课时训练(10)答案

导数与函数的单调性

A组　基础达标

一、选择题

1．函数 $y=\frac{1}{2}x^2-\ln x$ 的单调递减区间为(　　)

A．$(-1,1)$　　　　B．$(0,1)$

C．$(1,+\infty)$　　　　D．$(0,+\infty)$

B　[$y=\frac{1}{2}x^2-\ln x$，$y'=x-\frac{1}{x}=\frac{x^2-1}{x}$

$=\frac{(x-1)(x+1)}{x}(x>0)$.

令 $y'<0$，得 $0<x<1$，∴单调递减区间为 $(0,1)$．]

2．已知定义在 **R** 上的函数 $f(x)$，其导函数 $f'(x)$的大致图象如图 2-11-3 所示，则下列叙述正确的是(　　)

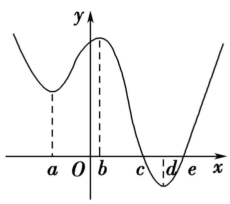

图 2-11-3

A．$f(b)>f(c)>f(d)$

B．$f(b)>f(a)>f(e)$

C．$f(c)>f(b)>f(a)$

D．$f(c)>f(e)>f(d)$

C　[依题意得，当 $x\in(-\infty,c)$时，$f'(x)>0$，因此，函数 $f(x)$在$(-\infty,c)$上是增函数，由 $a<b<c$，所以 $f(c)>f(b)>f(a)$．因此 C 正确．]

3．若函数 $f(x)=2x^3-3mx^2+6x$ 在区间$(2,+\infty)$上为增函数，则实数 m 的取值范围为(　　)

A．$(-\infty,2)$　　　　B．$(-\infty,2]$

C. $\left(-\infty, \frac{5}{2}\right)$　　　　D. $\left(-\infty, \frac{5}{2}\right]$

D　[∵$f'(x)=6x^2-6mx+6$,

当 $x\in(2, +\infty)$时，$f'(x)\geqslant 0$ 恒成立，

即 $x^2-mx+1\geqslant 0$ 恒成立，∴$m\leqslant x+\frac{1}{x}$恒成立.

令 $g(x)=x+\frac{1}{x}$，$g'(x)=1-\frac{1}{x^2}$,

∴当 $x>2$ 时，$g'(x)>0$，即 $g(x)$在$(2, +\infty)$上单调递增，

∴$m\leqslant 2+\frac{1}{2}=\frac{5}{2}$，故选 D.]

4．若函数 $e^xf(x)$(e＝2.718 28…是自然对数的底数)在 $f(x)$的定义域上单调递增，则称函数 $f(x)$具有 M 性质．下列函数中具有 M 性质的是(　　)

A．$f(x)=2^{-x}$　　　　B．$f(x)=x^2$

C．$f(x)=3^{-x}$　　　　D．$f(x)=\cos x$

A　[若 $f(x)$具有性质 M，则$[e^xf(x)]'=e^x[f(x)+f'(x)]>0$ 在 $f(x)$的定义域上恒成立，即 $f(x)+f'(x)>0$ 在 $f(x)$的定义域上恒成立.

对于选项 A，$f(x)+f'(x)=2^{-x}-2^{-x}\ln 2=2^{-x}(1-\ln 2)>0$，符合题意.

经验证，选项 B，C，D 均不符合题意.

故选 A．]

5．函数 $f(x)$的定义域为 $\mathbf{R}$，$f(-1)=2$，对任意 $x\in\mathbf{R}$，$f'(x)>2$，则 $f(x)>2x+4$ 的解集为(　　)

A．$(-1,1)$　　　　B．$(-1, +\infty)$

C．$(-\infty, -1)$　　　　D．$(-\infty, +\infty)$

B　[由 $f(x)>2x+4$，得 $f(x)-2x-4>0$，设 $F(x)=f(x)-2x-4$，则 $F'(x)=f'(x)-2$，因为 $f'(x)>2$，所以 $F'(x)>0$ 在 $\mathbf{R}$ 上恒成立，所以 $F(x)$在 $\mathbf{R}$ 上单调递增，而 $F(-1)=f(-1)-2\times(-1)-4=2+2-4=0$，故不等式 $f(x)-2x-4>0$ 等价于 $F(x)>F(-1)$，所以 $x>-1$，故选 B.]

二、填空题

6．函数 $f(x)=\frac{\ln x}{x}$的单调递增区间是________.

$(0,\mathrm{e})$ [由 $f'(x)=\left(\frac{\ln x}{x}\right)'=\frac{1-\ln x}{x^2}>0(x>0)$，

可得 $\begin{cases}1-\ln x>0,\\x>0,\end{cases}$ 解得 $x\in(0,\mathrm{e})$．]

7．若函数 $y=ax+\sin x$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增，则 a 的最小值为________．

1 [函数 $y=ax+\sin x$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增等价于 $y'=a+\cos x\geqslant 0$ 在 R 上恒成立，即 $a\geqslant-\cos x$ 在 $\mathbf{R}$ 上恒成立，因为 $-1\leqslant-\cos x\leqslant 1$，所以 $a\geqslant 1$，即 a 的最小值为 1.]

8．已知函数 $f(x)=x^3-2x+\mathrm{e}^x-\frac{1}{\mathrm{e}^x}$，其中 e 是自然对数的底数．若 $f(a-1)+f(2a^2)\leqslant 0$，则实数 a 的取值范围是________．

$\left[-1,\frac{1}{2}\right]$ [因为 $f(-x)=(-x)^3-2(-x)+\mathrm{e}^{-x}-\frac{1}{\mathrm{e}^{-x}}$

$=-x^3+2x-\mathrm{e}^x+\frac{1}{\mathrm{e}^x}=-f(x)$，

所以 $f(x)=x^3-2x+\mathrm{e}^x-\frac{1}{\mathrm{e}^x}$ 是奇函数．

因为 $f(a-1)+f(2a^2)\leqslant 0$，

所以 $f(2a^2)\leqslant-f(a-1)$，即 $f(2a^2)\leqslant f(1-a)$．

因为 $f'(x)=3x^2-2+\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}\geqslant 3x^2-2+2\sqrt{\mathrm{e}^x\cdot\mathrm{e}^{-x}}=3x^2\geqslant 0$，

所以 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增，

所以 $2a^2\leqslant 1-a$，即 $2a^2+a-1\leqslant 0$，

所以 $-1\leqslant a\leqslant\frac{1}{2}$.]

三、解答题

9．已知函数 $f(x)=\frac{\ln x+k}{\mathrm{e}^x}$（$k$ 为常数，e 是自然对数的底数），曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线与 x 轴平行．

(1)求 k 的值；

(2)求 $f(x)$ 的单调区间.

[解]　(1)由题意得 $f'(x)=\dfrac{\frac{1}{x}-\ln x-k}{e^x}$，

又 $f'(1)=\dfrac{1-k}{e}=0$，故 $k=1$.　　5 分

(2)由(1)知，$f'(x)=\dfrac{\frac{1}{x}-\ln x-1}{e^x}$.

设 $h(x)=\dfrac{1}{x}-\ln x-1(x>0)$，

则 $h'(x)=-\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x}<0$，

即 $h(x)$在$(0,+\infty)$上是减函数.　　8 分

由 $h(1)=0$ 知，当 $0<x<1$ 时，$h(x)>0$，从而 $f'(x)>0$；

当 $x>1$ 时，$h(x)<0$，从而 $f'(x)<0$.

综上可知，$f(x)$的单调递增区间是$(0,1)$，

单调递减区间是$(1,+\infty)$.　　12 分

10．已知函数 $f(x)=ax^3+x^2(a\in\mathbf{R})$在 $x=-\dfrac{4}{3}$处取得极值.

(1)确定 a 的值；

(2)若 $g(x)=f(x)e^x$，讨论 $g(x)$的单调性.

[解]　(1)对 $f(x)$求导得 $f'(x)=3ax^2+2x$，　　2 分

因为 $f(x)$在 $x=-\dfrac{4}{3}$处取得极值，

所以 $f'\left(-\dfrac{4}{3}\right)=0$，

即 $3a\cdot\dfrac{16}{9}+2\cdot\left(-\dfrac{4}{3}\right)=\dfrac{16a}{3}-\dfrac{8}{3}=0$，

解得 $a=\dfrac{1}{2}$.　　5 分

(2)由(1)得 $g(x)=\left(\dfrac{1}{2}x^3+x^2\right)e^x$，

故 $g'(x)=\left(\dfrac{3}{2}x^2+2x\right)e^x+\left(\dfrac{1}{2}x^3+x^2\right)e^x$

$=\left(\frac{1}{2}x^3+\frac{5}{2}x^2+2x\right)e^x$

$=\frac{1}{2}x(x+1)(x+4)e^x$. 8 分

令 $g'(x)=0$，解得 $x=0$ 或 $x=-1$ 或 $x=-4$.

当 $x<-4$ 时，$g'(x)<0$，故 $g(x)$为减函数；

当 $-4<x<-1$ 时，$g'(x)>0$，故 $g(x)$为增函数；

当 $-1<x<0$ 时，$g'(x)<0$，故 $g(x)$为减函数；

当 $x>0$ 时，$g'(x)>0$，故 $g(x)$为增函数.

综上知，$g(x)$在$(-\infty，-4)$和$(-1,0)$内为减函数，在$(-4，-1)$和$(0，+\infty)$内为增函数. 12 分

B组　能力提升

1．设函数 $f(x)=\frac{1}{2}x^2-9\ln x$ 在区间$[a-1，a+1]$上单调递减，则实数 a 的取值范围是(　　)

A．$1<a\leqslant 2$　　B．$a\geqslant 4$

C．$a\leqslant 2$　　D．$0<a\leqslant 3$

A　[易知函数 $f(x)$的定义域为$(0，+\infty)$，$f'(x)=x-\frac{9}{x}$，由 $f'(x)=x-\frac{9}{x}<0$，解得 $0<x<3$.因为函数 $f(x)=\frac{1}{2}x^2-9\ln x$ 在区间$[a-1，a+1]$上单调递减，所以$\begin{cases}a-1>0,\\a+1\leqslant 3,\end{cases}$ 解得 $1<a\leqslant 2$，选 A]

2．设 $f'(x)$是奇函数 $f(x)(x\in\mathbf{R})$的导函数，$f(-2)=0$，当 $x>0$ 时，$xf'(x)-f(x)>0$，则使得 $f(x)>0$ 成立的 x 的取值范围是________.

$(-2,0)\cup(2，+\infty)$　[令 $g(x)=\frac{f(x)}{x}$，则 $g'(x)=\frac{xf'(x)-f(x)}{x^2}>0$，$x\in(0，+\infty)$，所以函数 $g(x)$在$(0，+\infty)$上单调递增．又 $g(-x)=\frac{f(-x)}{-x}=\frac{-f(x)}{-x}=\frac{f(x)}{x}=g(x)$，则 $g(x)$是偶函数，$g(-2)=0=g(2)$，则 $f(x)=xg(x)>0\Leftrightarrow\begin{cases}x>0,\\g(x)>0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x<0,\\g(x)<0,\end{cases}$ 解得 $x>2$ 或 $-2<x<0$，故不等式 $f(x)>0$ 的解集为$(-2,0)\cup(2,$

$+\infty)$．]

3．已知函数$f(x)=\ln x$，$g(x)=\frac{1}{2}ax+b$.

(1)若$f(x)$与$g(x)$在$x=1$处相切，求$g(x)$的表达式；

(2)若$\varphi(x)=\frac{m(x-1)}{x+1}-f(x)$在$[1，+\infty)$上是减函数，求实数$m$的取值范围.

[解]　(1)由已知得$f'(x)=\frac{1}{x}$，$\therefore f'(1)=1=\frac{1}{2}a$，$a=2$.

又$\because g(1)=0=\frac{1}{2}a+b$，$\therefore b=-1$，$\therefore g(x)=x-1$.　　5分

(2)$\because \varphi(x)=\frac{m(x-1)}{x+1}-f(x)=\frac{m(x-1)}{x+1}-\ln x$在$[1，+\infty)$上是减函数，

$\therefore \varphi'(x)=\frac{-x^2+(2m-2)x-1}{x(x+1)^2}\leqslant 0$在$[1，+\infty)$上恒成立，

即$x^2-(2m-2)x+1\geqslant 0$在$[1，+\infty)$上恒成立，

则$2m-2\leqslant x+\frac{1}{x}$，$x\in[1，+\infty)$.　　9分

$\because x+\frac{1}{x}\in[2，+\infty)$，$\therefore 2m-2\leqslant 2$，$m\leqslant 2$.

故实数m的取值范围是$(-\infty，2]$.　　12分