

# 2022 届高三第二次联考 · 数学试卷

## 参 考 答 案

1. B  $\because B = \{x | x < 3\}, \therefore A \cap B = \{1, 2\}.$

2. A  $\because z = \frac{2i(1-i)}{(1+i)(1-i)} = 1+i, \bar{z} = 1-i, \therefore \bar{z}$  的虚部为  $-1.$

3. D  $\because a \parallel b, \therefore 4 \times (-1) = 3m, m = -\frac{4}{3}.$

4. C 由题设得,  $b^2 + c^2 - a^2 = -\frac{6}{7}bc$ , 则  $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = -\frac{3}{7}.$

5. B 由题意, 若  $\sin(\alpha-1) > 0$ , 则  $\alpha > 1 > \frac{\pi}{4}$ ,  $\tan \alpha > 1$ ; 若  $\tan \alpha > 1$ , 则  $\alpha - 1 > 0$  不一定成立, 是必要不充分条件.

6. A 因为函数  $f(x)$  的定义域为  $\mathbf{R}$ ,  $f(-x) = f(x)$ , 所以函数  $f(x)$  是偶函数, 排除 C、D 项, 又  $f(0) = 2 > 0$ , 排除 B 项.

7. C  $f(x) = 2(\frac{1}{2} \cos 2x - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 2x) = 2\cos(2x + \frac{\pi}{3}), f(x + \frac{\pi}{3}) = 2\cos(2x + \pi) = -2\cos 2x.$

8. A  $\ln \sqrt[3]{31.9 \times 1.31^2} = \frac{1}{3}(\ln 3.19 + 2\ln 1.31 + \ln 2 + \ln 5) \approx 4.0025 \div 3 \approx 1.3342$ , 所以计算结果约为 3.797.

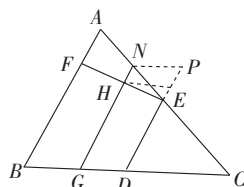
9. D 由题设得  $6\sin^2 \alpha = 5\cos \alpha$ , 即  $6\cos^2 \alpha + 5\cos \alpha - 6 = 0$ , 解得  $\cos \alpha = \frac{2}{3}$  或  $\cos \alpha = -\frac{3}{2}$  (舍去),  $\cos 2\alpha = 2\cos^2 \alpha - 1 = -\frac{1}{9}.$

10. D  $2 = a + 2b \geq 2\sqrt{2ab}, 2ab \leq 1$ , 当且仅当  $a = 2b = 1$  时取等号, A 项不正确;  $\frac{1}{2}(\frac{1}{a} + \frac{1}{b})(a + 2b) = \frac{1}{2}(3 + \frac{2b}{a} + \frac{a}{b}) \geq \frac{3}{2} + \sqrt{2}$ , B 项不正确;  $a + 2b = 2, a = 2 - 2b > 0$ , 则  $0 < b < 1, a + b = 2 - b > 1$ , C 项不正确;  $a^2 + 4b^2 \geq \frac{(a + 2b)^2}{2} = 2$ , 当且仅当  $a = 2b = 1$  时取等号, D 项正确.

11. B 设  $g(x) = e^{x-2} - 1$  在  $(-\infty, +\infty)$  上单调递增, 且  $g(2) = 0$ , 则当  $x > 2$  时,  $g(x) > 0$ , 则函数  $f(x)$  在  $(2, +\infty)$  上没有零点. 设  $h(x) = -x^2 + mx - \frac{1}{2}$ , 函数  $h(x)$  图象的对称轴为  $x = \frac{m}{2}$ , 若  $m \leq 0$ , 不合题意, 则  $m > 0$ , 且函数  $h(x)$  在  $(0, 2)$  上有两个零点, 所

$$\text{以} \begin{cases} \frac{m}{2} < 2 \\ m^2 - 2 > 0 \\ h(2) < 0 \end{cases}, \text{解得} \sqrt{2} < m < \frac{9}{4}.$$

12. C 如图,分别取  $BD, AE$  的中点  $G, N$ , 连  $GN$  交  $EF$  于  $H$ ,  $D, E$



分别是  $CB, CA$  的中点, 则  $DE \parallel GN \parallel AB$ ,  $\overrightarrow{DM} = \frac{1}{2} \overrightarrow{DB} + k \overrightarrow{DE}$ ,

由题意及平行四边形法则知  $M$  在线段  $HN$  (不含端点) 上.  $\because GN$

$$= \frac{3}{4} AB, HN = \frac{1}{2} AF = \frac{1}{8} AB, \therefore GH = \frac{5}{8} AB, \overrightarrow{DH} = \frac{1}{2} \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{GH}$$

$$= \frac{1}{2} \overrightarrow{DB} + \frac{5}{8} \overrightarrow{BA} = \frac{1}{2} \overrightarrow{DB} + \frac{5}{4} \overrightarrow{DE},$$

$$\text{同理, } \overrightarrow{DN} = \frac{1}{2} \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{GN} = \frac{1}{2} \overrightarrow{DB} + \frac{3}{4} \overrightarrow{BA} = \frac{1}{2} \overrightarrow{DB} + \frac{3}{2} \overrightarrow{DE}, \therefore \frac{5}{4} < k < \frac{3}{2}.$$

13.  $\frac{\sqrt{2}}{4} \quad f(20) = \sqrt{3} \sin \frac{10\pi}{3} = -\frac{3}{2}, f(-\frac{3}{2}) = \frac{\sqrt{2}}{4}.$

14. 5 设  $z = a + bi, a, b \in \mathbf{R}$ , 则  $i(a + 1 + bi) = -b + (a + 1)i = -3 - 3i, b = 3, a = -4, |z| = 5.$

15.  $(-4, 4)$  由题意易知  $-x^2 + ax < x^2 + 2$  恒成立, 即  $2x^2 - ax + 2 > 0$  恒成立, 所以  $\Delta = a^2 - 16 < 0$ , 得  $-4 < a < 4.$

16. ②③ 函数  $f(x)$  的定义域为  $D = \{x | x \neq k\pi, k \in \mathbf{Z}\}$ , 定义域关于原点对称,

且对  $\forall x \in D, f(-x) = f(x), f(-x) \neq -f(x)$ , 函数  $f(x)$  是偶函数, 图象关于  $y$  轴对称, ①不正确, ②正确;

$f(2\pi - x) = \cos(2\pi - x) + \left| \frac{1}{\sin(2\pi - x)} \right| = \cos x + \left| \frac{1}{\sin x} \right| = f(x)$ , 则直线  $x = \pi$  是函数  $f(x)$  图象的一条对称轴, 又函数  $f(x)$  图象关于  $y$  轴对称,

且  $f(x + 2\pi) = \cos(x + 2\pi) + \left| \frac{1}{\sin(x + 2\pi)} \right| = \cos x + \left| \frac{1}{\sin x} \right| = f(x)$ ,  $2\pi$  是函数的一个周期, 所以③正确; 当  $x \in (0, \pi), f(x) = \cos x + \frac{1}{\sin x}, f(\frac{2\pi}{3}) = \frac{2}{\sqrt{3}} - \frac{1}{2},$

因为  $\frac{2}{\sqrt{3}} < \frac{3}{2}$ , 所以  $f(\frac{2\pi}{3}) < 1$ , ④不正确.

17. 解: (1) 由题意,  $\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 = \frac{1}{2}, \mathbf{a} + \mathbf{b} = 5\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2,$

$(\mathbf{a} + \mathbf{b})^2 = 25\mathbf{e}_1^2 - 10\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_2^2 = 21, |\mathbf{a} + \mathbf{b}| = \sqrt{21}.$  ..... 5 分

(2) 若  $\theta = 90^\circ$ , 设  $\mathbf{e}_1 = (1, 0), \mathbf{e}_2 = (0, 1)$ , 则  $\mathbf{a} = (2, -3), \mathbf{b} = (3, 2),$

$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 2 \times 3 + (-3) \times 2 = 0$ , 所以向量  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  的夹角为  $90^\circ.$  ..... 10 分

18. 解: (1) 由正弦定理, 得  $\sin A \sin B = \sqrt{3} \sin B \cos A,$

因为  $\sin B \neq 0$ , 所以  $\tan A = \sqrt{3}$ , 又  $A \in (0, \pi)$ , 则  $A = \frac{\pi}{3}.$  ..... 6 分

(2) 由余弦定理, 得  $19 = b^2 + 4 - 2b$ , 即  $b^2 - 2b - 15 = 0,$

解得  $b = 5$  或  $b = -3$  (舍). ..... 12 分

19. 解: (1)  $f(x) = \frac{4^x}{2^x - 1} - 1 = \frac{(2^x)^2 - 1 + 1}{2^x - 1} - 1 = 2^x - 1 + \frac{1}{2^x - 1} + 1, x > 0, 2^x - 1 > 0,$

则  $f(x) \geq 2\sqrt{(2^x - 1) \cdot \frac{1}{2^x - 1}} + 1 = 3$ , 当且仅当  $x = 1$  时取“=”, 所以  $f(x)$  的最小值是 3. .... 5 分

(2) 当  $x \in [1, 2]$  时, 设  $t = 2^x - 1 \in [1, 3]$ , 函数  $y = t + \frac{1}{t} + 1$  在  $[1, 3]$  上单调递增,

则函数  $f(x)$  在  $[1, 2]$  上单调递增,  $f(x) \in [3, \frac{13}{3}]$ ,

由题意, 当  $x \in [1, 2]$  时,  $f(x)_{\max} \leq g(x)_{\max}$ ,

当  $a \leq 0$  时, 显然不合题意, 当  $a > 0$  时, 函数  $g(x)$  在  $[1, 2]$  上单调递增,

所以  $g(2) \geq \frac{13}{3}$ , 解得  $a \geq \frac{7}{6}$ . .... 12 分

20. 解: (1) 如图, 设上底面中心为  $Q$ , 则  $AQ = AB = \frac{1}{2}$ ,

因为  $\angle APQ = \theta \in (0, \frac{\pi}{2})$ , 所以  $AP = \frac{1}{2\sin \theta}, PQ = \frac{1}{2\tan \theta}$ ,

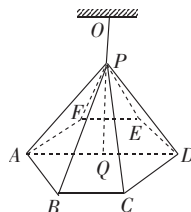
因为  $OQ = \frac{3}{2}$ , 所以  $\tan \theta \geq \frac{1}{3}$ ,

$y = 6AP + OP = \frac{3}{\sin \theta} + \frac{3}{2} - \frac{1}{2\tan \theta} = \frac{6 - \cos \theta}{2\sin \theta} + \frac{3}{2}$ . .... 6 分

(2) 设  $m = \frac{6 - \cos \theta}{\sin \theta}, m\sin \theta + \cos \theta = \sqrt{1 + m^2} \sin(\theta + \varphi) = 6$ , 其中  $\tan \varphi = \frac{1}{m}$ ,

存在  $\theta$  使得  $\sin(\theta + \varphi) = 1$ , 则  $\sqrt{1 + m^2} \geq 6, m \geq \sqrt{35}, y \geq \frac{\sqrt{35} + 3}{2}$ , 即所需绳长的最小

值为  $\frac{\sqrt{35} + 3}{2}$ . .... 12 分



21. 解: 由正弦定理得  $a^2 = b^2 + bc$ , 由余弦定理得  $a^2 = b^2 + bc = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$ , 即  $b = c - 2b\cos A$ ,

由正弦定理得  $\sin B = \sin C - 2\sin B\cos A = \sin(A + B) - 2\sin B\cos A = \sin(A - B)$ ,

则  $A - B = B$  或  $A - B + B = \pi$  (舍), 所以  $A = 2B$ . .... 4 分

(1) 因为  $AD$  平分角  $A, A = 2B$ , 则  $BD = AD = 2\sqrt{3}$ , 在  $\triangle ABD$  中,  $\cos B = \frac{(2\sqrt{3})^2 + 6^2 - (2\sqrt{3})^2}{2 \cdot 2\sqrt{3} \cdot 6} = \frac{\sqrt{3}}{2}, B \in (0, \pi), B = \frac{\pi}{6}, A = \frac{\pi}{3}$ ,

又因为  $A + B + C = \pi$ , 所以  $C = \frac{\pi}{2}$ . .... 8 分

(2)  $\cos(B - A) = \cos B = \frac{\sqrt{6}}{3}, \sin B = \frac{\sqrt{3}}{3}$ , 因为  $\frac{\sqrt{3}}{3} < \frac{\sqrt{2}}{2}$ , 所以  $B < \frac{\pi}{4}$ , 则  $A < \frac{\pi}{2}$ ,

$\sin A = \sin 2B = \frac{2\sqrt{2}}{3}, \cos A = \frac{1}{3}, \sin C = \sin(A + B) = \frac{2\sqrt{2}}{3} \cdot \frac{\sqrt{6}}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{5\sqrt{3}}{9}$ ,

由正弦定理得  $a = \frac{c \sin A}{\sin C} = 3\sqrt{2}$ ,  $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}ac \sin B = \frac{15\sqrt{2}}{4}$ . ..... 12 分

22. 解: (1) 由题意得  $f'(x) = e^x - 2ax + 2$ ,  $f'(0) = 3$ ,

又因为  $f(0) = 2$ , 所以切线方程为  $y = 3x + 2$ . ..... 5 分

(2) 由题意, 当  $x \in [0, 2]$  时,  $ax^2 \leq e^x + 2x + 1$  恒成立,

当  $x = 0$  时, 显然成立, 当  $x \in (0, 2]$  时,  $a \leq \frac{e^x}{x^2} + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}$  恒成立,

设  $g(x) = \frac{e^x}{x^2} + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}$ ,  $g'(x) = \frac{e^x(x-2) - 2x - 2}{x^3}$ ,

设  $h(x) = e^x(x-2) - 2x - 2$ ,  $h'(x) = (x-1)e^x - 2$ ,

设  $\varphi(x) = (x-1)e^x - 2$ ,  $\varphi'(x) = xe^x$ , 当  $x \in (0, 2]$  时,  $\varphi'(x) > 0$ ,  $\varphi(x)$  在  $(0, 2]$  上递增,

$\varphi(1) < 0$ ,  $\varphi(2) > 0$ , 存在  $x_1 \in (1, 2)$ , 使得  $\varphi(x_1) = h'(x_1) = 0$ ,

即当  $0 < x < x_1$  时,  $h'(x_1) < 0$ , 当  $x_1 < x < 2$  时,  $h'(x_1) > 0$ ,

函数  $h(x)$  在  $(0, x_1)$  上递减, 在  $(x_1, 2)$  上递增,

$h(0) = -4 < 0$ ,  $h(2) = -6 < 0$ , 即当  $x \in (0, 2]$  时,  $h(x) < 0$  恒成立,

所以当  $x \in (0, 2]$  时,  $g'(x) < 0$  恒成立, 函数  $g(x)$  在  $(0, 2]$  上单调递减,

$g(2) = \frac{e^2 + 5}{4}$ , 所以  $a \leq \frac{e^2 + 5}{4}$ . ..... 12 分