

2022 届高三第四次联考 · 数学试卷

参考答案

1. D $\because N = \{x | 0 < x < 4\}, \therefore M \cap N = \{1, 2\}.$

2. B $z = \frac{2+i}{i} = \frac{(2+i)i}{i^2} = \frac{2i+i^2}{-1} = 1-2i.$

3. A 设该圆锥的底面半径为 r , $\because \pi r^2 = 4\pi, \therefore r = 2,$

$\therefore$ 该圆锥的高为 $\sqrt{3^2 - 2^2} = \sqrt{5}.$

4. B $\left. \begin{array}{l} b \perp \beta \\ \alpha // \beta \end{array} \right\} \Rightarrow b \perp \alpha, \text{ 又 } a \subset \alpha, \therefore a \perp b, \text{ 显然, 反过来不正确,}$

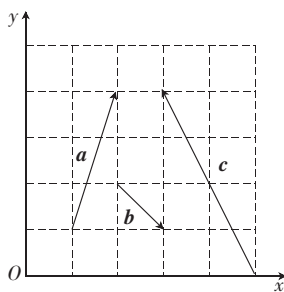
$\therefore$ “ $\alpha // \beta$ ”是“ $a \perp b$ ”的充分不必要条件.

5. D 将向量 a, b, c 放入如图所示的坐标系中, 每个小正方形的边长为 1,

则 $a = (1, 3), b = (1, -1), c = (-2, 4), \therefore a = xb + yc (x, y \in \mathbf{R}),$

$\therefore (1, 3) = x(1, -1) + y(-2, 4), \text{ 即 } \begin{cases} 1 = x - 2y \\ 3 = -x + 4y \end{cases}, \text{ 解得}$

$\begin{cases} x = 5 \\ y = 2 \end{cases}, \therefore x - y = 3.$



6. A $\because f(x) = \frac{\sin x}{\ln(x^2+1)}$ 的定义域为 $\{x | x \neq 0\}, \therefore$ 排除 D,

且 $f(-x) = \frac{\sin(-x)}{\ln[(-x)^2+1]} = -\frac{\sin x}{\ln(x^2+1)} = -f(x),$

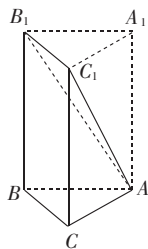
$\therefore f(x)$ 为奇函数, 其图象关于原点中心对称, $\therefore$ 排除 B,

$\because f(k\pi) = \frac{\sin k\pi}{\ln(k^2\pi^2+1)} = 0 (k \neq 0, k \in \mathbf{Z}), \therefore$ 排除 C.

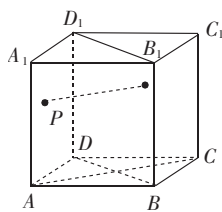
7. A 几何体的直观图如图所示:

可知该几何体为直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中截去三棱锥 $A-A_1B_1C_1$ 所形成的,

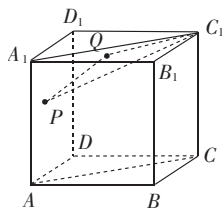
故该几何体的体积为 $V = \frac{1}{2} \times 2^2 \times 3 - \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 2^2 \times 3 = 4.$



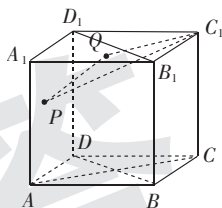
8. B 对于①,在正方形 DCC_1D_1 内如果存在一点 Q ,使得 $PQ \perp AC$,
 由于 $AC \perp$ 平面 DBB_1D_1 ,所以 $PQ \subset$ 平面 DBB_1D_1 ,或者 $PQ \parallel$ 平面 DBB_1D_1 ,而 P, Q 在平面 DBB_1D_1 的两侧, PQ 与平面 DBB_1D_1 相交,故①错误;



对于②,在正方形 DCC_1D_1 内如果存在一点 Q ,使得平面 $PQC_1 \parallel$ 平面 ABC ,由于平面 $A_1B_1C_1 \parallel$ 平面 ABC ,所以平面 $PQC_1 \parallel$ 平面 $A_1B_1C_1$,而平面 PQC_1 与平面 $A_1B_1C_1$ 相交于点 C_1 ,故②正确;



对于③,在正方形 DCC_1D_1 内如果存在一点 Q ,使得 $AC \perp$ 平面 PQC_1 ,由已知 $AC \perp$ 平面 DBB_1D_1 ,所以平面 $DBB_1D_1 \parallel$ 平面 PQC_1 ,而 P, Q 在平面 DBB_1D_1 的两侧,所以平面 DBB_1D_1 与平面 PQC_1 相交,故③错误.



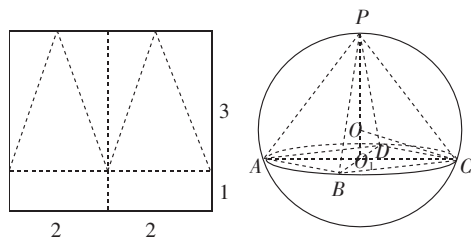
9. A 当 $x \in [0, m]$ 时, $2x + \frac{\pi}{3} \in [\frac{\pi}{3}, 2m + \frac{\pi}{3}]$, 令 $f(x) = 0$, 则 $\sin(2x + \frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2}$,

$\therefore$ 方程 $\sin(2x + \frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2}$ 在 $[0, m] (m > 0)$ 上至少有 2021 个根,

$\therefore 2m + \frac{\pi}{3} \geq \frac{5\pi}{6} + 2020\pi, \therefore$ 解得 $m \geq \frac{\pi}{4} + 1010\pi = \frac{4041}{4}\pi$,

$\therefore m$ 的最小值为 $\frac{4041}{4}\pi$.

10. A 将一边长为 4 的正方形纸片按照图中的虚线所示的方法剪开后拼接为一正四棱锥, 则其长度只能如图所示, 则剪开后拼接为底面边长为 2, 侧面斜高为 3, 侧棱长为 $\sqrt{10}$ 的正四棱锥. 设底面中心为 O_1 , 外接球的球心为 O , 外接球的半径为 R , 则 $PO_1 = \sqrt{(\sqrt{10})^2 - (\sqrt{2})^2} = 2\sqrt{2}$, 所以 $(PO_1 - R)^2 + O_1C^2 = R^2$, 即 $(2\sqrt{2} - R)^2 + (\sqrt{2})^2 = R^2$, 解得 $R = \frac{5\sqrt{2}}{4}$.



11. B 设 $f(x) = (2-x)e^x$, 则 $f'(x) = (1-x)e^x$,

$\therefore$ 当 $x > 1$ 时, $f'(x) < 0, \therefore f(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递减;

当 $x < 1$ 时, $f'(x) > 0$, $\therefore f(x)$ 在 $(-\infty, 1)$ 上单调递增.

$$\because a = \frac{5}{4}e^{\frac{3}{4}} = f\left(\frac{3}{4}\right), b = \frac{6}{5}e^{\frac{4}{5}} = f\left(\frac{4}{5}\right), c = \frac{8}{7}e^{\frac{6}{7}} = f\left(\frac{6}{7}\right), \frac{3}{4} < \frac{4}{5} < \frac{6}{7},$$

$$\therefore f\left(\frac{6}{7}\right) > f\left(\frac{4}{5}\right) > f\left(\frac{3}{4}\right), \therefore c > b > a.$$

12. B 如图所示, 取 AD 的中点 G , 取 CD 的中点 H , 连接 D_1G , D_1H, GH, AC ,

由三角形的中位线的性质, 可得 $EF \parallel AC, GH \parallel AC$, 则 $GH \parallel EF$,

又由 $EF \subset$ 平面 $C_1EF, GH \not\subset$ 平面 C_1EF , 可得 $GH \parallel$ 平面 C_1EF ,

连接 GF , 可得 $GF \parallel C_1D_1$ 且 $GF = C_1D_1$,

则四边形 GFC_1D_1 为平行四边形, 可得 $GD_1 \parallel C_1F$,

因为 $C_1F \subset$ 平面 $C_1EF, D_1G \not\subset$ 平面 C_1EF , 所以 $D_1G \parallel$ 平面 C_1EF ,

又因为 $D_1G \cap GH = G, D_1G, GH \subset$ 平面 D_1GH , 所以平面 $D_1GH \parallel$ 平面 C_1EF ,

由于直线 D_1P 与平面 EFC_1 无公共点, 所以点 P 在线段 GH 上,

$$\text{当 } P \text{ 为 } GH \text{ 的中点时, } D_1P \text{ 取得最小值, 最小值为 } \sqrt{DD_1^2 + DP^2} = \sqrt{1^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2} = \frac{3\sqrt{2}}{4}.$$

13. $9\sqrt{3}$ 设正四面体的棱长为 a , $\therefore a = 2\sqrt{3} \sin 60^\circ = 3$,

$$\therefore \text{该正四面体的表面积是 } 4 \times \frac{\sqrt{3}}{4} a^2 = 9\sqrt{3}.$$

14. $\frac{1}{6}$ $\because$ 将矩形 $ABCD$ 绕直线 AD 旋转所得到的几何体是以 1 为底面圆的半径, 母线长为 2 的圆柱, $\therefore V_1 = \pi \times 1^2 \times 2 = 2\pi$,

$\because$ 将 $\triangle MCD$ 绕直线 CD 旋转所得到的几何体是以 1 为底面圆的半径, 高为 1 的圆锥,

$$\therefore V_2 = \frac{1}{3} \times \pi \times 1^2 \times 1 = \frac{\pi}{3}, \therefore \frac{V_2}{V_1} = \frac{1}{6}.$$

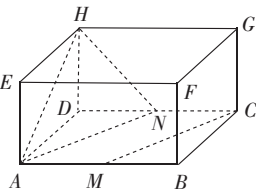
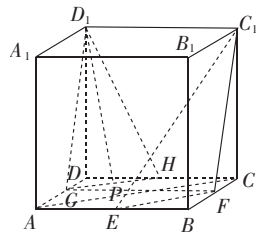
15. $\frac{\sqrt{6}}{3}$ 将该长方体还原后的直观图如图所示, 取 CD 的中点 N ,

则易证得 $AN \parallel CM$, 所以 $\angle HAN$ (或补角) 即为异面直线 AH 与 CM 所成的角,

$$\because AN = CM = 2\sqrt{2}, AH = HN = \sqrt{6},$$

$$\therefore \cos \angle HAN = \frac{AH^2 + AN^2 - HN^2}{2AH \cdot AN} = \frac{\sqrt{3}}{3}, \sin \angle HAN = \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

16. -8 $\because a_k = S_n, \therefore$ 令 $n = 2$, 得 $a_k = S_2, \therefore a_1 + (k-1)d = 2a_1 + d, \therefore$ 可得 $k-2 = \frac{a_1}{d}$,



$$\because a_1 > 0, \therefore d < 0, \therefore k-2 = \frac{a_1}{d} < 0, \therefore k < 2,$$

$$\text{又} \because k \in \mathbf{N}^*, \therefore k=1, d=-a_1,$$

$$\therefore \text{当 } d=-a_1 \text{ 时, 由 } a_k=S_n, \text{ 得 } a_1-(k-1)a_1=na_1-\frac{n(n-1)a_1}{2},$$

$$\therefore k=\frac{(n-1)(n-2)}{2}+1, \therefore k-3n=\frac{1}{2}n^2-\frac{9}{2}n+2,$$

$$\therefore k-3n=\frac{1}{2}\left[\left(n-\frac{9}{2}\right)^2\right]-\frac{65}{8}, \therefore \text{当 } n=4 \text{ 或 } 5 \text{ 时, } k-3n \text{ 的最小值为 } -8.$$

17. 解: (一) 选择条件①: $b=3$; 条件②: $S_{\triangle ABC}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

$$\because S_{\triangle ABC}=\frac{3\sqrt{3}}{2}, \therefore \frac{1}{2} \times 3 \times \sqrt{7} \cdot \sin A = \frac{3\sqrt{3}}{2},$$

$$\therefore \sin A = \frac{\sqrt{21}}{7}, \because \triangle ABC \text{ 是锐角三角形}, \therefore \cos A = \frac{2\sqrt{7}}{7},$$

$$\therefore a^2 = 9 + 7 - 2 \times 3 \times \sqrt{7} \times \frac{2\sqrt{7}}{7}, \therefore \text{解得 } a=2 \text{ (负值舍去)}. \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

(二) 选择条件①: $b=3$; 条件③: $\sin B=3\sqrt{3}\cos B$.

$$\because \sin B=3\sqrt{3}\cos B, \therefore 1-\cos^2 B=27\cos^2 B, \therefore \cos^2 B=\frac{1}{28},$$

$$\because \triangle ABC \text{ 是锐角三角形}, \therefore \text{解得 } \cos B = \frac{\sqrt{7}}{14},$$

$$\therefore 9 = a^2 + 7 - 2 \cdot a \cdot \sqrt{7} \times \frac{\sqrt{7}}{14}, \therefore a=2 \text{ (负值舍去)}. \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

(三) 选择条件②: $S_{\triangle ABC}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$; 条件③: $\sin B=3\sqrt{3}\cos B$.

$$\because \sin B=3\sqrt{3}\cos B, \therefore \sin^2 B=27(1-\sin^2 B), \therefore \sin^2 B=\frac{27}{28},$$

$$\therefore \sin B = \frac{3\sqrt{21}}{14}, \therefore \frac{1}{2}ac\sin B = \frac{3\sqrt{3}}{2}, \therefore \frac{1}{2} \cdot a \cdot \sqrt{7} \times \frac{3\sqrt{21}}{14} = \frac{3\sqrt{3}}{2}, \therefore \text{解得 } a=2.$$

$$\dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

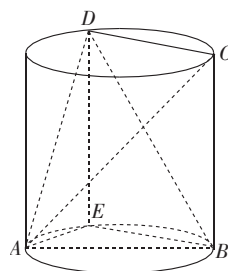
18. 解: (1) 如图, 过点 D 作圆柱的母线 DE , 连接 AE 、 BE ,

$$\because \text{母线 } DE \text{ 与底面 } ABE \text{ 垂直}, BE \subset \text{平面 } ABE, \therefore BE \perp DE,$$

$$\because AB \text{ 是底面圆的直径}, \therefore AE \perp BE, \text{ 又 } \because AE \cap DE = E, \therefore BE \perp \text{平面 } ADE,$$

$$\because DE \parallel BC \text{ 且 } DE = BC, \therefore \text{四边形 } BCDE \text{ 为平行四边形}, \therefore CD \parallel BE,$$

$$\therefore CD \perp \text{平面 } ADE, \text{ 又 } \because AD \subset \text{平面 } ADE, \therefore AD \perp CD. \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$



$$(2) \because \text{异面直线 } AB \text{ 和 } CD \text{ 所成的角为 } 30^\circ, \text{ 且 } BE \parallel CD, \therefore \angle ABE = 30^\circ,$$

$$\therefore AE=1, BE=\sqrt{3}, \therefore S_{\triangle ABE}=\frac{1}{2}AE \cdot BE=\frac{\sqrt{3}}{2}, \therefore S_{\triangle BCD}=S_{\triangle BDE},$$

$$\therefore V_{A-BCD}=V_{A-BDE}=V_{D-ABE}=\frac{1}{3}S_{\triangle ABE} \cdot DE=\frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times 2=\frac{\sqrt{3}}{3}. \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

19. 解: (1) $C_1E \parallel$ 平面 ABD , 证明如下: 取 AB 中点 G , 连接 EG, DG ,

$$\therefore E, G \text{ 分别为 } BC, AB \text{ 中点}, \therefore EG \parallel AC, EG=\frac{1}{2}AC,$$

$$\therefore \text{四边形 } ACC_1A_1 \text{ 为平行四边形}, D \text{ 为 } A_1C_1 \text{ 中点}, \therefore C_1D \parallel AC,$$

$$C_1D=\frac{1}{2}AC,$$

$$\therefore EG \parallel C_1D, EG=C_1D, \therefore \text{四边形 } EGDC_1 \text{ 为平行四边形}, \therefore C_1E \parallel DG,$$

$$\therefore C_1E \not\subset \text{平面 } ABD, DG \subset \text{平面 } ABD, \therefore C_1E \parallel \text{平面 } ABD. \dots\dots\dots$$

$\dots\dots\dots 5 \text{ 分}$

(2) 取 B_1C_1 中点 H , 连接 DH ,

$$\therefore A_1C_1=AC=4, B_1C_1=BC=2, \angle A_1C_1B_1=\angle ACB=60^\circ,$$

$$\therefore A_1B_1^2=A_1C_1^2+B_1C_1^2-2A_1C_1 \cdot B_1C_1 \cos \angle A_1C_1B_1=12,$$

$$\therefore A_1B_1^2+B_1C_1^2=A_1C_1^2, \therefore A_1B_1 \perp B_1C_1,$$

$$\therefore AA_1 \perp \text{平面 } ABC, \text{平面 } ABC \parallel \text{平面 } A_1B_1C_1,$$

$$\therefore AA_1 \perp \text{平面 } A_1B_1C_1, \text{又 } A_1B_1 \subset \text{平面 } A_1B_1C_1, \therefore A_1B_1 \perp AA_1,$$

$$\text{又 } BB_1 \parallel AA_1, \therefore A_1B_1 \perp BB_1, \therefore BB_1, B_1C_1 \subset \text{平面 } BCC_1B_1, BB_1 \cap B_1C_1=B_1,$$

$$\therefore A_1B_1 \perp \text{平面 } BCC_1B_1, \therefore D, H \text{ 分别为 } A_1C_1, B_1C_1 \text{ 的中点}, \therefore DH=\frac{1}{2}A_1B_1,$$

$$DH \parallel A_1B_1,$$

$$\therefore DH \perp \text{平面 } BCC_1B_1, \text{又 } F \text{ 为 } BD \text{ 中点},$$

$$\therefore \text{点 } F \text{ 到平面 } BCC_1B_1 \text{ 的距离 } h=\frac{1}{2}DH=\frac{1}{4}A_1B_1=\frac{\sqrt{3}}{2}. \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

20. 解: (1) $\therefore$ 在等腰梯形 $ABCD$ 中, $AD=DC, \therefore \angle DAC=\angle DCA$, 又 $AB \parallel CD$,

$$\therefore \angle DCA=\angle CAB, \therefore \angle DAC=\angle CAB, \text{又 } \angle DAB=\angle ABC=60^\circ,$$

$$\therefore \angle CAB=30^\circ, \therefore \angle BCA=90^\circ, \therefore AC \perp BC, \text{又 } \therefore \text{四边形 } ACEF \text{ 是矩形},$$

$$\therefore AC \perp EC, \text{又 } EC \cap BC=C, \therefore AC \perp \text{平面 } ECB. \dots\dots\dots 5 \text{ 分}$$

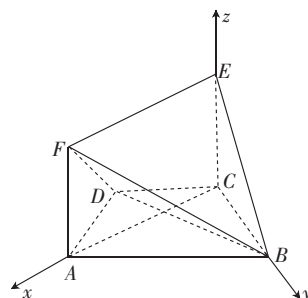
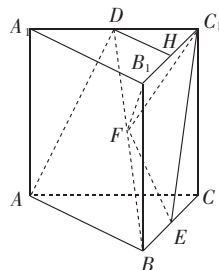
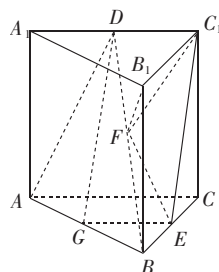
(2) $\therefore CA, CB, CE$ 两两垂直, $\therefore$ 可建立如图所示的空间直角坐标系,

$$\text{设 } CE=BC=2, \text{则 } B(0, 2, 0), D(\sqrt{3}, -1, 0), F(2\sqrt{3}, 0, 2), E(0, 0, 2),$$

$$\therefore \overrightarrow{BD}=(\sqrt{3}, -3, 0), \overrightarrow{BF}=(2\sqrt{3}, -2, 2).$$

设平面 FBD 的法向量 $\boldsymbol{n}=(x, y, z)$,

$$\text{则有 } \begin{cases} \boldsymbol{n} \cdot \overrightarrow{BD}=0 \\ \boldsymbol{n} \cdot \overrightarrow{BF}=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{3}x-3y=0 \\ 2\sqrt{3}x-2y+2z=0 \end{cases}, \text{令 } y=1, \text{得 } x=$$



$$\sqrt{3}, z = -2,$$

$\therefore$ 平面 FBD 的一个法向量为 $\mathbf{n} = (\sqrt{3}, 1, -2)$, 设直线 EB 与平面 FBD 所成角为 θ ,

$$\text{又 } \overrightarrow{EB} = (0, 2, -2), \therefore \sin \theta = |\cos \langle \overrightarrow{EB}, \mathbf{n} \rangle| = \left| \frac{\overrightarrow{EB} \cdot \mathbf{n}}{|\overrightarrow{EB}| |\mathbf{n}|} \right| = \frac{3}{4},$$

$\therefore EB$ 与平面 FBD 所成角的余弦值为 $\frac{\sqrt{7}}{4}$ 12 分

21. 解: (1) $\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形, $\therefore AD \perp CD, \therefore AD \perp DP, CD \cap DP = D$,
 $CD, DP \subset$ 平面 $PDC, \therefore AD \perp$ 平面 $PDC, \therefore AD \parallel BC, AD \not\subset$ 平面 PBC ,
 $BC \subset$ 平面 $PBC, \therefore AD \parallel$ 平面 $PBC, \therefore$ 平面 $PBC \cap$ 平面 $PAD = l, \therefore AD \parallel l$,
 $\therefore$ 直线 $l \perp$ 平面 PDC 5 分

$$(2) \text{ 设 } PD = x, \text{ 则 } AD = \sqrt{4 - x^2} (0 < x < 2), S_{\triangle PAD} = \frac{1}{2} \cdot x \cdot \sqrt{4 - x^2}.$$

$\because$ 平面 $PAD \perp$ 平面 $ABCD$, 交线为 AD , 且 $AB \perp AD, \therefore AB \perp$ 平面 PAD ,

而 $PA \subset$ 平面 $PAD, \therefore AB \perp PA$. 在 $\text{Rt} \triangle PAB$ 中, $PB = \sqrt{7}, PA = 2$, 有 $AB = \sqrt{3}$.

$$\therefore V_{P-ABD} = V_{B-PAD},$$

$$\therefore V_{P-ABD} = V_{B-PAD} = \frac{1}{3} \cdot S_{\triangle PAD} \cdot AB = \frac{\sqrt{3}}{6} \cdot \sqrt{x^2(4 - x^2)} \leq \frac{\sqrt{3}}{6} \cdot \frac{x^2 + 4 - x^2}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

当且仅当 $x^2 = 4 - x^2$, 即 $x = \sqrt{2}$ 时, 等号成立, 此时 $PD = AD = \sqrt{2}, PC = \sqrt{5}$.

如图, 建立空间直角坐标系, 可得 $P(0, 0, \sqrt{2}), A(\sqrt{2}, 0, 0)$,

$$B(\sqrt{2}, \sqrt{3}, 0), C(0, \sqrt{3}, 0),$$

$$\therefore \overrightarrow{PA} = (\sqrt{2}, 0, -\sqrt{2}), \overrightarrow{AB} = (0, \sqrt{3}, 0), \overrightarrow{CB} = (\sqrt{2}, 0, 0),$$

$$\overrightarrow{PC} = (0, \sqrt{3}, -\sqrt{2}).$$

设平面 PAB 和平面 PBC 的法向量分别为 $\mathbf{m} = (x_0, y_0, z_0)$

和 $\mathbf{n} = (x, y, z)$,

$$\therefore \begin{cases} \mathbf{m} \cdot \overrightarrow{PA} = 0 \\ \mathbf{m} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{2}x_0 - \sqrt{2}z_0 = 0 \\ \sqrt{3}y_0 = 0 \end{cases}, \therefore \text{可取 } \mathbf{m} = (1, 0, 1),$$

$$\therefore \begin{cases} \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{CB} = 0 \\ \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{PC} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{2}x = 0 \\ \sqrt{3}y - \sqrt{2}z = 0 \end{cases}, \therefore \text{可取 } \mathbf{n} = (0, -2, -\sqrt{6}).$$

设二面角 $C-PB-A$ 的平面角为 φ

$$\therefore \cos \varphi = \frac{\mathbf{m} \cdot \mathbf{n}}{|\mathbf{m}| \cdot |\mathbf{n}|} = \frac{-\sqrt{6}}{\sqrt{2} \times \sqrt{10}} = -\frac{\sqrt{30}}{10}, \therefore \text{二面角 } C-PB-A \text{ 的正弦值为 } \frac{\sqrt{70}}{10}.$$

..... 12 分

$$22. \text{ 解: (1) } \because f'(x) = \frac{1 - ax^2 e^x}{x}, \therefore \begin{cases} f'(x_0) = 0 \\ f(x_1) = 0 \end{cases}, \therefore \begin{cases} ax_0^2 e^{x_0} = 1 \\ \ln x_1 = a(x_1 - 1)e^{x_1} \end{cases},$$

$$\therefore \ln x_1 = \frac{x_1 - 1}{x_0^2} e^{x_1 - x_0}, \therefore e^{x_1 - x_0} = \frac{x_0^2 \ln x_1}{x_1 - 1},$$

$\because$ 当 $x > 1$ 时, $\ln x < x - 1, x_1 > x_0 > 1, \therefore e^{x_1 - x_0} < \frac{x_0^2(x_1 - 1)}{x_1 - 1} = x_0^2,$

$\therefore \ln e^{x_1 - x_0} < \ln x_0^2, \therefore x_1 - x_0 < 2 \ln x_0 < 2(x_0 - 1), \therefore 3x_0 > 2 + x_1. \dots\dots\dots 5$ 分

(2) 函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty), f'(x) = \frac{1 - ax^2 e^x}{x},$

令 $g(x) = 1 - ax^2 e^x$, 可知 $g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 内单调递减,

$\therefore g(1) = 1 - ae > 0, g(\ln \frac{1}{a}) = 1 - a(\ln \frac{1}{a})^2 \frac{1}{a} = 1 - (\ln \frac{1}{a})^2 < 0,$

$\therefore g(x) = 0$ 在 $(0, +\infty)$ 内有唯一解, $\therefore f'(x) = 0$ 在 $(0, +\infty)$ 内有唯一解, 不妨设为 x_0 , 则 $1 < x_0 < \ln \frac{1}{a},$

$\therefore$ 当 $x \in (0, x_0)$ 时, $f'(x) = \frac{g(x)}{x} > \frac{g(x_0)}{x} = 0, \therefore f(x)$ 在 $(0, x_0)$ 内单调递增;

$\therefore$ 当 $x \in (x_0, +\infty)$ 时, $f'(x) = \frac{g(x)}{x} < \frac{g(x_0)}{x} = 0, \therefore f(x)$ 在 $(x_0, +\infty)$ 内单调递减,

$\therefore x_0$ 是 $f(x)$ 的唯一极值点,

$\because f(\ln \frac{1}{a}) = \ln \ln \frac{1}{a} - a(\ln \frac{1}{a} - 1)e^{\ln \frac{1}{a}} = \ln \ln \frac{1}{a} - \ln \frac{1}{a} + 1$, 令 $h(x) = \ln x - x + 1,$

$\therefore$ 当 $x > 1$ 时, $h'(x) = \frac{1}{x} - 1 < 0, \therefore h(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 内单调递减,

$\therefore$ 当 $x > 1$ 时, $h(x) < h(1) = 0, \therefore \ln x < x - 1, \therefore f(\ln \frac{1}{a}) = h(\ln \frac{1}{a}) < 0,$

又 $\because f(x_0) > f(1) = 0, \therefore f(x)$ 在 $(x_0, +\infty)$ 内有唯一零点,

$\therefore f(x)$ 在 $(0, x_0)$ 内有唯一零点 1, $\therefore f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 内恰有两个零点. $\dots\dots\dots 12$ 分

