5-指数与指数函数

1.【答案】B

【解析】 $y=2^x-2^{-x}$是定义域为 R 的单调递增函数，且是奇函数. 而 $y=\sin x$不是单调递增函数，不符合题意；$y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$是非奇非偶函数，不符合题意；

$y=\log_2 x$的定义域是(0，+∞)，不符合题意；

$y=x^3$是定义域为 R 的单调递增函数，且是奇函数符合题意.

2.【答案】C

【解析】 (1) $y=(a-1)2^x-\frac{a}{2}=a\left(2^x-\frac{1}{2}\right)-2^x$，令 $2^x-\frac{1}{2}=0$，得 $x=-1$，故函数 $y=(a-1)2^x-\frac{a}{2}$恒过定点$\left(-1，-\frac{1}{2}\right)$.

3.【答案】A

【解析】 $f(x)$过定点 $A(1，1)$，将点 $A(1，1)$代入四个选项，$y=\sqrt{1-x}$的图象不过点 $A(1，1)$.

4.【答案】A

【解析】 由于函数 $y=a^x$的图象过定点(0,1)，当 $x=1$ 时，$f(x)=4+2=6$，故函数 $f(x)=4+2a^{x-1}$的图象恒过定点 $P(1,6)$.

5.【答案】D

【解析】 令 $x-x^2\geqslant 0$，得 $0\leqslant x\leqslant 1$，所以函数 $f(x)$的定义域为[0,1]，因为 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^t$是减函数，所以函数 $f(x)$的增区间就是函数 $y=-x^2+x$ 在[0,1]上的减区间$\left[\frac{1}{2}，1\right]$，故选 D.

6.【答案】B

【解析】 函数 $f(x)=e^x-\frac{1}{e^x}$的定义域为 R，

$\because f(-x)=e^{-x}-\frac{1}{e^{-x}}=\frac{1}{e^x}-e^x=-f(x)$，$\therefore f(x)$是奇函数，那么不等式 $f(2x-1)+f(-x-1)>0$ 等价于 $f(2x-1)>-f(-x-1)=f(1+x)$，易证 $f(x)$是 R 上的单调递增函数，$\therefore 2x-1>x+1$，解得 $x>2$，$\therefore$不等式 $f(2x-1)+f(-x-1)>0$ 的解集为(2，+∞).

7.【答案】D

【解析】　设原有荒漠化土地面积为 b，经过 x 年后荒漠化面积为 z，则 $z=b(1+10.4\%)^{x}$，

故 $y=\frac{z}{b}=(1+10.4\%)^{x}$，其是底数大于 1 的指数函数.其图象应为选项 D.

8.【答案】D

【解析】　原不等式变形为 $m^{2}-m<\left(\frac{1}{2}\right)^{x}$，

又 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{x}$ 在$(-\infty，-1]$上是减函数，知 $\left(\frac{1}{2}\right)^{x}\geqslant\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}=2$.

故原不等式恒成立等价于 $m^{2}-m<2$，解得 $-1<m<2$.

9.【答案】$\frac{1}{a}$

【解析】　原式 $=\dfrac{a^{-\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{2}}\cdot a^{-\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{1}{6}}b^{\frac{5}{6}}}$

$=a^{-\frac{1}{3}-\frac{1}{2}-\frac{1}{6}}\cdot b^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{5}{6}}=\frac{1}{a}$.

10.【答案】①④

【解析】：设 $g(x)=e^{x}f(x)$，对于①，$g(x)=e^{x}\cdot 2^{-x}$，

则 $g'(x)=(e^{x}\cdot 2^{-x})'=e^{x}\cdot 2^{-x}(1-\ln 2)>0$，

所以函数 $g(x)$ 在$(-\infty，+\infty)$上为增函数，故①符合要求；

对于②，$g(x)=e^{x}\cdot 3^{-x}$，

则 $g'(x)=(e^{x}\cdot 3^{-x})'=e^{x}\cdot 3^{-x}(1-\ln 3)<0$，

所以函数 $g(x)$ 在$(-\infty，+\infty)$上为减函数，故②不符合要求；

对于③，$g(x)=e^{x}\cdot x^{3}$，

则 $g'(x)=(e^{x}\cdot x^{3})'=e^{x}\cdot(x^{3}+3x^{2})$，

显然函数 $g(x)$ 在$(-\infty，+\infty)$上不单调，故③不符合要求；

对于④，$g(x)=e^{x}\cdot(x^{2}+2)$，

则 $g'(x)=[e^{x}\cdot(x^{2}+2)]'=e^{x}\cdot(x^{2}+2x+2)=e^{x}\cdot[(x+1)^{2}+1]>0$，

所以函数 $g(x)$ 在$(-\infty，+\infty)$上为增函数，故④符合要求.

综上，具有 M 性质的函数的序号为①④.

11.【答案】$\{x|x>4$ 或 $x<0\}$

【解析】　∵$f(x)$ 为偶函数，

当 $x<0$ 时，$-x>0$，则 $f(x)=f(-x)=2^{-x}-4$.

∴$f(x)=\begin{cases}2^{x}-4, & x\geqslant 0,\\ 2^{-x}-4, & x<0,\end{cases}$

当 $f(x-2)>0$ 时，有$\begin{cases}x-2\geqslant 0,\\2^{x-2}-4>0\end{cases}$ 或$\begin{cases}x-2<0,\\2^{-x+2}-4>0,\end{cases}$

解得 $x>4$ 或 $x<0$.

∴不等式的解集为$\{x|x>4$ 或 $x<0\}$.

12.【解析】 (1)因为函数 $f(x)$是奇函数，且 $f(x)$的定义域为R；所以 $f(0)=\frac{1+a}{1+1}=0$，所以 $a=-1$.

(2)由(1)知 $f(x)=\frac{3^x-1}{3^x+1}=1-\frac{2}{3^x+1}$，函数 $f(x)$在定义域R上单调递增.

证明：设 $x_1<x_2\in R$，

则 $f(x_1)-f(x_2)=\frac{2(3^{x_1}-3^{x_2})}{(3^{x_1}+1)(3^{x_2}+1)}$.

因为 $x_1<x_2$，所以 $3^{x_1}<3^{x_2}$，所以 $3^{x_1}-3^{x_2}<0$，

所以 $f(x_1)<f(x_2)$，所以函数 $f(x)$在定义域R上单调递增.

13.【解析】 因为 $f(x)=\frac{2^x}{2^x+ax}=\frac{1}{1+\frac{ax}{2^x}}$，且其图象经过点 P，Q，

则 $f(p)=\frac{1}{1+\frac{ap}{2^p}}=\frac{6}{5}$，即$\frac{ap}{2^p}=-\frac{1}{6}$，①

$f(q)=\frac{1}{1+\frac{aq}{2^q}}=-\frac{1}{5}$，即$\frac{aq}{2^q}=-6$，②

①×②得$\frac{a^2pq}{2^{p+q}}=1$，则 $2^{p+q}=a^2pq=36pq$，

所以 $a^2=36$，解得 $a=\pm 6$，因为 $a>0$，所以 $a=6$.

14.【解析】 (1)当 $x<0$ 时，$f(x)=0$，故 $f(x)=\frac{3}{2}$无解；

当 $x\geqslant 0$ 时，$f(x)=2^x-\frac{1}{2^x}$，

由 $2^x-\frac{1}{2^x}=\frac{3}{2}$，得 $2\cdot 2^{2x}-3\cdot 2^x-2=0$，

将上式看成关于 2^x的一元二次方程，

解得 $2^x=2$ 或 $2^x=-\frac{1}{2}$，

因为 $2^x>0$，所以 $2^x=2$，所以 $x=1$.

(2)当 $t\in[1,2]$时，$2^t\left(2^{2t}-\frac{1}{2^{2t}}\right)+m\left(2^t-\frac{1}{2^t}\right)\geqslant 0$，

即 $m(2^{2t}-1)\geqslant-(2^{4t}-1)$，因为 $2^{2t}-1>0$，

所以 $m\geqslant-(2^{2t}+1)$，

因为 $t\in[1,2]$，所以 $-(2^{2t}+1)\in[-17,-5]$，

故实数 m 的取值范围是 $[-5,+\infty)$.