

2022 届高三第四次联考 · 数学试卷

参考答案

1. D $\because N = \{x | 0 < x < 4\}, \therefore M \cap N = \{1, 2\}.$

2. B $z = \frac{2+i}{i} = \frac{(2+i)i}{i^2} = \frac{2i+i^2}{-1} = 1-2i.$

3. A 设该圆锥的底面半径为 r , $\because \pi r^2 = 4\pi, \therefore r = 2,$

$\therefore$ 该圆锥的高为 $\sqrt{3^2 - 2^2} = \sqrt{5}.$

4. B $\left. \begin{array}{l} b \perp \beta \\ \alpha \parallel \beta \end{array} \right\} \Rightarrow b \perp \alpha, \text{ 又 } a \subset \alpha, \therefore a \perp b, \text{ 显然, 反过来不正确,}$

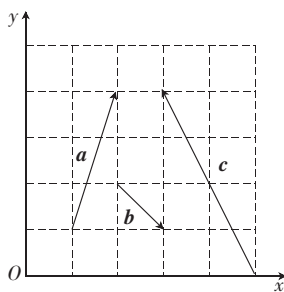
$\therefore$ “ $\alpha \parallel \beta$ ”是“ $a \perp b$ ”的充分不必要条件.

5. D 将向量 a, b, c 放入如图所示的坐标系中, 每个小正方形的边长为 1,

则 $a = (1, 3), b = (1, -1), c = (-2, 4), \therefore a = xb + yc (x, y \in \mathbf{R}),$

$\therefore (1, 3) = x(1, -1) + y(-2, 4), \text{ 即 } \begin{cases} 1 = x - 2y \\ 3 = -x + 4y \end{cases}, \text{ 解得}$

$\begin{cases} x = 5 \\ y = 2 \end{cases}, \therefore x - y = 3.$



6. A $\because f(x) = \frac{\sin x}{\ln(x^2+1)}$ 的定义域为 $\{x | x \neq 0\}, \therefore$ 排除 D,

且 $f(-x) = \frac{\sin(-x)}{\ln[(-x)^2+1]} = -\frac{\sin x}{\ln(x^2+1)} = -f(x),$

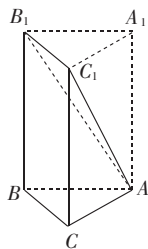
$\therefore f(x)$ 为奇函数, 其图象关于原点中心对称, $\therefore$ 排除 B,

$\because f(k\pi) = \frac{\sin k\pi}{\ln(k^2\pi^2+1)} = 0 (k \neq 0, k \in \mathbf{Z}), \therefore$ 排除 C.

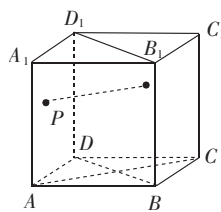
7. A 几何体的直观图如图所示:

可知该几何体为直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中截去三棱锥 $A-A_1B_1C_1$ 所形成的,

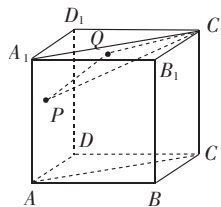
故该几何体的体积为 $V = \frac{1}{2} \times 2^2 \times 3 - \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 2^2 \times 3 = 4.$



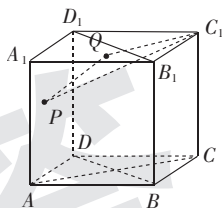
8. B 对于①,在正方形 DCC_1D_1 内如果存在一点 Q ,使得 $PQ \perp AC$,
由于 $AC \perp$ 平面 DBB_1D_1 ,所以 $PQ \subset$ 平面 DBB_1D_1 ,或者 $PQ \parallel$ 平面 DBB_1D_1 ,而 P, Q 在平面 DBB_1D_1 的两侧, PQ 与平面 DBB_1D_1 相交,故①错误;



对于②,在正方形 DCC_1D_1 内如果存在一点 Q ,使得平面 $PQC_1 \parallel$ 平面 ABC ,由于平面 $A_1B_1C_1 \parallel$ 平面 ABC ,所以平面 $PQC_1 \parallel$ 平面 $A_1B_1C_1$,而平面 PQC_1 与平面 $A_1B_1C_1$ 相交于点 C_1 ,故②正确;



对于③,在正方形 DCC_1D_1 内如果存在一点 Q ,使得 $AC \perp$ 平面 PQC_1 ,由已知 $AC \perp$ 平面 DBB_1D_1 ,所以平面 $DBB_1D_1 \parallel$ 平面 PQC_1 ,而 P, Q 在平面 DBB_1D_1 的两侧,所以平面 DBB_1D_1 与平面 PQC_1 相交,故③错误.



9. D 设半球的半径为 R ,则 $R=2$,小圆锥的高为 4,大圆锥的高为 3,
∴整个保鲜封闭装置的体积为

$$V_{\text{总}} = V_{\text{半球}} + V_{\text{大圆锥}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \pi \cdot 2^3 + \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 2^2 \cdot 3 = \frac{28\pi}{3},$$

设小圆锥的半径为 r ,则 $r^2 = R^2 - (4-3)^2 = 2^2 - 1 = 3, r = \sqrt{3}$,

$$\therefore \text{小圆锥的体积为 } V_{\text{小圆锥}} = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot (\sqrt{3})^2 \cdot 4 = 4\pi,$$

$$\therefore \text{充氮区空间体积为 } V_{\text{总}} - V_{\text{小圆锥}} = \frac{28\pi}{3} - 4\pi = \frac{16\pi}{3},$$

∴充氮区空间体积在整个保鲜封闭装置体积中的占比为 $\frac{4}{7}$.

10. A 当 $x \in [0, m]$ 时, $2x + \frac{\pi}{3} \in [\frac{\pi}{3}, 2m + \frac{\pi}{3}]$,令 $f(x) = 0$,则 $\sin(2x + \frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2}$,

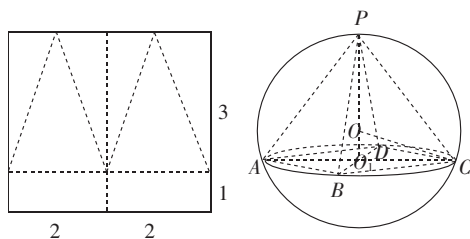
∴方程 $\sin(2x + \frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2}$ 在 $[0, m]$ ($m > 0$) 上至少有 2021 个根,

$$\therefore 2m + \frac{\pi}{3} \geq \frac{5\pi}{6} + 2020\pi, \therefore \text{解得 } m \geq \frac{\pi}{4} + 1010\pi = \frac{4041}{4}\pi,$$

∴ m 的最小值为 $\frac{4041}{4}\pi$.

11. A 将一边长为 4 的正方形纸片按照图中的虚线所示的方法剪开后拼接为一正四棱锥,则其长度只能如图所示,则剪开后拼接为底面边长为 2,侧面斜高为 3,侧棱长为 $\sqrt{10}$ 的正四棱锥.设底面中心为 O_1 ,外接球的球心为 O ,外接球的半径为 R ,则 $PO_1 = \sqrt{(\sqrt{10})^2 - (\sqrt{2})^2} = 2\sqrt{2}$,所以 $(PO_1 - R)^2 + O_1C^2 = R^2$,即 $(2\sqrt{2} - R)^2 + (\sqrt{2})^2 = R^2$,

解得 $R = \frac{5\sqrt{2}}{4}$.



12. B 设 $f(x) = (2-x)e^x$, 则 $f'(x) = (1-x)e^x$,

$\therefore$ 当 $x > 1$ 时, $f'(x) < 0$, $\therefore f(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递减;

当 $x < 1$ 时, $f'(x) > 0$, $\therefore f(x)$ 在 $(-\infty, 1)$ 上单调递增.

$$\therefore a = \frac{5}{4}e^{\frac{3}{4}} = f\left(\frac{3}{4}\right), b = \frac{6}{5}e^{\frac{4}{5}} = f\left(\frac{4}{5}\right), c = \frac{8}{7}e^{\frac{6}{7}} = f\left(\frac{6}{7}\right), \frac{3}{4} < \frac{4}{5} < \frac{6}{7},$$

$$\therefore f\left(\frac{6}{7}\right) > f\left(\frac{4}{5}\right) > f\left(\frac{3}{4}\right), \therefore c > b > a.$$

13. $9\sqrt{3}$ 设正四面体的棱长为 a , $\therefore a = 2\sqrt{3} \sin 60^\circ = 3$,

$$\therefore \text{该正四面体的表面积是 } 4 \times \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 = 9\sqrt{3}.$$

14. $\frac{1}{6}$ $\therefore$ 将矩形 $ABCD$ 绕直线 AD 旋转所得到的几何体是以 1 为底面圆的半径, 母线长为 2 的圆柱, $\therefore V_1 = \pi \times 1^2 \times 2 = 2\pi$,

$\therefore$ 将 $\triangle MCD$ 绕直线 CD 旋转所得到的几何体是以 1 为底面圆的半径, 高为 1 的圆锥,

$$\therefore V_2 = \frac{1}{3} \times \pi \times 1^2 \times 1 = \frac{\pi}{3}, \therefore \frac{V_2}{V_1} = \frac{1}{6}.$$

15. $-\frac{1}{2021}$ $\therefore a_{n+1} = S_n S_{n+1} = S_{n+1} - S_n, \therefore \frac{S_{n+1} - S_n}{S_n S_{n+1}} = \frac{1}{S_n} - \frac{1}{S_{n+1}} = 1, \therefore \frac{1}{S_{n+1}} - \frac{1}{S_n} = -1,$

$\therefore$ 数列 $\left\{\frac{1}{S_n}\right\}$ 是首项为 $\frac{1}{S_1} = -1$, 公差为 -1 的等差数列, $\therefore \frac{1}{S_n} = -1 + (n-1) \cdot (-1)$

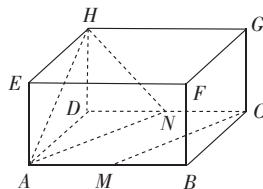
$$= -n, \therefore S_n = -\frac{1}{n}, \therefore S_{2021} = -\frac{1}{2021}.$$

16. $\frac{\sqrt{6}}{3}$ 将该长方体还原后的直观图如图所示, 取 CD 的中点 N ,

则易证得 $AN \parallel CM$, 所以 $\angle HAN$ (或补角) 即为异面直线 AH 与 CM 所成的角,

$$\therefore AN = CM = 2\sqrt{2}, AH = HN = \sqrt{6},$$

$$\therefore \cos \angle HAN = \frac{AH^2 + AN^2 - HN^2}{2AH \cdot AN} = \frac{\sqrt{3}}{3}, \sin \angle HAN = \frac{\sqrt{6}}{3}.$$



17. 解:(一)选择条件①: $b=3$;条件②: $S_{\triangle ABC}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

$$\because S_{\triangle ABC}=\frac{3\sqrt{3}}{2}, \therefore \frac{1}{2} \times 3 \times \sqrt{7} \cdot \sin A = \frac{3\sqrt{3}}{2},$$

$$\therefore \sin A = \frac{\sqrt{21}}{7}, \therefore \triangle ABC \text{ 是锐角三角形}, \therefore \cos A = \frac{2\sqrt{7}}{7},$$

$$\therefore a^2 = 9 + 7 - 2 \times 3 \times \sqrt{7} \times \frac{2\sqrt{7}}{7}, \therefore \text{解得 } a = 2 (\text{负值舍去}). \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

(二)选择条件①: $b=3$;条件③: $\sin B=3\sqrt{3}\cos B$.

$$\because \sin B=3\sqrt{3}\cos B, \therefore 1-\cos^2 B=27\cos^2 B, \therefore \cos^2 B=\frac{1}{28},$$

$$\because \triangle ABC \text{ 是锐角三角形}, \therefore \text{解得 } \cos B = \frac{\sqrt{7}}{14},$$

$$\therefore 9 = a^2 + 7 - 2 \cdot a \cdot \sqrt{7} \times \frac{\sqrt{7}}{14}, \therefore a = 2 (\text{负值舍去}). \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

(三)选择条件②: $S_{\triangle ABC}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$;条件③: $\sin B=3\sqrt{3}\cos B$.

$$\because \sin B=3\sqrt{3}\cos B, \therefore \sin^2 B=27(1-\sin^2 B), \therefore \sin^2 B=\frac{27}{28},$$

$$\therefore \sin B = \frac{3\sqrt{21}}{14}, \therefore \frac{1}{2} a c \sin B = \frac{3\sqrt{3}}{2}, \therefore \frac{1}{2} \cdot a \cdot \sqrt{7} \times \frac{3\sqrt{21}}{14} = \frac{3\sqrt{3}}{2}, \therefore \text{解得 } a = 2.$$

$\dots\dots\dots 10 \text{ 分}$

18. 解:(1) $\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形, $\therefore AB \parallel CD$.

又 $\because AB \not\subset$ 平面 $PDC, CD \subset$ 平面 $PDC, \therefore AB \parallel$ 平面 PDC .

又 $\because AB \subset$ 平面 ABE ,平面 $ABE \cap$ 平面 $PDC=EF, \therefore AB \parallel EF. \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$

(2) $\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形, $\therefore AB \perp AD$.

$\because AF \perp EF, AB \parallel EF, \therefore AB \perp AF$.

又 $\because AB \perp AD, \therefore$ 由点 E 在棱 PC 上(异于点 C)得 F 点异于点 D ,

又 $AF \cap AD = A, AF, AD \subset$ 平面 $PAD, \therefore AB \perp$ 平面 PAD .

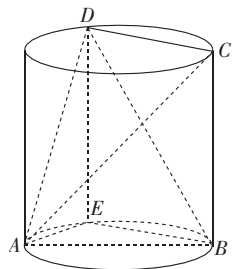
又 $\because AB \subset$ 平面 $ABCD, \therefore$ 平面 $PAD \perp$ 平面 $ABCD. \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$

19. 解:(1)如图,过点 D 作圆柱的母线 DE ,连接 AE, BE ,

$\because$ 母线 DE 与底面 ABE 垂直, $BE \subset$ 平面 $ABE, \therefore BE \perp DE$,

$\because AB$ 是底面圆的直径, $\therefore AE \perp BE$,又 $\because AE \cap DE = E, \therefore BE \perp$ 平面 ADE ,

$\because DE \parallel BC$ 且 $DE = BC, \therefore$ 四边形 $BCDE$ 为平行四边形, $\therefore CD \parallel BE$,



$\therefore CD \perp$ 平面 ADE , 又 $\because AD \subset$ 平面 ADE , $\therefore AD \perp CD$ 6 分

(2) $\because$ 异面直线 AB 和 CD 所成的角为 30° , 且 $BE \parallel CD$, $\therefore \angle ABE = 30^\circ$,

$$\therefore AE = 1, BE = \sqrt{3}, \therefore S_{\triangle ABE} = \frac{1}{2} AE \cdot BE = \frac{\sqrt{3}}{2}, \therefore S_{\triangle BCD} = S_{\triangle BDE},$$

$$\therefore V_{A-BCD} = V_{A-BDE} = V_{D-ABE} = \frac{1}{3} S_{\triangle ABE} \cdot DE = \frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times 2 = \frac{\sqrt{3}}{3}. \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

20. 解: (1) $C_1E \parallel$ 平面 ABD , 证明如下: 取 AB 中点 G , 连接 EG, DG ,

$\because E, G$ 分别为 BC, AB 中点, $\therefore EG \parallel AC, EG = \frac{1}{2} AC$,

$\because$ 四边形 ACC_1A_1 为平行四边形, D 为 A_1C_1 中点, $\therefore C_1D \parallel AC$,

$$C_1D = \frac{1}{2} AC,$$

$\therefore EG \parallel C_1D, EG = C_1D, \therefore$ 四边形 $EGDC_1$ 为平行四边形, $\therefore C_1E \parallel DG$,

$\because C_1E \not\subset$ 平面 $ABD, DG \subset$ 平面 $ABD, \therefore C_1E \parallel$ 平面 ABD 5 分

(2) 取 B_1C_1 中点 H , 连接 DH ,

$\because A_1C_1 = AC = 4, B_1C_1 = BC = 2, \angle A_1C_1B_1 = \angle ACB = 60^\circ$,

$$\therefore A_1B_1^2 = A_1C_1^2 + B_1C_1^2 - 2A_1C_1 \cdot B_1C_1 \cos \angle A_1C_1B_1 = 12,$$

$$\therefore A_1B_1^2 + B_1C_1^2 = A_1C_1^2, \therefore A_1B_1 \perp B_1C_1,$$

$\because AA_1 \perp$ 平面 ABC , 平面 $ABC \parallel$ 平面 $A_1B_1C_1$,

$\therefore AA_1 \perp$ 平面 $A_1B_1C_1$, 又 $A_1B_1 \subset$ 平面 $A_1B_1C_1, \therefore A_1B_1 \perp AA_1$,

又 $BB_1 \parallel AA_1, \therefore A_1B_1 \perp BB_1, \therefore BB_1, B_1C_1 \subset$ 平面 $BCC_1B_1, BB_1 \cap B_1C_1 = B_1$,

$\therefore A_1B_1 \perp$ 平面 $BCC_1B_1, \therefore D, H$ 分别为 A_1C_1, B_1C_1 的中点, $\therefore DH = \frac{1}{2} A_1B_1$,

$DH \parallel A_1B_1$,

$\therefore DH \perp$ 平面 BCC_1B_1 , 又 F 为 BD 中点,

$$\therefore \text{点 } F \text{ 到平面 } BCC_1B_1 \text{ 的距离 } h = \frac{1}{2} DH = \frac{1}{4} A_1B_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}. \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

21. 解: (1) 如图所示, 连接 AE , AE 与 BD 的交点记为点 O ,

因为 $\triangle ABE \cong \triangle BCD$, 所以 $\angle BAE = \angle CBD$,

因为 $\angle ABD + \angle CBD = 90^\circ$, 所以 $\angle ABD + \angle BAE = 90^\circ$,

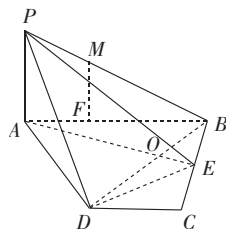
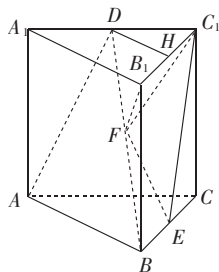
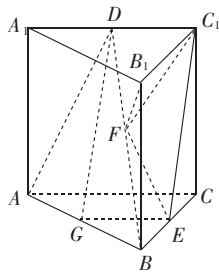
所以 $\angle AOB = 90^\circ$, 即 $BD \perp AE$,

又因为 $BD \perp PE$, 且 $PE \cap AE = E$, 所以 $BD \perp$ 平面 PAE ,

因为 $PA \subset$ 平面 PAE , 所以 $BD \perp PA$,

因为在 $\triangle PAB$ 中, $PA^2 + AB^2 = PB^2$, 所以 $PA \perp AB$,

又因为 $BD \cap AB = B$, 且 $AB, BD \subset$ 平面 $ABCD$, 所以 $PA \perp$ 平面 $ABCD$ 6 分



(2)存在,点 M 为靠近点 P 的三等分点,理由如下:

如图所示,过点 M 作 AB 的垂线交 AB 于点 F ,并连接 DE ,

则 $MF \parallel PA, MF \perp$ 平面 $ABCD$,

因为 $AE = \sqrt{AB^2 + BE^2} = 2\sqrt{5}, AD = 2\sqrt{5}, DE = 2\sqrt{2}$,

所以等腰 $\triangle ADE$ 在 DE 上的高为 $3\sqrt{2}$,

可得 $S_{\triangle ADE} = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{2} \times 3\sqrt{2} = 6$, 则 $V_{A-DEM} = \frac{1}{3} \times 6 \times MF = \frac{8}{3}$, 解得 $MF = \frac{4}{3}$,

所以 M 为靠近点 P 的三等分点. 12 分

22. 解: (1) $\because f(x) = \ln x + x^2 - 3x, f'(x) = \frac{1}{x} + 2x - 3$,

$$\therefore f(3) = \ln 3, f'(3) = \frac{10}{3},$$

$\therefore$ 在点 $(3, f(3))$ 处的切线方程为 $y = \frac{10}{3}x - 10 + \ln 3$ 5 分

(2) $\because 1 \leq x_1 < x_2 \leq 2, \therefore \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_2 - x_1} > \frac{m}{x_1 x_2}$ 等价于 $f(x_1) - f(x_2) > \frac{m}{x_1} - \frac{m}{x_2}$,

$$\therefore f(x_1) - \frac{m}{x_1} > f(x_2) - \frac{m}{x_2}. \text{ 令 } g(x) = f(x) - \frac{m}{x} = \ln x + x^2 - 3x - \frac{m}{x},$$

$\because$ 对 $\forall x_1, x_2 \in [1, 2]$, 当 $x_1 < x_2$ 时, 不等式 $g(x_1) > g(x_2)$ 恒成立,

$\therefore g(x) = \ln x + x^2 - 3x - \frac{m}{x}$ 在 $[1, 2]$ 上单调递减,

$$\therefore g'(x) = \frac{1}{x} + 2x - 3 + \frac{m}{x^2} \leq 0 \text{ 在 } [1, 2] \text{ 上恒成立,}$$

$\therefore m \leq -2x^3 + 3x^2 - x$ 在 $[1, 2]$ 上恒成立,

令 $h(x) = -2x^3 + 3x^2 - x$, 则 $h'(x) = -6x^2 + 6x - 1 \leq -1$ 在 $[1, 2]$ 上恒成立,

$\therefore h(x)$ 在 $[1, 2]$ 上单调递减, $\therefore h(x)_{\min} = h(2) = -6$,

$\therefore m \leq -6, \therefore$ 实数 m 的最大值为 -6 12 分

