、两角和的正弦公式、正弦型函数的性质，利用正弦定理进行边角关系转换时注意目标代数式是关于边的齐次式或关于内角的正弦的齐次式，本题属于中档题.

【解析】

22、【答案】试题分析：（1）首先利用导数求出 $f(x)$ 的最小值为 $f(\mathrm{e}^{a-1})=1-\mathrm{e}^{a-1}$，然后分 $a<1$、$a=1$、$a>1$ 三种情况讨论即可；

（2）由（1）知：当 $a=1$ 时，$f(x)\geq 0$，即 $\ln x\geq 1-\dfrac{1}{x}$，可得 $a_{n+1}\geq\dfrac{2a_n}{a_n+1}$，然后可得 $\dfrac{1}{a_n}-1\leq\dfrac{1}{2^n}$，再由等比数列的前 n 项和公式，即可证明.

详解：（1）$f(x)$ 的定义域为 $\left\{x\mid x>0\right\}$，令 $f'(x)=\ln x+1-a=0$，则 $x=e^{a-1}$.

当 $0<x<e^{a-1}$ 时 $f'(x)<0$；当 $x>e^{a-1}$ 时，$f'(x)>0$，

$\therefore$ $f(x)$ 在 $(0,e^{a-1})$ 单调递减，在 $(e^{a-1},+\infty)$ 单调递增，

$\therefore$ $f(x)$ 的最小值为 $f(\mathrm{e}^{a-1})=1-\mathrm{e}^{a-1}$.

当$a<1$时，$1-e^{a-1}>0$，此时$f(x)$无零点.
当$a=1$时，$1-\mathrm{e}^{a-1}=0$，此时$f(x)$只有一个零点
当$a>1$时，$1-\mathrm{e}^{a-1}<0$，$f(\mathrm{e}^{a})=1>0$，又$\mathrm{e}^{a}>\mathrm{e}^{a-1}$，
$\therefore$ $f(x)$在$(e^{a-1},+\infty)$上有且只有一个零点.
$f(\mathrm{e}^{-a})=1-2a\mathrm{e}^{-a}=\dfrac{e^{a}-2a}{e^{a}}$，令$h(a)=e^{a}-2a$，
$h'(a)=\mathrm{e}^{a}-2$，$\because$ $a>1$，$\therefore$ $h'(a)>0$，
$\therefore$ $h(a)>h(1)=e-2>0$，$\therefore$ $2a<\mathrm{e}^{a}$，$\therefore$ $f(\mathrm{e}^{-a})>0$，
所以$f(x)$在$(0,e^{a-1})$上有且只有一个零点.
综上：
当$a<1$时，函数无零点；
当$a=1$时，函数有且只有一个零点；
当$a>1$时，函数有两个零点.
（2）由（1）知：当$a=1$时，$f(x)\ge 0$，$\therefore$ $\ln x\ge 1-\dfrac{1}{x}$，

$$\therefore\ a_{n+1}=\ln\frac{a_n+1}{2}+1\ge 2-\frac{2}{a_n+1}=\frac{2a_n}{a_n+1},$$

$$\therefore\ \frac{1}{a_{n+1}}\le\frac{a_n+1}{2a_n}=\frac{1}{2a_n}+\frac{1}{2},$$

$$\therefore\ \frac{1}{a_{n+1}}-1\le\frac{1}{2}(\frac{1}{a_n}-1),$$

$$\therefore\ \frac{1}{a_n}-1\le\frac{1}{2}(\frac{1}{a_{n-1}}-1)\le\frac{1}{2^2}(\frac{1}{a_{n-2}}-1)\le\cdots\le\frac{1}{2^{n-1}}(\frac{1}{a_1}-1)=\frac{1}{2^n},$$

$$\therefore\ \frac{1}{a_n}\le\frac{1}{2^n}+1$$

$$\therefore\ \frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}\le n+\frac{\frac{1}{2}\left[1-(\frac{1}{2})^n\right]}{1-\frac{1}{2}}=n+1-(\frac{1}{2})^n<n+1.$$

【点睛】
本题考查的是利用导数研究函数的零点和证明不等式，考查了分类讨论的思想，属于较难题.
【解析】
四、多项选择题