

2022 届高三第二次联考 · 数学试卷

参 考 答 案

1. B $\because z = \frac{-5i(2+i)}{(2-i)(2+i)} = 1-2i, \therefore \bar{z} = 1+2i.$

2. C $\because A = \{0, 1, 2, 3, 4\}, B = \{x | x \leq 3\}, \therefore A \cap B = \{0, 1, 2, 3\}.$

3. D $\because |\vec{CA}| = 2, |\vec{CB}| = 4, \vec{CA} \cdot \vec{CB} = 4\sqrt{3}, \therefore \cos \angle ACB = \frac{\sqrt{3}}{2},$

$\because \angle ACB \in [0, \pi], \therefore \angle ACB = \frac{\pi}{6}.$

4. A 由三角形内角和定理得 $\angle ACB = 60^\circ$, 由正弦定理得, $AB = \frac{AC \sin 60^\circ}{\sin 45^\circ} = \frac{3\sqrt{6}}{2}.$

5. B 若复数 $a-b+\frac{a+b}{i}$ 是纯虚数, 则 $a=b \neq 0$;

若 $a=b=0$, 则 $a-b+\frac{a+b}{i}$ 是实数, 所以是必要不充分条件.

6. C $f(x) = 2(\frac{1}{2} \cos 2x - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 2x) = 2\cos(2x + \frac{\pi}{3}), f(x + \frac{\pi}{3}) = 2\cos(2x + \pi) = -2\cos 2x.$

7. A $\ln \sqrt[3]{31.9 \times 1.31^2} = \frac{1}{3}(\ln 3.19 + 2\ln 1.31 + \ln 2 + \ln 5) \approx 4.0025 \div 3 \approx 1.3342$, 所以计算结果约为 3.797.

8. D 原不等式等价于 $-x^2 - 1 < ax + \frac{1}{2} < x^2 + 1$ 恒成立,

即 $\begin{cases} x^2 - ax + \frac{1}{2} > 0 \\ x^2 + ax + \frac{3}{2} > 0 \end{cases}$ 恒成立, $\begin{cases} a^2 - 2 < 0 \\ a^2 - 6 < 0 \end{cases}$, 解得 $-\sqrt{2} < a < \sqrt{2}.$

9. D 由题设得, $6\sin^2 \alpha = 5\cos \alpha$, 即 $6\cos^2 \alpha + 5\cos \alpha - 6 = 0$,

解得 $\cos \alpha = \frac{2}{3}$ 或 $\cos \alpha = -\frac{3}{2}$ (舍), $\cos 2\alpha + \tan^2 \alpha = 2\cos^2 \alpha + \frac{1}{\cos^2 \alpha} - 2 = \frac{41}{36}.$

10. D $a^2 b^2 \leq (\frac{a^2 + b^2}{2})^2 = 4$, 当且仅当 $a^2 = b^2$ 时取等号.

$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = \frac{4}{a^2 b^2} \geq 1, \lg a^2 \cdot \lg b^2 \leq (\frac{\lg a^2 + \lg b^2}{2})^2 \leq (\lg 2)^2$, A, B 项不正确;

$2^a + 2^b \geq 2\sqrt{2^{a+b}}, \frac{|a| + |b|}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} = \sqrt{2}, (\frac{a+b}{2})_{\min} = -\sqrt{2}$, C 项不正确;

$a^2 b^2 \leq 4$, 即 $0 < |ab| \leq 2, ab \geq -2$, D 项正确.

11. B 设 $g(x) = e^{x-2} - 1$, 在 $(-\infty, +\infty)$ 上递增, 且 $g(2) = 0$, 则当 $x > 2$ 时, $g(x) > 0$,

则在 $(2, +\infty)$ 上, 函数 $f(x)$ 没有零点. 设 $h(x) = -x^2 + mx - \frac{1}{2}$, 函数 $h(x)$ 图象的对

称轴为 $x = \frac{m}{2}$, 若 $m \leq 0$, 当 $\Delta = m^2 - 2 > 0$, 即 $m < -\sqrt{2}$ 时, 函数 $h(x)$ 有两个负数零点,

符合题意; 若 $m > 0$, 且需符合题意时, 函数 $h(x)$ 在 $(0, 2)$ 上有两个零点,

$$\text{所以} \begin{cases} \frac{m}{2} < 2 \\ m^2 - 2 > 0 \\ h(2) < 0 \end{cases}, \text{解得} \sqrt{2} < m < \frac{9}{4}, \text{综上}, m \in (-\infty, -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, \frac{9}{4}).$$

12. A 函数 $f(x)$ 的定义域为 $D = \{x | x \neq k\pi, k \in \mathbf{Z}\}$, 定义域关于原点对称,

且对 $\forall x \in D, f(-x) = f(x)$, 函数 $f(x)$ 是偶函数, 图象关于 y 轴对称,

$$f(x+\pi) = \cos[2(x+\pi)] + \left| \frac{2}{\sin(x+\pi)} \right| = \cos 2x + \left| \frac{2}{\sin x} \right| = f(x), \text{最小正周期不是}$$

$$2\pi, \text{①不正确}; f(\pi-x) = \cos[2(\pi-x)] + \left| \frac{2}{\sin(\pi-x)} \right| = \cos 2x + \left| \frac{2}{\sin x} \right| = f(x),$$

则直线 $x = \frac{\pi}{2}$ 是函数 $f(x)$ 图象的一条对称轴, 又函数 $f(x)$ 图象关于 y 轴对称, 周期

为 π , 则直线 $x = \frac{k\pi}{2} (k \in \mathbf{Z})$ 是函数 $f(x)$ 图象的对称轴, 所以②正确; 当 $x \in (0, \pi)$,

$$f(x) = \cos 2x + \frac{2}{\sin x}, f'(x) = -\frac{2\cos x(2\sin^3 x + 1)}{\sin^2 x}, \text{当 } 0 < x < \frac{\pi}{2} \text{ 时}, f'(x) < 0,$$

当 $\frac{\pi}{2} < x < \pi$ 时, $f'(x) > 0$, 函数 $f(x)$ 在 $(\frac{\pi}{2}, \pi)$ 上递增, 由周期性得, 函数 $f(x)$ 的单调

递增区间为 $(\frac{\pi}{2} + k\pi, \pi + k\pi), k \in \mathbf{Z}$, ③正确; 由③知 $f(x) \geq f(\frac{\pi}{2}) = 1$, 函数 $f(x)$ 的最小值为 1, ④不正确.

13. -3 因为 $f(-x) = -f(x)$, 所以函数 $f(x)$ 是奇函数, 所以 $f(-2^\alpha) = -f(2^\alpha) = -3$.

$$14. 5 \quad (1-ni)(1-i) = (1-n) - (1+n)i = m+2i, \text{得} \begin{cases} 1-n=m \\ -(1+n)=2 \end{cases}, \text{解得} \begin{cases} m=4 \\ n=-3 \end{cases}, \\ |m+ni| = 5.$$

15. 2 $2A = 3 - (-1) = 4$, 得 $A = 2, 2+b=3$, 得 $b=1$,

$$T = 2(\frac{7\pi}{3} - \frac{\pi}{3}) = 4\pi, \text{得 } \omega = \frac{1}{2}, f(\frac{\pi}{3}) = 3, \cos(\frac{\pi}{6} + \varphi) = 1, \varphi = 2k\pi - \frac{\pi}{6}, k \in \mathbf{Z},$$

$$|\varphi| < \frac{\pi}{2}, \text{则 } \varphi = -\frac{\pi}{6}, f(x) = 2\cos(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{6}) + 1,$$

$$f(-\frac{17\pi}{6}) + f(\frac{11\pi}{2}) = f(\frac{7\pi}{6}) + f(\frac{3\pi}{2}),$$

$$\text{易知点}(\frac{4\pi}{3}, 1) \text{是函数图象的一个对称中心, 所以 } f(\frac{3\pi}{2}) + f(\frac{7\pi}{6}) = 2.$$

16. $[\frac{5}{4}, \frac{3}{2}] \quad \frac{3}{4}$ 如图, 分别取 BD, AE 的中点 G, N , 连 GN 交 EF 于 H, D, E 分别是

CB, CA 的中点, 则 $DE \parallel GN \parallel AB, \overrightarrow{DM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DB} + k\overrightarrow{DE}$, 由题意及平行四边形法则知

$$M \text{ 在线段 } HN \text{ 上. } \because GN = \frac{3}{4}AB, HN = \frac{1}{2}AF = \frac{1}{8}AB, \therefore GH = \frac{5}{8}AB,$$

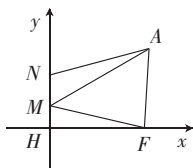
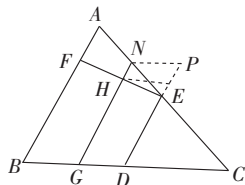
$$\overrightarrow{DH} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{GH} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DB} + \frac{5}{8}\overrightarrow{BA} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DB} + \frac{5}{4}\overrightarrow{DE},$$

$$\text{同理, } \overrightarrow{DN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{GN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DB} + \frac{3}{4}\overrightarrow{BA} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DB} + \frac{3}{2}\overrightarrow{DE}, \text{所以 } \frac{5}{4} \leq k \leq \frac{3}{2}.$$

若 $CB=CA=2\sqrt{5}$, $AB=4$, 易知四边形 $AFHN$ 是直角梯形, 且 $AF=FH=1$,

$HN=\frac{1}{2}$, 如图, 以 H 为原点建立平面直角坐标系, $F(1,0)$, $A(1,1)$, 设 $M(0,t)$,

$0 \leq t \leq \frac{1}{2}$, $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MF} = (1, 1-t) \cdot (1, -t) = t^2 - t + 1 = (t - \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4} \geq \frac{3}{4}$, 当 $t = \frac{1}{2}$ 时取等号.



17. 解: (1) 由正弦定理, 得 $\sin A \sin B = -\sqrt{3} \sin B \cos A$,

因为 $\sin B \neq 0$, 所以 $\tan A = -\sqrt{3}$, 又 $A \in (0, \pi)$, 则 $A = \frac{2\pi}{3}$ 5 分

(2) 由余弦定理, 得 $27 = b^2 + c^2 + bc = (b+c)^2 - bc$,

因为 $bc \leq \frac{(b+c)^2}{4}$, 所以 $27 \geq (b+c)^2 - \frac{(b+c)^2}{4} = \frac{3}{4}(b+c)^2$, $b+c \leq 6$,

当且仅当 $b=c=3$ 时取等号, $\triangle ABC$ 的周长的最大值为 $6+3\sqrt{3}$ 10 分

18. 解: (1) $\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) = \frac{1}{2}\mathbf{a} + \frac{1}{2}\mathbf{b}$,

$\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AE} = -\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = -\mathbf{a} + \frac{1}{2}\mathbf{b}$ 6 分

(2) 由题意知, $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 2 \times 4 \times \cos \frac{\pi}{3} = 4$,

$\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BE} = (\frac{1}{2}\mathbf{a} + \frac{1}{2}\mathbf{b}) \cdot (-\mathbf{a} + \frac{1}{2}\mathbf{b}) = -\frac{1}{2}\mathbf{a}^2 - \frac{1}{4}\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \frac{1}{4}\mathbf{b}^2 = -2 - 1 + 4 = 1$

..... 12 分

19. 解: (1) $f(x) = \frac{4^x}{2^x-1} - 2 = \frac{(2^x)^2-1+1}{2^x-1} - 2 = 2^x - 1 + \frac{1}{2^x-1}$,

$x > 0$, $2^x - 1 > 0$, 则 $f(x) \geq 2\sqrt{(2^x-1) \cdot \frac{1}{2^x-1}} = 2$, 当且仅当 $x=1$ 时取“=”,

所以 $f(x) \in [2, +\infty)$ 5 分

(2) 当 $x \in [1, 2]$ 时, 设 $t = 2^x - 1 \in [1, 3]$, 函数 $y = t + \frac{1}{t}$ 在 $[1, 3]$ 上单调递增,

则函数 $f(x)$ 在 $[1, 2]$ 上单调递增, $f(x) \in [2, \frac{10}{3}]$, 设 $x \in [1, 2]$ 时, 函数 $g(x)$ 的值域为

A . 由题意知 $[2, \frac{10}{3}] \subseteq A$. 函数 $g(x)$ 图象的对称轴为 $x = \frac{a}{2} > 0$,

当 $\frac{a}{2} \leq 1$, 即 $0 < a \leq 2$ 时, 函数 $g(x)$ 在 $[1, 2]$ 上递增, 则 $\begin{cases} g(1) \leq 2 \\ g(2) \geq \frac{10}{3} \end{cases}$, 解得 $0 < a \leq \frac{5}{6}$,

当 $a > 2$ 时, $g(1) = 2 - a < 0$ 且 $g(2) = 5 - 2a < 1$, 不合题意.

综上, $a \in (0, \frac{5}{6}]$ 12 分

20. 解: 由正弦定理得 $a^2 = b^2 + bc$, 由余弦定理得 $a^2 = b^2 + bc = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$,

即 $b = c - 2b \cos A$,

由正弦定理得 $\sin B = \sin C - 2 \sin B \cos A = \sin(A+B) - 2 \sin B \cos A = \sin(A-B)$,

则 $A-B=B$ 或 $A-B+B=\pi$ (舍), 所以 $A=2B$ 4 分

(1) 因为 AD 平分角 A , $A=2B$, 则 $BD=AD=2\sqrt{3}$, 在 $\triangle ABD$ 中, $\cos B =$

$$\frac{(2\sqrt{3})^2 + 6^2 - (2\sqrt{3})^2}{2 \cdot 2\sqrt{3} \cdot 6} = \frac{\sqrt{3}}{2}, B \in (0, \pi), B = \frac{\pi}{6}, A = \frac{\pi}{3},$$

又因为 $A+B+C=\pi$, 所以 $C=\frac{\pi}{2}$ 8 分

$$(2) \cos(B-A) = \cos B = \frac{\sqrt{6}}{3}, \sin B = \frac{\sqrt{3}}{3}, \text{ 因为 } \frac{\sqrt{3}}{3} < \frac{\sqrt{2}}{2}, \text{ 所以 } B < \frac{\pi}{4}, \text{ 则 } A < \frac{\pi}{2},$$

$$\sin A = \sin 2B = \frac{2\sqrt{2}}{3}, \cos A = \frac{1}{3}, \sin C = \sin(A+B) = \frac{2\sqrt{2}}{3} \cdot \frac{\sqrt{6}}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{5\sqrt{3}}{9},$$

$$\text{由正弦定理得 } a = \frac{c \sin A}{\sin C} = 3\sqrt{2}, S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} ac \sin B = \frac{15\sqrt{2}}{4}. \text{ 12 分}$$

21. 解: 由题意, $OA=50, OM=100$, 则 $MQ=100, AM=50\sqrt{3}, \angle BAC = \frac{\pi}{2}$,

$$\text{设 } \angle MAB = \theta, \angle NAC = \alpha = \frac{\pi}{2} - \theta.$$

$$(1) \text{ 设 } C, P \text{ 重合, } \tan \alpha = \frac{100}{50\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}, \tan \theta = \frac{1}{\tan \alpha} = \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{MB}{50\sqrt{3}}, \text{ 得 } MB=75,$$

$$\text{所以 } 75 < MB < 100, \frac{\sqrt{3}}{2} < \tan \theta < \frac{2}{\sqrt{3}}, MB = AM \cdot \tan \theta = 50\sqrt{3} \tan \theta,$$

$$NC = AN \cdot \tan \alpha = \frac{50\sqrt{3}}{\tan \theta}, MF = CP = 100 - NC = 100 - \frac{50\sqrt{3}}{\tan \theta},$$

$$BF = MB - MF = 50\sqrt{3} \left(\tan \theta + \frac{1}{\tan \theta} \right) - 100 \geq 100(\sqrt{3} - 1), \text{ 当 } \tan \theta = 1 \text{ (符合题意) 时}$$

取等号, $100(\sqrt{3} - 1) > 70$, 所以可以修建. 6 分

$$(2) AB = \frac{AM}{\cos \theta} = \frac{50\sqrt{3}}{\cos \theta}, AC = \frac{AN}{\cos \alpha} = \frac{50\sqrt{3}}{\sin \theta},$$

$$AB + AC = \frac{50\sqrt{3}}{\cos \theta} + \frac{50\sqrt{3}}{\sin \theta} = \frac{50\sqrt{3}(\sin \theta + \cos \theta)}{\sin \theta \cos \theta}.$$

$$\text{设 } t = \sin \theta + \cos \theta = \sqrt{2} \sin \left(\theta + \frac{\pi}{4} \right), \text{ 则 } t^2 = 1 + 2 \sin \theta \cos \theta, \text{ 即 } \sin \theta \cos \theta = \frac{t^2 - 1}{2}.$$

$$AB + AC = \frac{100\sqrt{3}t}{t^2 - 1} = \frac{100\sqrt{3}}{t - \frac{1}{t}}, \text{ 由 (1) 知 } \frac{\sqrt{3}}{2} < \tan \theta < \frac{2}{\sqrt{3}}, \text{ 而 } \frac{\sqrt{3}}{3} < \frac{\sqrt{3}}{2} < 1 < \frac{2}{\sqrt{3}} < \sqrt{3}, \text{ 所以}$$

$$\exists \theta, \text{ 使得 } \theta + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}, \text{ 且 } \frac{\pi}{4} < \theta + \frac{\pi}{4} < \frac{3\pi}{4}, \text{ 所以 } 1 < t \leq \sqrt{2}, 0 < t - \frac{1}{t} \leq \frac{\sqrt{2}}{2},$$

所以 $AB+AC=\frac{100\sqrt{3}}{t-\frac{1}{t}}\geq 100\sqrt{6}$, 当且仅当 $t=\sqrt{2}, \theta=\frac{\pi}{4}$ 时取等号.

由题意, $AB+AC=DE+DF$, 所以玻璃桥总长的最小值为 $200\sqrt{6}$ 米,

所以铺设好亲水玻璃桥, 最少需 $60\sqrt{6}$ 万元. 12 分

22. 解: (1) 因为 $f'(x)=e^x(\ln(x+1)+\frac{1}{x+1})+\frac{x\cdot e^{x-1}}{(x+1)^2}$, 所以 $f'(0)=1$, 又因为 $f(0)=$

$\frac{1}{e}$, 所以曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0, f(0))$ 处的切线方程为 $x-y+\frac{1}{e}=0$ 4 分

(2) 函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-1, +\infty)$,

$f(x)>\frac{4x+1}{3x+3}$ 等价于 $(x+1)\ln(x+1)>\frac{4x+1}{3e^x}-\frac{1}{e}$,

设 $g(x)=x-\frac{4x+1}{3e^x}+\frac{1}{e}(x>-1)$, $g'(x)=1-\frac{3-4x}{3e^x}=\frac{3e^x+4x-3}{3e^x}$,

设 $F(x)=3e^x+4x-3$, $F'(x)=3e^x+4>0$, 函数 $F(x)$ 是增函数, 且 $F(0)=0$,
所以当 $-1<x<0$ 时, $F(x)<0$, 即 $g'(x)<0$, 当 $x>0$ 时, $F(x)>0$, 即 $g'(x)>0$.

函数 $g(x)$ 在 $(-1, 0)$ 上递减, 在 $(0, +\infty)$ 上递增, 所以 $g(x)\geq g(0)=\frac{1}{e}-\frac{1}{3}>0$,

即当 $x>-1$ 时, $x>\frac{x}{e^x}+\frac{x+1}{3e^x}-\frac{1}{e}$ 恒成立.

设 $h(x)=(x+1)\ln(x+1)-x$, $h'(x)=\ln(x+1)$,

当 $-1<x<0$ 时, $h'(x)<0$, 当 $x>0$ 时, $h'(x)>0$,

函数 $h(x)$ 在 $(-1, 0)$ 上递减, 在 $(0, +\infty)$ 上递增,

所以 $h(x)\geq h(0)=0$, 即 $(x+1)\ln(x+1)\geq x$ 恒成立.

综上, 当 $x>-1$ 时, $(x+1)\ln(x+1)>\frac{x}{e^x}+\frac{x+1}{3e^x}-\frac{1}{e}$ 恒成立,

所以 $x>-1$ 时, $f(x)>\frac{4x+1}{3x+3}$ 12 分

(方法二: 证明 $f(x)+\frac{1}{x+1}>\frac{4}{3}$)