2022 届高三第六次联考·数学试卷

参 考 答 案

1.D 设 $z=a+b\mathrm{i}$,a,$b\in\mathbf{R}$,则 $\bar{z}=a-b\mathrm{i}$,由 $z-2\bar{z}=-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\mathrm{i}$ 可得 $-a+3b\mathrm{i}=-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\mathrm{i}$,则 $a=\frac{1}{2}$,$b=\frac{1}{2}$,所以 $z=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{i}$.

2.A 甲同学从 4 门校本劳动选修课程中任选 2 门的选法共有{植物栽培,手工编织},{手工编织,实用木工},{实用木工,实用电工},{植物栽培,实用木工},{手工编织,实用电工},{植物栽培,实用电工},共 6 种.其中甲同学的选课中不包含手工编织课程共有 3 种,所以甲同学的选课中不包含手工编织课程的概率 $P=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$.

3.C 代表今后三天都不下雨的随机数有 977,569,556,共 3 组,记"今后三天中至少有一天下雨"为事件 A,"今后三天都不下雨"为事件 B,则 A 与 B 为对立事件,所以 $P(A)=1-P(B)=1-\frac{3}{20}=\frac{17}{20}=0.85$.

4.B 由题意得 $x_1,x_2,x_3,\cdots,x_{10}$ 的方差为 4,所以 $x_1+5,x_2+5,\cdots,x_{10}+5$ 的方差仍为 4.

5.B $\because a_3=5$,$\therefore a_1+2d=5$ ①,$\because a_1,a_3,a_{13}$ 成等比数列,$\therefore a_3^2=a_1a_{13}$,$\therefore(a_1+2d)^2=a_1(a_1+12d)$,化简得 $8a_1d=4d^2$,又公差 $d\neq0$,$\therefore 2a_1=d$ ②,由①②可得 $a_1=1$,$d=2$,$\therefore a_8=a_1+7d=15$.

6.C 样本的众数约为$\frac{65+70}{2}=67\frac{1}{2}$,A 项正确;设样本的中位数约为 x,则 $5\times0.03+5\times0.05+(x-65)\times0.06=0.5$,解得 $x=66\frac{2}{3}$,B 项正确;由直方图估计样本平均值约为 $57.5\times0.15+62.5\times0.25+67.5\times0.3+72.5\times0.2+77.5\times0.1=66.75$,C 项错误;2000 名学生中体重大于 70 kg 的人数大约为 $2000\times5\times(0.02+0.04)=600$,D 项正确.

7.A 由已知可得双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-y^2=1$ 的渐近线方程 $y=\pm\frac{x}{a}$,因为点 $P(1,2)$在双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-y^2=1$ 的一条渐近线上,所以 $2=\frac{1}{a}$,即 $a=\frac{1}{2}$,故 $c=\sqrt{a^2+1}=\frac{\sqrt{5}}{2}$,因此右顶点到渐近线的距离 $d=\frac{ab}{c}=\frac{\sqrt{5}}{5}$.

8.D 设图形中最小正方形的边长为 1,则阴影部分的面积为$\frac{1}{2}\times(1+2)\times1=\frac{3}{2}$,七巧板拼成的正方形边长为 $2\sqrt{1^2+1^2}=2\sqrt{2}$,面积为$(2\sqrt{2})^2=8$,所以在此正方形中任取一点,此点取自阴影部分的概率为$\frac{3}{16}$.

9. B　由题意知 2022 是数列$\{2n\}$中的第 1011 项，而数表中的前 r 行共有 $1+2+3+\cdots+r=\frac{r(r+1)}{2}$项，令$\frac{r(r+1)}{2}\leqslant 1011$ 知 r 的最大值为 44. 当 $r=44$ 时，前 44 行共有 990 项，则 2022 位于第 45 行，第 $1011-990=21$ 个数，即 $M(45,21)$.

10. C　由题设可得，

	1 号裁判	2 号裁判	3 号裁判	4 号裁判
第一名	甲	乙	丙	乙
第二名	乙	丙	丁	丙
第三名	丁	甲	甲	丁
第四名	丙	丁	乙	甲

∵1 号裁判、4 号裁判各预测对了两名运动员的排名，而 2 号裁判、3 号裁判各预测对了一名运动员的排名，∴第三名一定是丁，而不是甲，∴2 号裁判预测的第一名乙或第二名丙是正确的，而 3 号裁判预测的第一名丙或第四名乙是正确的. 若 2 号裁判预测的第一名乙正确，则 3 号裁判预测没有正确的，与题设矛盾，故 2 号裁判预测的第二名丙正确，3 号裁判预测的第四名乙是正确的，∴四名运动员的排名为甲丙丁乙.

11. D　由题意，执行循环结构的程序框图，可得 $x=3,i=1$，满足条件 $x\geqslant 2,x=\frac{9}{4},i=2$，不满足判断条件 $i\geqslant 4$；满足条件 $x\geqslant 2,x=\frac{27}{16},i=3$，不满足判断条件 $i\geqslant 4$；不满足条件 $x\geqslant 2,x=\frac{135}{64},i=4$，满足判断条件 $i\geqslant 4$，退出循环，输出 x 的值为$\frac{135}{64}$.

12. B　由图可知$\begin{cases}\frac{13\pi}{12}>T\\ \frac{13\pi}{12}<\frac{5T}{4}\end{cases}$，∴$\frac{13\pi}{15}<\frac{2\pi}{\omega}<\frac{13\pi}{12}$，即$\frac{24}{13}<\omega<\frac{30}{13}$. 又∵$g(0)=2\sin\varphi=\sqrt{3}$，$|\varphi|<\frac{\pi}{2}$，∴$\varphi=\frac{\pi}{3}$，又∵$g(\frac{13}{12}\pi)=2\sin(\frac{13}{12}\pi\omega+\frac{\pi}{3})=2$，∴$\frac{13}{12}\pi\omega=\frac{\pi}{6}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$，∴$\omega=\frac{24}{13}k+\frac{2}{13},k\in\mathbf{Z}$，故当 $k=1$ 时，解得 $\omega=2$，满足条件，∴$g(x)=2\sin(2x+\frac{\pi}{3})$，故 $f(x)=2\sin[2(x+\frac{\pi}{6})+\frac{\pi}{3}]=2\sin(2x+\frac{2\pi}{3})$. 对①，由上述可知①错误；对②，∵$f(x)=2\sin(2x+\frac{2\pi}{3})$，∴$f(x)$的最小正周期为$\frac{2\pi}{2}=\pi$，故②正确；对③，令 $2k\pi+\frac{\pi}{2}\leqslant 2x+\frac{2\pi}{3}\leqslant 2k\pi+\frac{3\pi}{2},k\in\mathbf{Z}$，则 $k\pi-\frac{\pi}{12}\leqslant x\leqslant k\pi+\frac{5\pi}{12},k\in\mathbf{Z}$，

令 $k=0$，此时单调递减区间为$[-\frac{\pi}{12},\frac{5\pi}{12}]$，且$[-\frac{\pi}{12},\frac{\pi}{3}]\subseteq[-\frac{\pi}{12},\frac{5\pi}{12}]$，故③正确；

对④，∵$f(\frac{\pi}{6})=2\sin(2\times\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi}{3})=0$，∴$(\frac{\pi}{6},0)$是函数 $f(x)$图象的对称中心，故④

正确.

13.30　由图可知35岁以下的本科人数为50,35岁以下本科学历教师的比例为62.5%,所以35岁以下的本科和研究生学历人数和为50÷62.5%=80,所以35岁以下的研究生学历人数为80−50=30.

14.0　由已知得$|\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}|^2=(\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})^2=\boldsymbol{a}^2-4\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+4\boldsymbol{b}^2=1-4\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+4\times2^2=9$,$4\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=8$,所以$|2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|^2=(2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})^2=4\boldsymbol{a}^2-4\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}^2=4\times1^2-8+2^2=0$,所以$|2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=0$.

15.1　由表中数据得$\bar{x}=4.5$,$\bar{y}=\frac{10+\lambda}{4}$,样本中心点$(\bar{x},\bar{y})$一定在回归直线上,$\frac{10+\lambda}{4}=0.7\times4.5+0.35$,解得$\lambda=4$.当$x=4$时,$\hat{y}=0.7\times4+0.35=3.15>3$,点(4,3)在回归直线下方;当$x=5$时,$\hat{y}=0.7\times5+0.35=3.85<4$,点(5,4)在回归直线上方;当$x=6$时,$\hat{y}=0.7\times6+0.35=4.55>4.5$,点(6,4.5)在回归直线下方.

16.$\frac{\sqrt{5}}{5}$　∵P是椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{16}=1(a>4)$上一点,$PQ$为$\angle F_1PF_2$的外角平分线,$QF_1\perp PQ$,设$F_1Q$的延长线交$F_2P$的延长线于点$M$,∴$|PM|=|PF_1|$.∵$|PF_1|+|PF_2|=2a$,∴$|MF_2|=|PM|+|PF_2|=2a$,设椭圆的中心为$O$,由题意知$OQ$是$\triangle F_1F_2M$的中位线,∴$|OQ|=a$,∴点$Q$的轨迹是以$O$为圆心,以$a$为半径的圆(不包括长轴的两个端点),∴当点$Q$在$y$轴上时,$Q$与短轴端点取最近距离$d=a-b=a-4=2\sqrt{5}-4$,所以$a=2\sqrt{5}$,所以椭圆的离心率$e=\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}=\frac{\sqrt{5}}{5}$.

17.解:(1)因为$\frac{150\times0.8+50\times0.92}{200}=0.83$,

所以估计该市骑乘电动自行车人员戴安全头盔的概率为0.83. ………………… 4分

(2)$K^2=\frac{200\times(46\times30-120\times4)^2}{50\times150\times166\times34}\approx3.827<3.841$,所以没有95%的把握认为“该市乘骑电动自行车的人是否戴头盔与年龄有关”. ……………………………… 10分

18.解:(1)取AC的中点G,连接FG,BG.因为E是BB_1的中点,所以$BE\underline{\underline{/\!/}}\frac{1}{2}CC_1$,又$FG$是$\triangle ACC_1$的中位线,所以$FG\underline{\underline{/\!/}}\frac{1}{2}CC_1$,所以$BE\underline{\underline{/\!/}}FG$,所以四边形$BEFG$为平行四边形,所以$EF/\!/BG$.因为$AB=AC=2$,$\angle BAC=60°$,所以$\triangle ABC$为正三角形,所以$BG\perp AC$.因为$AA_1\perp$底面$ABC$,$BG\subset$底面$ABC$,所以$AA_1\perp BG$,所以$EF\perp AA_1$,又$AA_1\cap AC=A$,$A_1A$,$AC\subset$平面$AA_1C_1C$,所以$EF\perp$平面$AA_1C_1C$. …………… 5分

(2)由上述可得$AG\perp$平面$BEFG$,因为$V_{E-ABF}=V_{A-BEF}=\frac{1}{2}V_{A-BEFG}$,所以三棱锥$E-ABF$的体积$V_{E-ABF}=\frac{1}{2}V_{A-BEFG}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}AG\times S_{矩形BEFG}=\frac{1}{2}\times1\times\frac{1}{3}\times\sqrt{3}\times2$

$=\frac{\sqrt{3}}{3}$. ………………………………………………………………………… 12 分

19. 解:(1)在$\triangle ABC$中,由$S=2ab\sin^2\frac{C}{2}$,得$\frac{1}{2}ab\sin C=ab(1-\cos C)$,化简得$\sin C+2\cos C=2$,所以$\cos C>\frac{1}{2}$,又$\sin^2 C+\cos^2 C=1$,联立得$5\sin^2 C-4\sin C=0$,解得$\sin C=\frac{4}{5}$或$\sin C=0$(舍去),所以$\cos C=\frac{3}{5}$,所以$\tan C=\frac{4}{3}$. ………………… 6 分

(2)由正弦定理可得$\frac{a}{b}=\frac{\sin A}{\sin B}=\frac{\sin(B+C)}{\sin B}=\frac{\sin B\cos C+\cos B\sin C}{\sin B}=\frac{4}{5\tan B}+\frac{3}{5}$,

因为$\triangle ABC$为锐角三角形,所以$0<B<\frac{\pi}{2}$,$A=\pi-B-C<\frac{\pi}{2}$,即$\frac{\pi}{2}-C<B<\frac{\pi}{2}$,所以$\tan B>\tan(\frac{\pi}{2}-C)=\frac{1}{\tan C}=\frac{3}{4}$,所以$\frac{1}{\tan B}\in(0,\frac{4}{3})$,即$\frac{a}{b}\in(\frac{3}{5},\frac{5}{3})$. …… 12 分

20. 解:(1)由表格中的数据,$182.4>72.9$,所以$\frac{182.4}{\sum_{i=1}^{7}(y_i-\bar{y})^2}>\frac{72.9}{\sum_{i=1}^{7}(y_i-\bar{y})^2}$,

所以$1-\frac{182.4}{\sum_{i=1}^{7}(y_i-\bar{y})^2}<1-\frac{72.9}{\sum_{i=1}^{7}(y_i-\bar{y})^2}$. 可见模型①的相关指数$R_1^2$小于模型②的相关指数$R_2^2$,所以用回归模型②建立$y$关于$x$的回归方程更好. …………………… 6 分

(2)由(1)得,当$0<x\leqslant 17$时,回归模型②的拟合效果更好,其回归方程为$\hat{y}=21.44\sqrt{x}-13.8$,所以当$x=16$亿元时,科技升级直接纯收益的预测值为$\hat{y}=21.44\times 4-13.8=71.96$(亿元),即投资16万亿元,实际收益为71.96亿元. 当$x>17$时,由已知可得$\bar{x}=\frac{21+22+23+24+25}{5}=23$,

$\bar{y}=\frac{68.5+68+67.5+66+66}{5}=67.2$,所以$67.2=-\hat{b}\times 23+83.3$,解得$\hat{b}=0.7$,所以当$x>17$时,$y$与$x$满足的线性回归方程为$\hat{y}=-0.7x+83.3$. 当$x=20$时,科技升级直接纯收益的预测值为$\hat{y}=-0.7\times 20+83.3=69.3$亿元,所以当$x=20$时,实际收益的预测值为$69.3+3=72.3>71.96$,所以科技升级投入20亿元时,公司的实际收益更大. ………………………………………………………………………… 12 分

21. 解:(1)这20位顾客中获得抽奖机会的人数为$5+3+2+1=11$.

这20位顾客中,有8位顾客获得1次抽奖的机会,有3位顾客获得2次抽奖的机会,故共有14次抽奖机会. ………………………………………………………… 4 分

(2)获得抽奖机会的顾客的购物消费数据的中位数为110,平均数为

$\frac{1}{11}(101+102+104+108+109+110+112+115+188+189+200)=\frac{1438}{11}\approx 131$. …

……………………………………………………………………………… 8 分

(3)记抽奖箱里的2个红球为红1,红2,从箱中随机取2个小球的所有结果为(红1,

红 2),(红 1,蓝),(红 1,黄),(红 2,蓝),(红 2,黄),(蓝,黄),共有 6 个基本事件.

故在一次抽奖中获得红包奖金 10 元的概率 $P_1=\frac{1}{6}$,

获得 5 元的概率 $P_2=\frac{1}{6}$,获得 2 元的概率 $P_3=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$. ………………………… 12 分

22. 解:(1)由题意知,函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$,$y'=(f(x)-x)'=\frac{a(\ln x-1)}{x^2}$,

∴当 $a>0$ 时,$y'>0$,解得 $x>\mathrm{e}$;$y'<0$,解得 $0<x<\mathrm{e}$,所以函数 $y=f(x)-x$ 在区间 $(0,\mathrm{e})$ 上单调递减,在区间 $(\mathrm{e},+\infty)$ 上单调递增.

当 $a<0$ 时,$y'<0$,解得 $x>\mathrm{e}$,$y'>0$,解得 $0<x<\mathrm{e}$,所以函数 $y=f(x)-x$ 在区间 $(0,\mathrm{e})$ 上单调递增,在区间 $(\mathrm{e},+\infty)$ 上单调递减. …………………………………… 4 分

(2)若函数 $F(x)=f(x)+\frac{a^2}{4x}$ 有两个零点,则方程 $-\frac{a\ln x}{x}+x-a+2+\frac{a^2}{4x}=0$ 恰有两个不相等的正实根,即方程 $-a\ln x+x^2-(a-2)x+\frac{a^2}{4}=0$ 恰有两个不相等的正实根.设函数 $g(x)=-a\ln x+x^2-(a-2)x+\frac{a^2}{4}$,

∴$g'(x)=2x-(a-2)-\frac{a}{x}=\frac{2x^2-(a-2)x-a}{x}=\frac{(2x-a)(x+1)}{x}$.

当 $a<0$ 时,$g'(x)>0$ 恒成立,则函数 $g(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上是增函数,∴函数 $g(x)$ 最多有一个零点,不合题意,舍去;当 $a>0$ 时,令 $g'(x)>0$,解得 $x>\frac{a}{2}$,令 $g'(x)<0$,解得 $0<x<\frac{a}{2}$,则函数 $g(x)$ 在区间 $(0,\frac{a}{2})$ 上单调递减,在区间 $(\frac{a}{2},+\infty)$ 上单调递增.易知 $x\to0$ 时,$g(x)>0$ 恒成立,要使函数 $g(x)$ 有 2 个正零点,则 $g(x)$ 的最小值 $g(\frac{a}{2})<0$,即 $-a\ln\frac{a}{2}+\frac{a^2}{4}-(a-2)\times\frac{a}{2}+\frac{a^2}{4}<0$,即 $-a\ln\frac{a}{2}+a<0$,

∵$a>0$,∴$\ln\frac{a}{2}>1$,解得 $a>2\mathrm{e}$,即实数 a 的取值范围为 $(2\mathrm{e},+\infty)$. ………… 12 分

2210006828258